Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Théorie des groupes de tresses

Cours destiné aux étudiants de la deuxième année master
Mathématiques Fondamentales et Discrètes
Année 2020- 2021

Prof. Abderrahmane Bouchair

Chapitre 1

Groupes libres et présentations de groupes

1.1 Groupes libres

Définition 1.1.1
Soient G un groupe et X une partie non vide de G. X est dite partie libre de G si toute application $f : X \longrightarrow H$, où $(H, \cdot)$ est un groupe arbitrairement donné, se prolonge à un homomorphisme $\overline{f} : G \longrightarrow H$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

c-à-d $\overline{f} \circ i = f$ où i est l'injection canonique.

Définition 1.1.2
On dit que G est un groupe libre sur X si :

1. *$G =< X >$;*
2. *X est une partie libre de G.*

Exemple 1.1.1 *Le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ est libre sur $\{1\}$.*

Proposition 1.1.3
Soit X une partie libre de G. Alors G est libre sur X si et seulement si le problème de prolongement

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl] \\ & H & \end{tikzcd}$$

admet une solution unique.

Démonstration.
Supposons que G est libre sur X, et $f_1, f_2 : G \longrightarrow H$ deux homomorphismes qui prolongent f avec $f_1 \neq f_2$. Donc il existe $g \in G$ tel que $f_1(g) \neq f_2(g)$. On a $g \in G =< X >$, alors il existe $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tel que $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. On a $f_1(g) = f_1(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}) = f_1(x_1)^{\varepsilon_1} f_1(x_2)^{\varepsilon_2} \cdots f_1(x_n)^{\varepsilon_n}$; or $f_{1|X} = f_{2|X} = f$ donc

$$f_1(g) = f(x_1)^{\varepsilon_1} f(x_2)^{\varepsilon_2} \cdots f(x_n)^{\varepsilon_n} = f_2(x_1)^{\varepsilon_1} f_2(x_2)^{\varepsilon_2} \cdots f_2(x_n)^{\varepsilon_n} = f_2(g),$$

ce qui est absurde par hypothèse.
Inversement, montrons que $< X >= G$. Considérons $X \xrightarrow{i} < X > \xrightarrow{j} G$ où i et j sont les inclusions canoniques. En utilisant la commutativité du diagramme, il existe un unique homomorphisme $\overline{i} : G \longrightarrow < X >$ tel que $\overline{i} \circ i_G = i$, où i_G est l'inclusion canonique de X dans G. Considérons maintenant les applications

$$\overline{i} \circ j :< X > \longrightarrow < X > \text{ et } j \circ \overline{i} : G \longrightarrow G.$$

On a $j \circ \overline{i}(x) = j(\overline{i}(x)) = j(x) = x$ pour tout $x \in X$. Donc $(j \circ \overline{i})_{|X} = Id_{G|X}$. Et d'après l'unicité du prolongement on obtient $j \circ \overline{i} = Id_G$. De la même manière, on obtient $\overline{i} \circ j = Id_{<X>}$. Donc $\overline{i}$ est une application bijective d'inverse j, d'où $G =< X >$. ■

1.1.1 Construction du groupe libre

Soit X un ensemble donné. Soit $\overline{X}$ un ensemble en bijection avec X tel que $X \cap \overline{X} = \emptyset$. Donc pour tout $x \in X$ il existe un élément unique $\bar{x} \in \overline{X}$ appelé antipode de x. Considérons $X \cup \overline{X}$ qu'on appellera alphabet et ses éléments des lettres. On appelle mot toute suite finie ordonnée de lettres. L'ensemble des mots union $\{\emptyset\}$ sera noté $M(X \cup \overline{X})$, où $\emptyset$ représente le mot vide, i.e, ne contient aucune lettre. La concaténation des mots est une loi interne dans $M(X \cup \overline{X})$ appelée produit des mots. Si $w_1, w_2 \in M(X \cup \overline{X})$, alors $w_1 \cdot w_2$, ou plus simplement $w_1 w_2$, est obtenu en recollant dans l'ordre le premier au deuxième mot. Ainsi $(M(X \cup \overline{X}), \cdot)$ est un monoïde qui a comme élément neutre le mot vide $\emptyset$.

Définissons deux opérations élémentaires :

1. **Simplification** : Elle consiste à supprimer au début, entre deux lettres, ou à la fin d'un mot un mot du type $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$.
2. **Adjonction** : Elle consiste à rajouter au début, entre deux lettres, ou à la fin d'un mot, un mot du type $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$.

Considérons dans $M(X \cup \overline{X})$ la relation suivante : pour tout $w, w' \in M(X \cup \overline{X})$, w est en relation avec w', et on écrit wRw', si et seulement si w' s'obtient de w après un nombre fini d'opérations élémentaires.

Proposition 1.1.4
R est une relation d'équivalence sur $M(X \cup \overline{X})$ compatible avec le produit des mots.

Démonstration. Il est clair que R est réflexive puisque tout mot s'obtient de lui même après zero opération.
Si w et w' sont deux mots tel que w' s'obtient de w après un nombre fini d'opérations élémentaires, alors il suffit d'effectuer le même nombre d'opérations opposées pour obtenir w à partir de w'. Donc R est symétrique.
Transitivité : Soient w, w', w'' trois mots tels que wRw' et $w'Rw''$. Donc w' s'obtient de w après un nombre fini d'opérations élémentaires et w'' s'obtient de w' après un nombre fini d'opérations élémentaires. Il suffit de réunir toutes les opérations effectuer pour obtenir w'' à partir de w. Donc wRw'' et la relation est transitive.
Montrons maintenant que R est compatible avec le poduit des mots. Soient w, w', w_1, w'_1 quatre mots tels que wRw' et $w_1Rw'_1$. Alors w' s'obtient de w après un nombre fini, $(q_j)_{1\leq j\leq m}$, d'opérations élémentaires et w'_1 s'obtient de w_1 après un nombre fini, $(p_i)_{1\leq i\leq n}$, d'opérations élémentaires. Donc le mot ww_1 se transforme en $w'w_1$ en effectuant les q_j opérations, ensuite on effectue les p_i opérations pour transformer ce dernier mot en $w'w'_1$. D'où ww' est en relation avec $w_1w'_1$. ■

Si $w = x_1x_2\cdots x_n \in M(X \cup \overline{X})$, alors on écrit $[w] = [x_1x_2\cdots x_n]$ sa classe d'équivalence suivant R.
Le produit des mots dans $M(X \cup \overline{X})$ induit une loi de complosition interne dans l'ensemble quotient $M(X \cup \overline{X})/R$ donnée par

$$[w_1].[w_2] = [w_1.w_2].$$

Remarque 1.1.5

1. *$[\emptyset]$ est l'élément neutre de $M(X \cup \overline{X})/R$. Par exemple $[x\bar{x}] = [\emptyset]$ et $[x\bar{x}\,\bar{z}z] = [\emptyset]$.*
2. *Si $[x_1x_2\cdots x_n] \in M(X \cup \overline{X})/R$, alors son inverse est $[\bar{x}_n\,\bar{x}_{n-1}\cdots\bar{x}_1]$.*

Ainsi $M(X \cup \overline{X})/R$ muni de la loi du produit des classes (quotient) est un groupe.

Proposition 1.1.6
$(M(X \cup \overline{X})/R, \cdot)$ est un groupe libre sur $[X] = \{[x] \ / \ x \in X\}$. Avec la convention que $\bar{x} = x^{-1}$ et $[\bar{x}] = [x]^{-1}$. On note $L(X) = M(X \cup \overline{X})/R$.

Démonstration.
On a $M(X \cup \overline{X})/R =< [X] >$. Montrons que $M(X \cup \overline{X})/R$ est libre sur $[X]$. Soit $f : [X] \longrightarrow (H, \cdot)$ une application, où H est un groupe quelconque. Soit l'application $f_1 : [X] \cup [\overline{X}] \longrightarrow H$ définie par $f_1([x]) = f([x])$ et $f_1([\bar{x}]) = (f([x]))^{-1}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f_1} : & M(X \cup \overline{X})/R =< [X] > & \longrightarrow & H \\ & [\cdots x_i \cdot \cdot \bar{x}_j \cdots] & \longmapsto & \widehat{f_1}([\cdots x_i \cdot \cdot \bar{x}_j \cdots]) = \cdots f_1([x_i]) \cdot \cdot f_1([\bar{x}_j]) \cdots \end{array}$$

$\widehat{f_1}$ est correctement définie car si $\cdots y_i \cdot \cdot y_j \cdots$ est un autre représentant de $[\cdots x_i \cdot \cdot x_j \cdots]$, c-à-d deux mots en relation, alors ils ont la même image. En effet, si wRw' alors on peut obtenir w' à partir de w après un nombre fini d'opérations élémentaires ; ceci consiste à rajouter $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$ ou simplifier $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$. En appliquant f_1 sur $x\bar{x}$, on obtient $f([x])f([x])^{-1} = e_H$. Alors dans H ceci revient à multiplier par e_H ou supprimer e_H ce qui ne change pas l'élément. Il est clair que $\widehat{f_1}$ est un homomorphisme de groupes et $\widehat{f_1}_{|[X]} = f$. ■

1.1.2 Propriétés des groupes libres

Définition 1.1.7
On appelle longueur d'un mot le nombre de ses lettres. On note $l(w)$ la longueur d'un mot w. Un mot $w \in M(X \cup \overline{X})$ est dit irréductible ou réduit s'il ne contient pas de mot du type $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$.

Remarque 1.1.8

1. *Si $u, v \in M(X \cup \overline{X})$, alors $l(uv) = l(u) + l(v)$. On déduit donc que tout élément non vide x dans $M(X \cup \overline{X})$, est non inversible. En effet, s'il existe $y \in M(X \cup \overline{X})$ tel que $xy = \emptyset$ alors $l(xy) = l(\emptyset)$; or $l(xy) \geq 1$ et $l(\emptyset) = 0$ donc x est non inversible.*
2. *Un mot de longueur 1 est réduit.*
3. *Un mot $u \in M(X \cup \overline{X})$ est de longueur 1 si et seulement si $u \in X$ ou $u \in \overline{X}$.*

Théorème 1.1.9
Dans chaque classe de $L(X)$ Il n'y a qu'un seul mot réduit.

Démonstration.
On ne donne ici que l'idée de la preuve, le lecteur intéressé peut consulter [**?**].

1. **Etape 1** : Si x est un mot de $M(X \cup \overline{X})$, on construit de proche en proche un mot réduit $r(x)$ appelé forme réduite de x.
2. **Etape 2** : On montre que si x est en relation avec y, alors leurs formes réduites sont identiques.
3. **Etape 3** : On montre que si deux mots réduits x et y sont en relation, alors $x = y$.

■
Soit M l'ensemble de tous les mots réduits de $M(X \cup \overline{X})$.

Proposition 1.1.10
L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & L(X) & \longrightarrow & M \\ & [w] & \longmapsto & \varphi([w]) = w_r \end{array}$$

où w_r est le mot réduit qui représente la classe $[w]$, est une application bijective.

On peut donc grâce à l'application φ définie ci-dessus introduire dans M une loi de composition interne donnée par :

$$w_r \cdot w'_r = \varphi(\varphi^{-1}(w_r) \cdot \varphi^{-1}(w'_r)) = \varphi([w_r][w'_r]) = \varphi([w_r w'_r])$$

i.e, le produit de deux mots réduits est le mot réduit dans la classe du produit de ces mots.

Proposition 1.1.11
$(M, \cdot)$ est un groupe isomorphe à $L(X)$.

Proposition 1.1.12
Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) Le groupe G est libre sur une partie X ;
(2) tout élément de G admet une écriture unique sous forme de mot réduit;
(3) Si $e_G = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_k^{\varepsilon_k}$ avec $x_i \in X$ et $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$ alors $\varepsilon_i = 0$ pour tout i.

Démonstration. G est libre sur X équivalent à G isomorphe à M, le groupe des mots réduits de $M(X \cup X^{-1})$. Donc à chaque élément $g \in G$ on lui associe son mot réduit. Donc l'unicité de l'écriture est assuré par cet isomorphisme. ■

Théorème 1.1.13
Soient X et Y deux ensembles, alors $L(X)$ est isomorphe à $L(Y)$ si et seulement si X et Y ont le même cardinal.

Démonstration.
Supposons que X est en bijection avec Y, et montrons que $L(X)$ est isomorphe à $L(Y)$. Comme X est en bijection avec Y, il existe une application bijective $f : X \longrightarrow Y$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} s_2: & Y & \longrightarrow & L(Y) \\ & y & \longmapsto & [y]. \end{array}$$

Alors l'application $s_2 \circ f : X \longrightarrow L(Y)$, est compatible avec la relation entre les mots de X et l'égalité dans $L(Y)$. Donc $s_2 \circ f$ induit une application $\widetilde{s_2 \circ f} : [X] \longrightarrow L(Y)$; et comme $[X]$ est une partie libre de $L(X)$, alors elle se prolonge uniquement à un homomorphisme de groupes $\widehat{f} : L(X) \longrightarrow L(Y)$. Considérons maintenant $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, et l'application

$$\begin{array}{rccl} s_1: & X & \longrightarrow & L(X) \\ & x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

Comme on a déjà fait avec f, l'application $s_1 \circ f^{-1} : Y \longrightarrow L(X)$ induit une application

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{s_1 \circ f^{-1}}: & [Y] & \longrightarrow & L(X) \\ & [y] & \longmapsto & [f^{-1}(y)]. \end{array}$$

Et comme $L(Y)$ est libre sur $[Y]$, alors $\widetilde{s_1 \circ f^{-1}}$ se prolonge en un unique homomorphisme de groupes $\widehat{f^{-1}} : L(Y) \longrightarrow L(X)$. Montrons que $\widehat{f}$ et $\widehat{f^{-1}}$ sont inverses l'un de l'autre. On a pour tout $[y] \in [Y]$, que

$$\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}}([y]) = \widehat{f}([f^{-1}(y)]) = [f(f^{-1}(y))] = [y] = Id_{L(Y)}([y])$$

c-à-d la restriction de $\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}}$ sur $[Y]$ est égale à $Id_{L(Y)|[Y]}$, donc d'après l'unicité du prolongement on obtient $\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = Id_{L(Y)}$. En utilisant la même méthode sur $\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f}$, on obtient donc $\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f} = Id_{L(X)}$. Donc $\widehat{f}$ est bijective, et donc c'est un isomorphisme de groupes.
Réciproquement, supposons que $f : L(X) \longrightarrow L(Y)$ est un isomorphisme, et montrons que X est en bijection avec Y. Soient M_1 l'ensemble des mots réduits de $M(X \cup \overline{X})$, et M_2 l'ensemble des mots réduits de $M(Y \cup \overline{Y})$. Soient f_1 l'isomorphisme de M_1 vers $L(X)$, et f_2 l'isomorphisme de M_2 vers $L(Y)$, et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[r, "f"] & L(Y) \\
M_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2^{-1} \circ f \circ f_1"'] & M_2. \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Alors $\varphi = f_2^{-1} \circ f \circ f_1$ est un isomorphisme de groupes entre M_1 et M_2. Soit $w = x$ un mot réduit dans M_1 constitué d'une seule lettre. Montrons que $\varphi(x)$ est aussi constitué d'une seule lettre. Supposons $\varphi(x) = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_i^{\varepsilon_i} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$, avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1, 0\}$, alors cela implique que
$x = \varphi^{-1}(y_1^{\varepsilon_1} \cdot \cdot y_i^{\varepsilon_i} \cdot \cdot y_n^{\varepsilon_n}) = \varphi^{-1}(y_1^{\varepsilon_1}) \cdot \cdot \varphi^{-1}(y_i^{\varepsilon_i}) \cdot \cdot \varphi^{-1}(y_n^{\varepsilon_n})$, donc x s'écrit de deux manières. Alors d'après l'unicité de l'écriture, il existe $i_0 \in \{1, \cdot \cdot \cdot, n\}$ tel que

$$\begin{cases} \varepsilon_i \neq 0, si \quad i = i_0, \\ \varepsilon_i = 0, si \quad i \neq i_0. \end{cases}$$

Donc $x = \varphi^{-1}(y_{i_0})^{\varepsilon_{i_0}}$ c-à-d $\varphi(x) = y_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}}$, compte tenu de la Remarque 1.1.8 on conclut que $\varphi(X) = Y$ ou $\varphi(X) = \overline{Y}$. D'où $\varphi_{|X}$ est une bijection entre X et Y. ■

Corollaire 1.1.14
Si L est un groupe libre et si X et Y sont deux parties génératrices libres de L, alors

$$Card(X) = Card(Y).$$

Ce résultat justifie la définition suivante :

Définition 1.1.15
Si L est un groupe libre, alors le cardinal d'une partie génératrice libre de L est appelé le rang de L.

Remarque 1.1.16

1. *En particulier, un groupe libre est de rang fini n s'il possède une partie génératrice libre finie de cardinal n.*
2. *D'après le Théorème 1.1.13, deux groupes libres L et L' sont isomorphes si et seulement si $rang(L) = rang(L')$.*

Théorème 1.1.17
Tout groupe est image épimorphe d'un groupe libre. En particulier, tout groupe de type fini est image épimorphe d'un groupe libre de type fini.

Démonstration.
Soient G un groupe et $X = \{x_i\}_{i \in I}$ un sous ensemble de G tel que $G =< X >$. Soit Y un ensemble en bijection avec X ; on peut supposer que $Y = \{y_i\}_{i \in I}$. On définit alors l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & M(Y \cup \overline{Y}) & \longrightarrow & G \\ & \cdots y_i \cdots y_j \cdots & \longmapsto & \cdots x_i \cdots x_j \cdots \end{array}$$

avec la convention $f(y_i) = x_i$ et $f(\bar{y}_i) = x_i^{-1}$. Alors f est compatible avec la relation d'équivalence entre mots dans $M(Y \cup \overline{Y})$ et l'égalité dans G ; donc elle induit une application $\overline{f} : L(Y) \longrightarrow G$. On vérifie facilement que c'est un homomorphisme de groupes surjectif. ■

Corollaire 1.1.18
Tout groupe est le groupe quotient d'un groupe libre par un de ses sous groupes normaux.

Démonstration.
Soit $G =< X >$ un groupe donné. D'après le Théorème 1.1.17, il existe un épimorphisme $f : L(Y) \longrightarrow G$; donc $G = f(L(Y))$. D'après le premier théorème d'isomorphisme, on a $L(Y)/\ker f$ est isomorphe à G. ■

Définition 1.1.19
Un groupe est libre, s'il est isomorphe à un groupe qui a une partie génératrice libre.

Proposition 1.1.20
Si G est un groupe libre, alors il existe une partie $Y \subset G$ tel que G soit libre sur Y.

Proposition 1.1.21
Soit $G =< X >$. Alors G est libre si et seulement si G est isomorphe à $L(X)$.

Démonstration.
Considérons les applications

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} s: & X & \longrightarrow & L(X) \\ & x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

i est compatible avec les relations d'équivalences entre mots dans X et l'égalité dans G, donc elle induit une application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{i}: & [X] = X/R & \longrightarrow & G \\ & [x] & \longmapsto & \widetilde{i}([x]) = i(x) = x. \end{array}$$

Comme $L(X)$ est libre sur $[X]$, $\widetilde{i}$ se prolonge à un homomorphisme unique $\overline{i} : L(X) \longrightarrow G$. Et d'autre part, comme G est libre sur X alors s se prolonge à un homomorphisme unique $\overline{s} : G \longrightarrow L(X)$.
Montrons maintenant que $\overline{i} \circ \overline{s} = Id_G$ et $\overline{s} \circ \overline{i} = Id_{L(X)}$.

1. On a pour tout $x \in X$ que $\overline{i} \circ \overline{s}(x) = \overline{i}(s(x)) = \overline{i}([x]) = \widetilde{i}([x]) = x = Id_G(x)$.
   Donc $(\overline{i} \circ \overline{s})_{|X} = i$, or on sait que $Id_{G|X} = i$, donc d'après l'unicité du prolongement on a $(\overline{i} \circ \overline{s}) = Id_G$.

2. On a $(\overline{s} \circ \overline{i})_{|[X]} = j$, où

$$j: \begin{array}{ccc} [X] & \longrightarrow & L(X) \\ [x] & \longmapsto & [x] \end{array}$$

et $Id_{L(X)|[X]} = j$. Comme $L(X)$ est libre sur $[X]$, alors $\overline{s} \circ \overline{i} = Id_{L(X)}$.
Donc $\overline{i}$ est un isomorphisme de groupes.

■

Proposition 1.1.22 *Soit G un groupe libre. Alors*

1. *G est infini.*
2. *Si G est engendré par plus de deux éléments, alors G est non abélien.*

Démonstration.

1. Par la Proposition 1.1.21, on peut supposer que $G = M(X \cup \overline{X})/R$. Soit alors $x \in X$. Si $n \neq m$ alors x^n et x^m représentent deux classes différentes. Donc $[x]^n \neq [x]^m$. Ce qui implique que l'ensemble $\{[x]^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset M(X \cup \overline{X})/R$ sera infini.
2. Supposons que $G =< X >$ est abélien et prenons deux éléments x_1, x_2 de la partie génératrice de G. Alors x_1x_2 et x_2x_1 sont deux mots réduits qui représentent la même classe. Contradiction.

■

1.2 Présentations de Groupes

1.2.1 Définitions

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subseteq G$. Alors

$$N(A) =< \{gag^{-1} : g \in G, a \in A\} >= \{g_1 a_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 a_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n a_n^{\varepsilon_n} g_n^{-1} : a_i \in A, g_i \in G, \varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n}\}$$

est un sous groupe normal dans G contenant A, qu'on l'appelle le sous groupe distingué engendré par A ou le sous groupe normal engendré par A.
Soient G un groupe donné, engendré par une partie X, et $\phi : L(X) \longrightarrow G$ l'épimorphisme associé, défini par $\phi([\cdots x_i \cdot \cdot \bar{x}_j \cdots]) = \cdots x_i \cdot \cdot x_j^{-1} \cdots$, où $x_i \in X, i \in I$.
Dans le reste de ce text la classe de g sera notée aussi g.

Définition 1.2.1
On appelle relation (entre les générateurs) tout élément de $ker\phi$.

Définition 1.2.2
On appelle présentation de G tout couple (X, R), où

1. *X est une partie génératrice de G.*
2. *R est une partie de $L(X)$ tel que $N(R) = ker\phi$.*

On écrit $G =< X : R >$.

$N(R)$ est l'ensemble de toutes les relations entre les éléments de X.

$$N(R) =< \{gag^{-1}, g \in L(X), a \in R\} > .$$

Puisque $N(R)$ est engendré par R alors on peut obtenir toutes les relations entre les éléments de X à partir des relations de R et les relations qui n'appartiennent pas à R sont des relations superflues.

Exemple 1.2.1

1. *Le groupe libre sur X a pour présentation $< X : \emptyset >$.*
2. *Le groupe cyclique d'ordre n engendré par x a pour présentation $< x : x^n = 1 >$.*
3. *Le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1), i = \overline{1, n-1}$; les relations sont alors $s_i^2 = 1$ pour $i = \overline{1, n-1}, (s_i s_{i+1})^3 = 1$ pour $i = \overline{1, n-2}, s_i s_j = s_j s_i$ pour $|i - j| > 1$.*
   Pour $n = 4$, alors $S_4 =< s_1, s_2, s_3 : s_1^2, s_2^2, s_3^2, (s_1s_2)^3, (s_2s_3)^3, (s_1s_3)^2 >$.

Définition 1.2.3
Un groupe est dit de type fini s'il admet une partie génératrice finie.

Théorème 1.2.4
Tout groupe admet une présentation.

Démonstration.
Soient G un groupe et X une partie génératrice de G. Soit $f : X \longrightarrow G$ une application quelconque, et $\overline{f} : L(X) \longrightarrow G$ l'homomorphisme de groupes tel que $\overline{f}_{|X} = f$. Posons $R = ker\overline{f}$, alors $N(R) = R$, car R est un sous groupe normal dans $L(X)$. Il suffit de prendre $\phi = \overline{f}$; donc $< X : R >$ est une présentation de G. ■

1.2.2 Morphismes de présentations

Un groupe peut avoir plusieurs présentations ce qui rend nécessaire l'étude des liens entre ces présentations.

Définition 1.2.5
Soient X, Y deux ensembles. Un morphisme de présentations de $< X : R >$ dans $< Y : S >$ consiste en une application ensembliste $\varphi : X \longrightarrow L(Y)$ telle que l'homomorphisme induit $\overline{\varphi} : L(X) \longrightarrow L(Y)$ satisfait à $\overline{\varphi}(R) \subseteq N(S)$. On écrit $\varphi :< X : R > \to < Y : S >$.

On note $\gamma_{<X:R>}$ la surjection canonique de $L(X)$ dans $L(X)/N(R)$.

Proposition 1.2.6
Tout morphisme de présentations $\varphi :< X : R > \to < Y : S >$ induit un unique homomorphisme $\widehat{\varphi} : L(X)/N(R) \longrightarrow L(Y)/N(S)$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[r, "\gamma_{<X:R>}"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & L(X)/N(R) \arrow[d, "\widehat{\varphi}"] \\
L(Y) \arrow[r, "\gamma_{<Y:S>}"'] & L(Y)/N(S)
\end{tikzcd}$$

Si de plus on note $\overline{u}$ la classe d'équivalence d'un élément u de $L(X)$ dans $L(X)/N(R)$, alors

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\overline{u}) &= \widehat{\varphi}(\gamma_{<X:R>}(u)) \\
&= (\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(u) \\
&= \overline{\overline{\varphi}(u)}.
\end{aligned}$$

Démonstration.
Soient $\overline{\varphi} : L(X) \longrightarrow L(Y)$, $\gamma_{<Y:S>} : L(Y) \longrightarrow L(Y)/N(S)$, et considérons

$$\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi} : L(X) \longrightarrow L(Y)/N(S).$$

On cherche à montrer que $\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi}$ est compatible avec la relation d'équivalence définie, par $N(R)$, sur $L(X)$ et d'égalité définie sur $L(Y)/N(S)$, i.e, si $w(w')^{-1} \in N(R)$ alors $(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w) = (\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w')$; pour cela il suffit de montrer que $N(R) \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$. Montrons d'abord que $R \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$. On a

$$R \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi}) \Leftrightarrow \forall w \in R, (\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w) = 1_{L(Y)/N(S)} = N(S).$$

Or $w \in R$ implique que $\overline{\varphi}(w) \in \overline{\varphi}(R) \subseteq N(S)$. Donc $(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w) = N(S)$.
D'où $R \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$. Comme $N(R)$ est le plus petit sous groupe normal de $L(X)$ contenant R et $ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$ est distingué dans $L(X)$ alors $N(R) \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$. Soient maintenant w, w' deux éléments en relation dans $L(X)$; donc $ww'^{-1} \in N(R)$. Or $N(R) \subset ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$, donc $ww'^{-1} \in ker(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})$. Ceci implique que $(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(ww'^{-1}) = N(S)$, ce qui est équivalent à $(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w) = (\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(w')$. D'où $\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi}$ est compatible avec la relation d'équivalence définie sur $L(X)$ et d'égalité définie sur $L(Y)/N(S)$; donc elle induit une application $\widehat{\varphi} : L(X)/N(R) \longrightarrow L(Y)/N(S)$. On montre facilement que c'est un homomorphisme de groupes.

■

Remarque 1.2.7
Soient $\varphi :< X : R > \to < Y : S >$ et $\psi :< Y : S > \to < Z : T >$ deux morphismes de présentations. Alors $\psi \circ \varphi :< X : R > \to < Z : T >$ est un morphisme de présentations et

$$\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}.$$

Nous avons vu qu'un morphisme de présentations induit un homomorphisme sur les groupes présentés mais qu'en est-il du contraire ?

Proposition 1.2.8
Pour tout homomorphisme $f : L(X)/N(R) \to L(Y)/N(S)$ il existe un morphisme de présentations $\varphi :< X : R > \to < Y : S >$ tel que $\widehat{\varphi} = f$.

Démonstration.
Soit $x \in X$; on a alors $(f \circ \gamma_{<X:R>|})(x) \in L(Y)/N(S)$. Comme $\gamma_{<Y:S>}$ est surjective, alors il existe $v \in L(Y)$ tel que $\gamma_{<Y:S>}(v) = (f \circ \gamma_{<X:R>})(x)$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X & \longrightarrow & L(Y) \\ & x & \longmapsto & v \end{array}$$

et vérifions que φ, ainsi définie, est un homomorphisme de présentations et que $\widehat{\varphi} = f$. D'après la définition de φ, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L(X) & \xrightarrow{\gamma_{<X:R>}} & L(X)/N(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ L(Y) & \xrightarrow[\gamma_{<Y:S>}]{} & L(Y)/N(S) \end{array}$$

c-à-d on a $\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi} = f \circ \gamma_{<X:R>}$. Donc pour tout $r \in R$ on a

$$(\gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi})(r) = (f \circ \gamma_{<X:R>})(r) = f(N(R)) = N(S).$$

Ceci nous donne $\overline{\varphi}(r) \in ker\gamma_{<Y:S>}$, et cela pour tout $r \in R$, donc $\overline{\varphi}(R) \subset ker\gamma_{<Y:S>} = N(S)$. D'où φ est un morphisme de présentations. Comme $\widehat{\varphi}$ est l'unique homomorphisme de groupes telle que $\widehat{\varphi} \circ \gamma_{<X:R>} = \gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi}$, d'après la Proposition 1.2.6, et que $f \circ \gamma_{<X:R>} = \gamma_{<Y:S>} \circ \overline{\varphi}$, alors on obtient $\widehat{\varphi} = f$. ■

Définition 1.2.9
Deux présentations sont du même type si et seulement s'il existe deux morphismes de présentations $\varphi :< X : R >\to< Y : S >$ et $\psi :< Y : S >\to< X : R >$ tels que :

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} = Id_{L(X)/N(R)} \quad et \quad \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi} = Id_{L(Y)/N(S)}.$$

On dit alors que φ est une équivalence de présentations et que ψ est son équivalence inverse.

Il est facile de vérifier que la composition de deux équivalences de présentations est une équivalence de présentations.

Proposition 1.2.10
Deux présentations sont du même type si et seulement si les groupes qu'elles définissent sont isomorphes.

Démonstration.
Supposons que $G =< X : R >$ et $G' =< Y : S >$ sont deux présentations du même type et soient $\varphi :< X : R >\to< Y : S >$ une équivalence de présentations et $\psi :< Y : S >\to< X : R >$ son équivalence inverse. Alors $\widehat{\psi}\circ\widehat{\varphi} = Id_{L(X)/N(R)}$ et $\widehat{\varphi}\circ\widehat{\psi} = Id_{L(Y)/N(S)}$. Donc $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sont des isomorphismes de groupes, c-à-d $L(X)/N(R)$ et $L(Y)/N(S)$ sont isomorphes. Comme G est isomorphe à $L(X)/N(R)$ et G' est isomorphe à $L(Y)/N(S)$, alors G et G' sont isomorphes.
Inversement, supposons que G et G' sont isomorphes. Soit $f : L(X)/N(R) \longrightarrow L(Y)/N(S)$ un isomorphisme de groupes. Alors il existe deux morphismes de présentations, φ et ψ, tels que $\widehat{\varphi} = f$ et $\widehat{\psi} = f^{-1}$. Donc $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi} = Id_{L(Y)/N(S)}$ et $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} = Id_{L(X)/N(R)}$. D'où φ et ψ sont des équivalences de présentations. ■

1.2.3 Equivalences de Tietze

Théorème 1.2.11
Soit $< X : R >$ une présentation d'un groupe G et soit $s \in N(R)$. Posons $S = R \cup \{s\}$. Alors les groupes $G =< X : R >$ et $G' =< X : S >$ sont isomorphes.

Démonstration.
Montrons d'abord que $N(R) = N(S)$. On a $N(S) = N(R\cup\{s\})$ donc $R \subset R\cup\{s\} \subset N(S)$, de plus comme $N(S)$ est un sous groupe normal dans $L(X)$ et $N(R)$ est le plus petit sous groupe normal dans $L(X)$ contenant R, alors $N(R) \subset N(S)$.
D'autre part, soit $w \in N(S)$, alors $w = g_1 s_1'^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 s_2'^{\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n s_n'^{\varepsilon_n} g_n^{-1}$, avec $g_i \in L(X)$ et $s_i' \in S, \varepsilon_i = \pm 1$. On a $s_i' \in S$ donc $s_i' \in R$ ou $s_i' = s$, alors $s_i' \in N(R)$. Comme $N(R)$ est un sous groupe normal dans $L(X)$ alors

$$g_1 s_1'^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 s_2'^{\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n s_n'^{\varepsilon_n} g_n^{-1} \in N(R),$$

avec $n \in \mathbb{N}, g_i \in L(X), i \in \{1, \dots, n\}$, il vient $w \in N(R)$ d'où $N(S) \subset N(R)$, on obtient $N(S) = N(R)$, alors $L(X)/N(R) = L(X)/N(S)$, donc G et G' sont isomorphes.
■ Soit l'inclusion $i : X \longrightarrow L(X)$ alors $\bar{i}(R) = R \subset N(S)$ et $\bar{i}(S) = S \subset N(R)$, donc i est l'application ensembliste sous-jacente à deux équivalences de présentations :
$\varphi_I :< X : R > \to < X : S >$ et $\varphi'_I :< X : S > \to < X : R >$.

Définition 1.2.12
Les équivalences $\varphi_I :< X : R > \to < X : S >$ et $\varphi'_I :< X : S > \to < X : R >$ s'appellent des équivalences du type Ia, Ib respectivement.

Remarque 1.2.13
Une équivalence du type Ia ne fait qu'ajouter une relation superflue tandis qu'une équivalence du type Ib ne fait qu'enlever une relation superflue.

Théorème 1.2.14
Soit $< X : R >$ une présentation de groupe, soient $v \in L(X)$, et $y \notin X$ telle que $\overline{v} = \overline{y}$. Alors les groupes $G =< X : R >$ et $G' =< X \cup \{y\} : R \cup \{yv^{-1}\} >$ sont isomorphes.

Le Théorème 1.2.14 nous donne deux équivalences $\varphi_{II} :< X : R > \to < X \cup \{y\} : R \cup \{yv^{-1}\} >$ et $\varphi'_{II} :< X \cup \{y\} : R \cup \{yv^{-1}\} > \to < X : R >$ appelées équivalences du type IIa et IIb respectivement.

Remarque 1.2.15
Une équivalence du type IIa ne fait qu'ajouter un générateur superflu tandis qu'une équivalence du type IIb ne fait qu'enlever un générateur superflu.

Définition 1.2.16
Les équivalences Ia, Ib,IIa, et IIb s'appelent les équivalences(transformations) de Tietze.

Théorème 1.2.17
Deux présentations définissent le même groupe si et seulement si de l'une on peut obtenir l'autre après une suite finie d'équivalences de Tietze.

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe libre sur $\{1\}$.*

Exercice 1.3.2 *Soit F_n un groupe libre engendré par n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$.*
(a) *On appelle puissance total d'un mot $W = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ sur x_j le nombre*

$$\vartheta_j(W) = \sum_{i_m = j} \varepsilon_m.$$

Calculer $\vartheta_1(W), \vartheta_2(W), \vartheta_4(W), \vartheta_5(W)$ pour $W = x_1^{-3} x_2 x_4^5 x_2^{-4} x_3 x_1$.
(b) *Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe f_j un épimorphisme de groupes de F_n dans $\mathbb{Z}$.*

Exercice 1.3.3 *Montrer qu'un groupe G est libre sur une partie X si et seulement si la condition suivante est vérifiée : $1_G = x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n}$ avec $s_i \in \mathbb{Z}$ et $x_i \in X$ pour tout i, alors $s_i = 0$ pour tout i.*

Exercice 1.3.4 *Soient X et Y deux ensembles de même cardinal et $\varphi : M_X \simeq L(X) \to M_Y \simeq L(Y)$ un isomorphisme de groupes. φ conserve t-il la longueur, i.e., $l(w) = l(\varphi(w))$ pour $w \in M_X$?.*

Chapitre 2

Groupes des tresses

2.1 Générateurs et relations

Définition 2.1.1 *On appelle groupe de tresses d'Artin B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe engendré par $n-1$ générateurs $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$, et les relations entre ces générateurs sont :*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |j-i| \geq 2 \tag{2.1}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ pour } i = 1, .., n-2. \tag{2.2}$$

Les deux relations (2.1) et (2.2) sont appelées relations d'Artin (ou de tresse). D'après la définition on a

• B_1 est trivial.

• $B_2 =< \sigma_1 >$ est un groupe infini cyclique isomorphe au groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.1.1

Montrons que $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$. En utilisant les relations d'Artin, on a

$\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
$= \sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2$
$= \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$.

Soit F un groupe donné, X un sous-ensemble non vide de F, et $i_X : X \to F$ l'inclusion canonique.

Définition 2.1.2

On dit que F est libre sur X (ou que X est une partie libre de F), si toute application $f : X \to G$, où G est un groupe arbitrairement donné, se prolonge à un (unique) homomorphisme de groupes $\bar{f} : F \longrightarrow G$ telle que $f = \bar{f} \circ i$; cette équation exprime la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

*Un groupe qui est libre sur une partie génératrice est dit **groupe libre** sur cette partie.*

Exemple 2.1.2
Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ *est libre sur* $\{1\}$*. En effet, toute application* f *de* $\{1\}$ *dans un groupe quelconque* $(G, .)$ *se prolonge à un homomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rccl} \bar{f}: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ & n & \longmapsto & \bar{f}(n) = f(1).f(1)...f(1)(nfois) \end{array}$$

Théorème 2.1.3 *Soit* G *un groupe engendré par* n *éléments. Alors* G *est l'image épimorphe d'un groupe libre sur une partie à* n *éléments.*

Remarquons que si $(G, .)$ est un groupe arbitraire et $f : B_n \to G$ est un homomorphisme de groupes, alors les éléments $\{s_i = f(\sigma_i) : 1 \leq i \leq n-1\}$ vérifient les relations de tresses. Pour la situation inverse, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.4
Soit $G =< s_1, ..., s_{n-1} >$ *un groupe donné. Si les éléments* $\{s_i : i = 1, ..., n-1\}$ *vérifient les relations de tresses, alors il existe un unique homomorphisme de groupes* $f : B_n \to G$ *telle que* $s_i = f(\sigma_i)$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n-1\}$*.*

Démonstration.
Soit F_n le groupe libre engendré par $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq n-1\}$. D'après le Théorème 2.1.3, il existe un unique homomorphisme de groupes $\bar{f} : F_n \to G$ telle que $\bar{f}(\sigma_i) = s_i$ pour tout $i = 1, ..., n-1$. Les relations de tresses (2.1) et (2.2) permettrons à $\bar{f}$ d'induire un homomorphisme $f : B_n \to G$. f est l'homomorphisme recherché. ■

Soit $G = \mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et considérons, pour chaque i, la transposition $s_i = (i, i+1)$, où s_i permute i et $i+1$ et laissant fixe les autres éléments de $\{1, 2, ..., n\}$.

Exercice 2.1.5 *Montrer que les transpositions vérifient les relations de tresses.*

Ceci nous permet de définir un homomorphisme de groupes surjectif $\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$, appelé projection, telle que $\pi(\sigma_i) = s_i$ pour tout $i = 1, ..., n-1$.

Proposition 2.1.6 *Le groupe* B_n *est non commutatif pour* $n \geq 3$*.*

Démonstration.
Supposons que B_n est commutatif. Alors $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Il résulte que

$$s_1 s_2 = \pi(\sigma_1).\pi(\sigma_2) = \pi(\sigma_1\sigma_2) = \pi(\sigma_2\sigma_1) = s_2 s_1$$

ce qui est impossible. Donc B_n est commutatif, pour $n \geq 3$. ■

Pour tout n, on peut définir un homomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rccl} i_n : & B_n & \longrightarrow & B_{n+1} \\ & \sigma_i & \longmapsto & i_n(\sigma_i) = \sigma_i \end{array}$$

appelé inclusion naturelle (ou injection). Donc B_n peut être vu comme un sous groupe de B_{n+1}, et

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset ...$$

2.2 Tresses géométriques

Dans cette section, nous donnons une définition géométrique du groupe des tresses.

Définition 2.2.1 *On appelle tresse géométrique à n brins b la réunion de n courbes disjointes dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, appelées brins de b, reliant les points $(1,0,0), ..., (n,0,0)$ aux points $(1,0,1), ..., (n,0,1)$ et coupant en n points chaque plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ avec $t \in [0,1]$.*

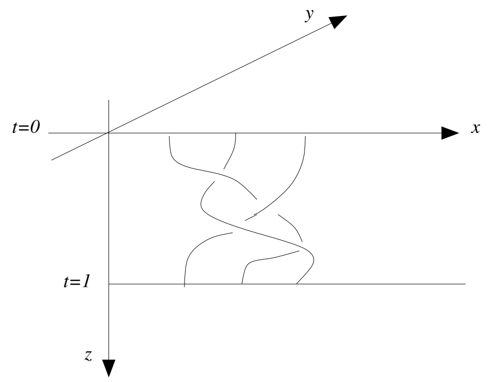

Figure 2.1 – Tresse géométrique à 3 brins

Définition 2.2.2 *Soient b et b' deux tresses géométriques à n brins. On dit qu'elles sont isotopes s'il existe une suite continue de tresses géométriques à n brins $b_s\,(s \in [0,1])$ tel que $b_0 = b$ et $b_1 = b'$. D'une manière équivalente, s'il existe une application continue $F : b \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ telle que, pour tout $s \in [0,1]$, l'application $F_s : b \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ avec $b \ni x \mapsto F(x,s)$ est un plongement son image est une tresse géométrique à n brins, $F_0 = id$ et $F_1(b) = b'$.*

Proposition 2.2.3 *La relation binaire "être isotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses géométriques à n brins.*

Définition 2.2.4 *On appelle tresse à n brins une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie. Si b est une tresse géométrique, on note sa classe d'équivalence par $[b]$.*

On note par GB_n l'ensemble des tresses à n brins.

Loi de composition sur l'ensemble des tresses

Étant donnés deux tresses géométriques b et b'. On définit le produit bb' comme étant la tresse géométrique obtenu en plaçant b' au-dessous de b et en comprimant. Plus précisément, bb' est l'ensemble des points $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ telles que $(x,y,2t) \in b$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(x,y,2t-1) \in b'$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Lemma 2.2.5 *Le produit des tresses géométriques est compatible avec la relation d'isotopie, i.e., si b_1 est isotope avec b'_1 et b_2 est isotope avec b'_2, alors b_1b_2 est isotope avec $b'_1b'_2$.*

D'après le lemme ci-dessus, le produit des tresses géométriques induit une loi de composition, appelée multiplication des tresses, dans l'ensemble des tresses à n brins donné par

$$[b].[b'] = [bb'].$$

la multiplication des tresses est associative et admet comme élément neutre la tresse triviale 1_n représenté par la tresse géométrique

$$b = (\{1, 2, ..., n\} \times \{0\}) \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 \times [0, 1].$$

Donc $(GB_n, .)$ est un monoïde. On montre plus tard que c'est un groupe isomorphe à B_n.

Diagramme de tresse

Définition 2.2.6 *Un diagramme de tresse à n brins est un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$ qui est la réunion de n courbes appelées les brins de $\mathcal{D}$ et qui vérifient les trois conditions suivantes :*

1. *Chaque brin est homéomorphe à l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par la projection $\mathbb{R} \times [0, 1] \to [0, 1]$.*
2. *Chaque point de l'ensemble $\{1, ..., n\} \times \{0, 1\}$ est l'éxtrémité d'un unique brin.*
3. *Chaque point de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ appartient à au plus deux brins. A chaque point d'intersection de deux brins qu'on appelle "point double ou de croisement", ces brins sont transverses. On indique le brin passant sous l'autre par une légère discontinuité du trait.*

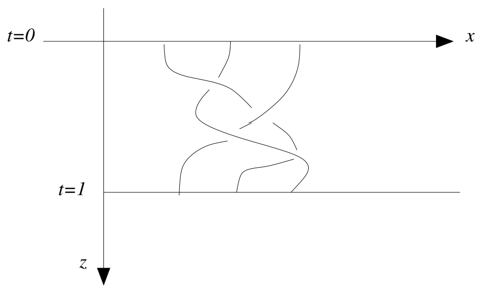

FIGURE 2.2 – Diagramme d'une tresse géométrique à 3 brins.

Remarque 2.2.7
(1) Trois brins d'un diagramme $\mathcal{D}$ ne se croisent en aucun point.
(2) Dans la condition (3), la transversabilité signifie que dans un petit voisinage du point de croisement le diagramme $\mathcal{D}$ se voie, à homéomorphisme près, comme l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
(3) La compacité des brins implique que le nombre des points de croisement de $\mathcal{D}$est fini.

Chaque diagramme de tresse $\mathcal{D}$ représente une classe d'isotopie de tresses géométriques comme suit : à chaque diagramme $\mathcal{D}$ on lui associe une tresse $\beta(\mathcal{D})$ en utilisant l'identification $\mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$. On peut supposer

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1].$$

Dans un petit voisinage d'un point double de $\mathcal{D}$ on pousse légèrement le brin dessous dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times[0,1]$ en augmentant la seconde coordonnée et en laissant fixe la première et la troisième. cela transforme $\mathcal{D}$ en une tresse géométrique à n brins. Sa classe d'isotopie est une tresse bien définie présenté par $\mathcal{D}$. On note $\beta(\mathcal{D})$ la tresse obtenue.
Il est facile de voir que chaque tresse peut être présenté par un diagramme $\mathcal{D}$ (il suffit de prendre la projection sur $\mathbb{R}\times\{0\}\times[0,1]$.

Définition 2.2.8
On définit l'isotopie et le produit dans l'ensemble des diagrammes de tresses de la même façons que dans le cas des tresses géométriques.

Il est évident que si $\mathcal{D}$ est isotope à $\mathcal{D}'$ alors $\beta(\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D}')$ et $\mathcal{D}\mathcal{D}'$ représente $\beta(\mathcal{D})\beta(\mathcal{D}')$.

Définition 2.2.9
(1) On appelle mouvements de Reidemester toute transformation de type I, II ou III comme dans la Figure 2.3.
(2) Deux diagrammes de tresses sont dits R-équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemester.

Il est clair que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont R-équivalents alors $\beta(\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D}')$.

Théorème 2.2.10 *Deux diagrammes de tresses représentent deux tresses géométriques isotopes si et seulement s'ils sont R-équivalents.*

Démonstration. Voir [3] ∎

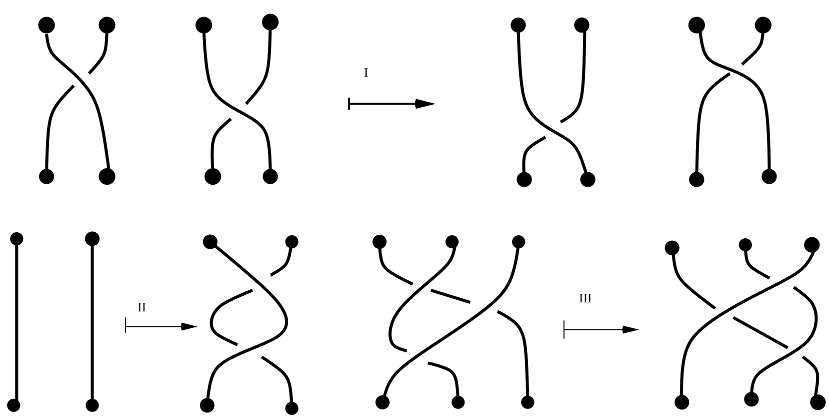

Figure 2.3 – Mouvements de Reidemeister

Le groupe GB_n

Nous montrons que l'ensemble des tresses GB_n muni de la multiplication définie avant a une structure de groupe. Pour tout $i=1,...,n-1$, nous définissons deux tresses élémentaires σ_i^+ (resp. σ_i^-) où les brins sont tous verticaux sauf pour les brins i et $i+1$ qui se croisent, le brin $i+1$ passant sur (resp. sous) le brin i, voir la Figure .. Alors GB_n est engendré, comme un monoïde, par les tresses $\sigma_1^+,\sigma_1^-,...,\sigma_{n-1}^+,\sigma_{n-1}^-$.

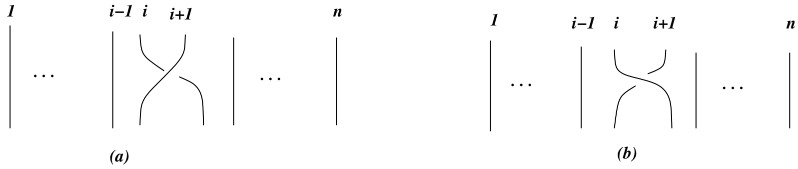

FIGURE 2.4 – (a) le générateur σ_i^+, (b) le générateur σ_i^-

Lemma 2.2.11 *Toute tresse $\sigma \in GB_n$ admet un élément inverse $\sigma^{-1} \in GB_n$.*

Démonstration. Supposons $\sigma = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1}\sigma_{i_2}^{\epsilon_2}...\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, avec $\epsilon_i = \pm$. Il est clair que $\sigma_i^+\sigma_i^- = \sigma_i^-\sigma_i^+ = 1$ pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$. Posons $\sigma^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\epsilon_k}\sigma_{i_{k-1}}^{-\epsilon_{k-1}}...\sigma_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Alors $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_n$ (avec la convention $-+ = - = +-$ et $-- = +$). ■

Corollaire 2.2.12 *GB_n a une structure de groupe.*

Lemma 2.2.13 *Les générateurs $\sigma_1^+, \sigma_2^+, ..., \sigma_{n-1}^+$ vérifient les relations de tresses.*

Démonstration.
La première relation se découle du mouvement (I). La deuxième relation se découle de (III) (puisque deux diagrammes isotopes representent la même tresse). ■

Théorème 2.2.14 *Il existe un unique homomorphime de groupes $\varphi : B_n \to GB_n$ telle que $\varphi(\sigma_i) = \sigma_i^+$, pour tout $i = 1, ..., n-1$. De plus φ est un isomorphisme.*

Démonstration.
L'existence et l'unicité de φ sont garantis par le Lemme 2.2.13 et la Proposition 2.1.4. De plus φ est surjectif car $\sigma_1^+, ..., \sigma_{n-1}^+$ engendre GB_n et ils sont dans l'image de φ. Il nous reste donc que de montrer que φ est injectif. Pour ce faire, on définit une application $\psi : GB_n \to B$ telle que $\psi \circ \varphi = id_{B_n}$.
Chaque $\sigma \in GB_n$ peut être représenter par un diagramme de tresse $\mathcal{D}$ dont les croisements ont des coordonnées seconde distinctes et

$$\sigma = \sigma(\mathcal{D}) = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1}\sigma_{i_2}^{\epsilon_2}...\sigma_{i_k}^{\epsilon_k},$$

où ϵ_j égale $+$ ou $-$ et $i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. On définit

$$\psi(\sigma) = \psi(\mathcal{D}) = (\sigma_{i_1})^{\epsilon_1}(\sigma_{i_2})^{\epsilon_2}...(\sigma_{i_k})^{\epsilon_k},$$

où

$$(\sigma_i)^+ = \sigma_i \text{ et } (\sigma_i)^- = \sigma_i^{-1}.$$

L'application ψ est correctement définie et, par construction, vérifie $\psi \circ \varphi = id_{B_n}$. ■

Groupe de tresses pures

Rappelons qu'on a définit, dans la première section, un homomorphisme de groupes π de B_n dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

Définition 2.2.15
On appelle groupe de tresses pures le noyau de la projection naturelle $\pi : B_n \to \mathcal{S}_n$. On note ce groupe par P_n et un élément de P_n sera appellée tresse pure à n brins. Donc $P_n = ker(\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n)$.

D'après la définition, une tresse géométrique à n brins représente un élément de P_n si et seulement si, pour tout $i = 1, ..., n$, le brin de cette tresse ataché au point $(i, 0, 0)$ a comme éxtrémité le point $(i, 0, 1)$.
Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on pose

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}...\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}...\sigma_{j-1}^{-1}.$$

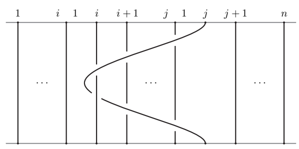

FIGURE 2.5 – La tresse pure $A_{i,j}$

Théorème 2.2.16
Le groupe P_n est engendré par $\frac{n(n-1)}{2}$ générateurs $\{A_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Les relations entre ces générateurs sont

$$A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} = \begin{cases} A_{i,j} & si\ r < s < i < j\ ou\ i < r < s < j, \\ A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} & si\ s = i, \\ A_{i,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}^{-1} & si\ r = i < s < j, \\ A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} & si\ r < i < s < j. \end{cases}$$

Théorème 2.2.17
Pour $n \geq 3$, $C(B_n) = C(P_n)$, le centre de B_n, est un groupe infini cyclique engendré par Δ_n^2, où

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-2})...(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1.$$

2.3 Espaces de configurations

Dans cette section, on donne la définition d'une tresse comme mouvements des points dans une variéte. Soit M un espace topologique et

$$M^n = M \times M \times ... \times M$$

l'espace produit de $n \geq 1$ copies de M muni de la topologie produit. On pose

$$\mathcal{F}_n(M) = \{(u_1, u_2, ..., u_n) \in M^n \quad | \quad u_i \neq u_j \quad \text{pour tout} \quad i \neq j\}.$$

Cet sous espace de M^n est appelé l'**espace de configuration** de n-uplets ordonnés de n points distincts de M.
Soit M une variété connexe de dimension $\dim(M) \geq 2$ éventuellement avec bord.

Définition 2.3.1 *On appelle* **groupe de tresses pures** *à n brins de M le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$.*

Si on prend $M = \mathbb{R}^2$ on obtient le groupe de tresses pure P_n.

Théorème 2.3.2 $P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$.

Démonstration.
Définissons une application Φ de l'ensemble des tresses géométriques pure dans l'ensemble des lacets de $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé en $q_n = ((1,0),(2,0),...,(n,0))$ comme suit : à chaque tresse géométrique pure $b \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ on associe le chemin (lacet) $\alpha : I = [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ défini par $\alpha(t) = (u_1(t),...,u_n(t))$ où le i^{em} brin de b intersecte le plan $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ au point $(u_i(t),t)$ pour tout $i = 1,...,n$. Ce chemin a comme origine et éxtrémité le point $q_n = ((1,0),(2,0),...,(n,0))$. Posons $\Phi(b) = \alpha$.
L'application Φ est bijective d'inverse l'application Ψ définie comme suit : de tout lacet $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) : I = [0,1] \to \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé en q_n, on fait associer la tresse géométrique pure

$$b = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{t\in I}(\alpha_i(t),t).$$

L'application Φ est bi-compatible avec la relation d'équivalence d'isotopie définie sur l'ensemble des tresses géométriques pure et d'homotopie définie sur l'ensemble des lacets de $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ basé en $q_n = ((1,0),(2,0),...,(n,0))$; donc b et b' sont isotopes si et seulement si $\Phi(b) = \alpha$ et $\Phi(b') = \alpha'$ sont homotopes. D'où P_n est isomorphe à $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), q_n)$. ∎

Fixons un ensemble fini de points Q_m dans l'intérieur de M, avec $m \in \mathbb{N}$. Posons

$$\mathcal{F}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_n(M - Q_m).$$

Il est claire que $\mathcal{F}_{0,n}(M) = \mathcal{F}_n(M)$ et $\mathcal{F}_{m,1}(M) = M - Q_m$.
Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ agit sur $\mathcal{F}_{m,n}(M)$ par permutation des coordonnées, i.e.,

$$\forall x,y \in \mathcal{F}_{m,n}(M), xRy \Leftrightarrow \exists\sigma \in \mathcal{S}_n : x = \sigma(y).$$

L'espace quotient

$$\mathcal{C}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_{m,n}(M)/\mathcal{S}_n = \mathcal{F}_{m,n}(M)/R.$$

est appelé l'**espace de configuration** de n-uplets non-ordonnés de n points distincts de $M - Q_m$.

Définition 2.3.3
On appelle groupe de tresses de $M - Q_m$ à n brins le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C}_{m,n}(M))$.

Théorème 2.3.4
Le groupe GB_n est isomorphe à $\pi_1(\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2), q)$ où q est le point de $\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ représenté par l'ensemble
$\{(1,0),(2,0),...,(n,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Démonstration. L'isomorphisme est défini comme suit : à chaque tresse géométrique b on associé le lacet $\alpha_b : I \longrightarrow \mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\alpha_b(t) = b_t$ où $b_t \times \{t\} = b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$. ∎

2.4 Automorphismes de tresses de groupes libres

Nous donnons la définition du groupe de tresses comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre sur n générateurs. Soit F_n un groupe libre sur $x_1, x_2, ..., x_n$.

Définition 2.4.1
On dit qu'un automorphisme φ de F_n est un automorphisme de tresses s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Il existe une permutation μ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ telle que $\varphi(x_k)$ et conjugué dans F_n à $x_{\mu(k)}$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

(ii) $\varphi(x_1x_2....x_n) = x_1x_2....x_n$.

On note l'ensemble des automorphismes de tresses de F_n par $\tilde{B}_n$. Remarquons qu'un automorphisme de F_n est totalement déterminé par son action sur les générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$. D'après la définition, il est facile de vérifier que l'inverse d'un automorphisme de tresses et la composition des automorphismes de tresses sont aussi des automorphismes de tresses. D'où on a le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 *L'ensemble $\tilde{B}_n$ muni de la composition des applications, notée multiplicativement, $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$ pour tout $\varphi, \psi \in \tilde{B}_n$, a une structure de groupe.*

Exemple 2.4.1
Pour tout $i = 1, 2, ..., n-1$, les deux automorphismes de F_n suivants

$$\tilde{\sigma}_i(x_k) = \begin{cases} x_{k+1} & si\ k = i, \\ x_k^{-1}x_{k-1}x_k & si\ k = i+1, \\ x_k & sinon. \end{cases} ;\ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = \begin{cases} x_kx_{k+1}x_k^{-1} & si\ k = i, \\ x_{k-1} & si\ k = i+1, \\ x_k & sinon. \end{cases}$$

sont des automorphismes de tresses de F_n.

Démonstration.
•$\underline{k = i}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_kx_{k+1}x_k^{-1}) = \tilde{\sigma}_i(x_k)\tilde{\sigma}_i(x_{k+1})[\tilde{\sigma}_i(x_k)]^{-1}. \\ &= x_{k+1}x_{k+1}^{-1}x_kx_{k+1}x_{k+1}^{-1} = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k+1}) = x_k. \end{aligned}$$

•$\underline{k = i+1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_{k+1}) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k^{-1}x_{k-1}x_k) = [\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)]^{-1}\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k-1})\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k). \\ &= x_{k-1}^{-1}x_{k-1}x_kx_{k-1}^{-1}x_{k-1} = x_k. \end{aligned}$$

•$\underline{k \neq i, k \neq i+1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_k) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = x_k. \end{aligned}$$

■ Rappelons la définition suivante.

Définition 2.4.3
Soient X, B deux espaces topologiques, et $P : X \to B$ une application continue. On dit que P est un fibré localement trivial de fibre F si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y, et $h : V \times F \to P^{-1}(V)$ un homéomorphisme telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times F & \xrightarrow{h} & P^{-1}(V) \\ & \searrow_{pr_1} & \downarrow P \\ & & V \end{array}$$

Il est claire que F est homéomorphe à $P^{-1}(b)$, pour tout $b \in B$.

Théorème 2.4.4
Soit M une variété connexe de dimension $dim(M) \geq 2$ éventuellement à bord. L'application $P : \mathcal{F}_{m,n}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,r}(M)$ définie par $P(u_1, u_2, ..., u_n) = (u_1, u_2, ..., u_r)$ où $1 \leq r < n$, est un fibré localement trivial de fibre $\mathcal{F}_{m+r,n-r}(M)$.

Démonstration.
Fixons un point base $u^0 = (u_1^0, ..., u_r^0)$ dans $\mathcal{F}_{m,r}(M)$, et considérons la fibre $P^{-1}(u^0) = \{(u_1^0, ..., u_r^0, y_{r+1}, ..., y_n) \in \mathcal{F}_{m,n}(M)/$

$$u_1^0, ..., u_r^0, y_{r+1}, ..., y_n \quad \text{sont distincts et dans} \quad M - Q_m\}.$$

Choisissons Q_{m+r} égale à $Q_m \cup \{u_1^0, ..., u_r^0\}$ alors, on obtient

$$\mathcal{F}_{m+r,n-r}(M) = \{(y_{r+1}, ..., y_n)/y_{r+1}, ..., y_n \quad \text{sont distincts et dans } M - Q_{m+r}\}.$$

Donc il existe un homéomorphisme

$$h : \mathcal{F}_{m+r,n-r}(M) \longrightarrow P^{-1}(u_1^0, ..., u_r^0)$$

défini par

$$h(y_{r+1}, ..., y_n) = (u_1^0, ..., u_r^0, y_{r+1}, ..., y_n).$$

Nous donnons la preuve de la trivialisation locale de P seulement dans le cas $r = 1$. Fixons un point $x_0 \in M - Q_m = \mathcal{F}_{m,1}(M) = \mathcal{F}_{m,r}(M)$. Ajoutons un autre point q_{m+1} à l'ensemble Q_m pour former Q_{m+1}. Prenons un homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ qui fixe Q_m comme ensemble (*i.e.*, $f(Q_m) = Q_m$), telle que $f(q_{m+1}) = x_0$. Soit U un voisinage de x_0 dans $M - Q_m$ homéomorphe à une boule ouverte et soit $\bar{U}$ la fermeture de U. Définissons une application continue $\theta : U \times \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ possedant les propriétés suivantes :
(i) $\theta_u : \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ définie par $\theta_u(y) = \theta(u, y)$ est un homéomorphisme qui fixe le bord $\partial\bar{U}$ point par point.
(ii) $\theta_u(u) = x_0$.
Selon (i), l'application θ se prolonge à une application, notée aussi $\theta : U \times M \longrightarrow M$, définie par

$$\theta(u, y) = \begin{cases} \theta(u, y), & \text{si } (u, y) \in U \times U \\ y, & \text{si} (u, y) \in U \times (M - U). \end{cases}$$

L'homéomorphisme recherché $\varphi : U \times \mathcal{F}_{m+1,n-1}(M) \to P^{-1}(U)$ est donné par

$$\varphi(u, u_2, ..., u_n) = (u, \theta_u^{-1}(f(u_2)), ..., \theta_u^{-1}(f(u_n))).$$

On a donc $P \circ \varphi = Pr_1$. L'homéomorphisme inverse φ^{-1} est donné par :

$$\varphi^{-1}(u, u_2, ..., u_n) = (u, f^{-1}(\theta_u(u_2)), ..., f^{-1}(\theta_u(u_n))).$$

■

Définition 2.4.5
On appelle ***homomorphisme oubliant*** *toute application $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$, pour chaque $n \geq 2$, définie comme suit : a chaque élément de P_n représenté par une tresse géométrique b, où le i^{me} brin de b relie $(i,0,0)$ à $(i,0,1)$ pour $i = 1,2,...,n$, on associé la tresse $f_n(b)$ à $n-1$ brins obtenue à partir de b en oubliant le $n^{\text{ième}}$ brin.*

L'application f_n est bien définie puisque si b et b' sont deux tresses géométriques isotopes, alors $f_n(b)$ et $f_n(b')$ sont aussi isotopes.

Proposition 2.4.6
(1) f_n est un homomorphisme de groupes.
(2) $f_n \circ i = id_{P_{n-1}}$ où i est l'inclusion naturelle $i : P_n \longrightarrow P_{n-1}$.
(3) L'homomorphisme f_n est surjectif.

Pour $n \geq 2$, on pose
$$U_n = ker(f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}).$$
Notons que f_n a une section alors, on a le resultat suivant.

Proposition 2.4.7 *P_n est isomorphe au produit semi-direct de P_{n-1} par U_n.*

Chaque tresse pure $\beta \in P_n$ peut être développer uniquement sous la forme $\beta = i(\beta')\beta_n$ avec $\beta' \in P_{n-1}$ et $\beta_n \in U_n$. Ici $\beta' = f_n(\beta)$ et $\beta_n = i(\beta')^{-1}\beta$. En appliquant ce développement inductivement, on conclut que β peut être écrite uniquement sous la forme

$$\beta = \beta_2\beta_3\beta_4...\beta_n \tag{2.3}$$

où $\beta_j \subset U_j \subset P_j \subset P_n$ pour $j = 2,3,...,n$. L'écriture (2.3) est appelée la forme *normale* de β.
Rappelons que, pour $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}...\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}...\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Alors $A_{i,n} \in U_n$ pour $i = 1,2,...n-1$.

Définition 2.4.8 *Une variété connexe M est asphérique si son revêtement universel est contractile.*

D'une façon équivalente, une variété connexe M est asphérique si ses groupes d'homotopies $\pi_i(M)$ sont triviaux pour tout $i \geq 2$.

Proposition 2.4.9
Pour tout $m \geq 0$; $n \geq 1$ la variété $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)$ est asphérique.

Démonstration.
On considère le fibré $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - Q_m$ de fibre $\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)$ défini, ci-dessus, dans la preuve du Théorème 2.4.4. La chaîne d'homotopie de ce fibré nous donne une chaîne exacte

$$... \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow ...$$

Notons que $\mathbb{R}^2 - Q_m$ se rétracte par déformation à un bouquet de m cercles. Ce bouquet de cercles est asphérique puisque son revêtement universel est un arbre et par conséquent est contractile. Donc, $\mathbb{R}^2 - Q_m$ est asphérique. Il résulte que $\pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) = 0$ pour $i \geq 2$. On conclut que pour tout $i \geq 2$,

$$\pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)).$$

Par induction, on obtient

$$\pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathcal{F}_{m+n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_{m+n-1}) = 0.$$

■

Théorème 2.4.10
Pour tout $n \geq 2$, le groupe U_n est libre sur les $(n-1)$ générateurs $\{A_{i,n}\}_{i=1,\dots n-1}$

Démonstration.
En prenant $M = \mathbb{R}^2$ dans le Théorème 2.4.4, on obtient le fibré localement trivial $P : \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ de fibre $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$. Les groupes $\pi_2(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2))$ et $\pi_0(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ sont triviaux d'après la Proposition 2.4.9 et le fait que $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$ est une variété connexe. Ceci nous donne une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{P_*} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 1 \tag{2.4}$$

Puisque $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ est isomorphe à P_n et $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2))$ est isomorphe à P_{n-1}, alors on identifie l'homomorphisme P_* avec l'homomorphisme oubliant $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$. Donc (2.4) deviendra

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow 1 \tag{2.5}$$

Pour calculer le groupe $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1})$, on prend

$$Q_{n-1} = \{(1,0),(2,0),\dots,(n-1,0)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

et on prend $a_0 = (n,0)$ comme point base de $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$. Le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$ est libre de rang $n-1$ engendré par les générateurs $x_1,\dots,x_{n-1}$ comme dans la Figure **??**. L'homomorphisme $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ dans (2.5) est induit par l'inclusion

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 - Q_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \\ a \in \mathbb{R}^2 - Q_{n-1} & \longmapsto & ((1,0),(2,0),\dots,(n-1,0),a) \end{array}$$

En comparant les Figures **??** et **??**, on observe que cet homomorphisme envoie x_i sur $A_{i,n}$ pour tout i. Finalement, la suite exacte (2.5) implique que U_n est libre sur $\{A_{i,n}\}_{i=1,\dots n-1}$.
■

Corollaire 2.4.11
Pour $i = 1,2,\dots n$, l'enlèvement du $i^{\text{ième}}$ brin définit un homomorphisme de groupes f_n^i : $P_n \longrightarrow P_{n-1}$. Le noyau de f_n^i est un groupe libre de rang $n-1$ engendré par les générateurs $A_{1,i},\dots,A_{i-1,i},A_{i,i+1},\dots,A_{i,n}$.

Théorème 2.4.12
L'application $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$ définie par $\xi(\sigma_i) = \tilde{\sigma}_i$ pour $i = 1,2,\dots,n-1$, est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.
L'image d'une tresse $\beta \in B_n$ par ξ sera notée $\tilde{\beta}$. Dans la preuve de ce théorème il est nécessaire de donner la définition explicite de $\tilde{\beta}$. Les éléments $\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_{n-1} \in \tilde{B}_n$ vérifient les relations de tresses, donc il existe un homomorphisme de groupes de B_n dans $\tilde{B}_n$ qui envoie σ_i sur $\tilde{\sigma}_i$ pour tout i. On va donner une autre définition pour cet homomorphisme : Si $\beta \in B_n$ et $u \in U_{n+1} = ker f_{n+1}$, alors $i(\beta)\ u\ i(\beta)^{-1} \in P_{n+1}$ car P_{n+1} est un sous-groupe normal de B_{n+1}. De plus, d'après la définition de f_{n+1} il résulte que $i(\beta)u\ i(\beta)^{-1} \in U_{n+1}$; par suite la formule

$$u \longmapsto \iota(\beta)u\ i(\beta)^{-1}$$

définit un automorphisme de U_{n+1}. On obtient donc un homomorphisme de groupes ξ de B_n dans le groupe, $Aut(U_{n+1})$, des automorphismes de U_{n+1}.
D'après le Théorème 2.4.10, on peut identifier U_{n+1} avec F_n en posant $x_k = A_{k,n+1} \in U_{n+1}$ pour $k = 1, 2, ...n$. Sous cette identification on a $\xi(\beta) = \tilde{\beta}$ pour tout $\beta \in B_n$. En effet, il suffit de vérifier cette égalité pour les générateurs $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ de B_n. Ceci revient à la vérification des égalités

$$i(\sigma_i)A_{k,n+1}\ i(\sigma_i)^{-1} = \begin{cases} A_{k+1,n+1} & \text{si } k = i, \\ A_{k,n+1}^{-1}A_{k-1,n+1}A_{k,n+1} & \text{si } k = i+1, \\ A_{k,n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces égalités sont vérifiées en dessinant leurs diagrammes de tresses et de vérifier que ces deux diagrammes représentent des tresses isotopes.

Montrons l'injection de l'homomorphisme $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$. Considérons une tresse $\beta \in B_n$ telle que $\tilde{\beta} = 1$; en abélianisant $\tilde{\beta}$ on obtient l'homomorphisme identique de $U_{n+1}/[U_{n+1}, U_{n+1}]$. Donc $\pi(\beta) = 1$. Ainsi $\beta \in P_n \subset B_n$. D'après la formule normale, on a $\beta = \beta_2\beta_3...\beta_n$ telle que $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ pour tout $j = 1, 2, ..., n$.
Supposons $\beta \neq 1$. Prenons le plus grand $i \leq n$ telle que $\beta_i \neq 1$. Alors $\beta = \beta_2\beta_3....\beta_i$. Comme $\tilde{\beta} = 1$, on doit avoir $\xi(\beta) = 1$. Donc $i(\beta) \in P_{n+1}$ commute avec tous les éléments de U_{n+1} et en particulier avec $A_{i,n+1}$. Notons que $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_{i-1}$ sont des tresses sur les $i-1$ brins extrêmement gauches. Donc ils commutent avec $A_{i,n+1}$. D'après le corollaire précédent, les tresses $A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, ..., A_{i,n+1}$ engendrent un sous-groupe libre de P_{n+1}. De plus, on sait que la tresse β_i commute avec $A_{i,n+1}$ et elle est dans le groupe $U_i \subset P_i \subset P_{n+1}$ qui est engendré par $A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}$. Mais ceci est possible que si $\beta_i = 1$, ce qui contradictoire avec le choix de i. Donc $\beta = 1$.

Montrons maintenant que $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$ est surjectif. Soit φ un automorphisme de tresses de F_n non-trivial. Supposons que

$$\varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1},$$

où $k = 1, 2, ..., n$ et A_k est un mot dans l'alphabet $x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}$. On peut toujours choisir A_k de sorte que le produit $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ soit un mot réduit, i.e., ne contient pas des mots de la forme $x_r x_r^{-1}$ ou $x_r^{-1} x_r$. D'après la définition de l'automorphisme de tresses, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x_1x_2...x_n) &= \varphi(x_1)\varphi(x_2)...\varphi(x_n) \\ &= A_1x_{\mu(1)}A_1^{-1}A_2x_{\mu(2)}A_2^{-1}...A_nx_{\mu(n)}A_n^{-1} \\ &= x_1x_2...x_n. \end{aligned}$$

Il résulte que

$$A_1x_{\mu(1)}A_1^{-1}A_2x_{\mu(2)}A_2^{-1}...A_nx_{\mu(n)}A_n^{-1} = x_1x_2...x_n. \tag{2.6}$$

D'abord, on appelle terme special le terme $x_{\mu(k)}$ qui apparaître au milieu de $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$. Chaque lettre $x_1, x_2, ..., x_n$ apparaitra comme terme special du côté gauche de (2.6) exactement une seule fois. L'égalité (2.6) implique que le côté gauche de (2.6) va être réduit au côté droit après toute réduction possible, i.e., simplification de $x_r x_r^{-1} = x_r^{-1} x_r = 1$. Supposons qu'un terme special $x_{\mu(k)}$ est simplifié avec une lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ pendant ces réductions ; ce $x_{\mu(k)}^{-1}$ ne peut pas être obtenu du mot $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ lequel supposé réduit. Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k-1}^{-1}, alors on doit avoir

$$A_{k-1}^{-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1}$$

pour certain mot B. Par suite

$$A_{k-1} = A_k x_{\mu(k)} B^{-1}. \tag{2.7}$$

Si la lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ qui annule le terme special $x_{\mu(k)}$ est obtenue du côté droit du terme special $x_{\mu(k+1)}$. Alors on doit avoir

$$A_{k+1}^{-1} = A_{\mu(k+1)}^{-1} A_{k+1}^{-1} A_k x_{\mu(k)}^{-1} B,$$

pour certain mot B ; puis $A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$; on pose $A = A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$. On aura

$$A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A. \tag{2.8}$$

De même, si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k+1}. On obtient

$$A_{k+1} = A_k x_{\mu(k)}^{-1} A, \tag{2.9}$$

pour certain mot A. Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient du côté gauche du terme special $x_{\mu(k-1)}^{-1}$. Alors

$$A_{k-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1} A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1};$$

où B est un mot. Donc $A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$. Posons $A = A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$. D'où

$$A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A. \tag{2.10}$$

Si les termes spéciaux du côté gauche de (2.6) ne se simplifient pas avec d'autres lettres. Alors, on doit avoir $\mu(k) = k$ pour tout k, A_1 et A_n sont des mots vides et chaque paire $A_k^{-1} A_{k+1}$ se simplifie de sorte que $A_k = A_{k+1}$ pour tout k. Donc $\varphi = id$, ce qui est impossible.

D'après ce qui précède, il existe $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et un mot A (peut être vide) dans $x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}$ satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

(a) On a une égalité des mots $A_j = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A$.

(b) On a une égalité des mots $A_{j+1} = A_j x_{\mu(j)}^{-1} A$.

Remarquons que

$$\begin{array}{lll} (a) = (2.7) & \text{pour} & j = k-1, \quad A = B^{-1} \\ (b) = (2.8) & \text{pour} & j = k \\ (b) = (2.9) & \text{pour} & j = k \\ (b) = (2.10) & \text{pour} & j = k-1 \end{array}$$

Cette condition implique que φ est dans l'image de l'homomorphisme ξ. Pour justifier cette affirmation, définissons la *longueur* de φ comme étant la somme sur $k = 1, 2, ..., n$ des longueurs des lettres des mots $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$.
Si la condition (a) est vérifiée, alors l'homomorphisme $\varphi\tilde{\sigma}_j = \varphi \circ \tilde{\sigma}_j : F_n \longrightarrow F_n$ peut être calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi\tilde{\sigma}_j(x_k) &= \varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1} \quad , \quad \text{pour } k \neq j, j+1 \\
\varphi\tilde{\sigma}_j(x_j) &= \varphi(x_{j+1}) = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1} \\
\varphi\tilde{\sigma}_j(x_{j+1}) &= \varphi(x_{j+1}^{-1} x_j x_{j+1}) \\
&= A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_j x_{\mu(j)} A_j^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1} \\
&\overset{(a)}{=} A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} \times A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A x_{\mu(j)} A^{-1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1}
\end{aligned}$$

Le mot $A_{j+1}A$ est plus court que $A_j = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A$. par conséquent, la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j$ est plus courte que celle de φ.
Si (b) est vérifiée alors, la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j^{-1}$ est plus courte que celle de φ. Ceci implique que φ peut être réduit à l'identité par en répétant la composition seulement avec $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\sigma}_j^{-1}$. Ainsi φ est un produit de puissances de $\tilde{\sigma}_j$. Par conséquent, φ est dans l'image de l'homomorphisme $\beta \longmapsto \tilde{\beta}$. ■

2.5 Groupe de difféotopies

Définition 2.5.1
Soit M une variété orienté éventuellement a bord et Q un ensemble fini de points dans l'intérieur de M. On appelle endo-homéomorphisme de (M, Q) tout homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ vérifiant :
i) $f(Q) = Q$.
ii) $\forall x \in \partial M : f(x) = x \qquad (i.e. f_{|\partial M} = id_{\partial M})$.

Remarquons que chaque endo-homéomorphisme induit une permutation sur Q. On note que si M est connexe et $\partial M \neq \emptyset$, alors tout homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ préserve l'orientation.

Définition 2.5.2
On dit que deux endo-homéomorphismes f_0, f_1 de (M, Q) sont isotopes s'il existe une famille $\{f_t\}_{t \in I}$ d'endo-homéomorphismes de (M, Q) telle que l'application

$$\begin{aligned} M \times I &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

soit continue. La famille $\{f_t\}_{t \in I}$ est appelée une isotopie de f_0 à f_1 .

Il est facile de vérifier que " être isotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des endo-homéomorphismes de (M, Q). Deux endo-homéomorphismes isotopes induisent la même permutation sur Q.

Définition 2.5.3
*On appelle **groupe de difféotopies**, noté $\mathcal{M}(M, Q)$, le groupe des classes d'équivalences des endo-homéomorphismes de (M, Q) vis-à-vis de l'isotopie, muni de la loi de composition $fg = f \circ g$ pour $f, g \in \mathcal{M}(M, Q)$. On note $\mathcal{M}(M) = \mathcal{M}(M, \emptyset)$.*

Exemple 2.5.1
Soit $D = D^n$ *une boule fermée, de dimension* $n \geq 0$*, dans* $\mathbb{R}^n$ *. Alors, on a* $\mathcal{M}(D) = \{1\}$.

Démonstration.
On peut prendre D la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On note la norme Euclidienne du vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ par $|z|$. Pour tout endo-homéomorphisme h de D, la formule suivante :

$$h_t(z) = \begin{cases} z & \text{si } t \leq |z| \leq 1 \\ th(\frac{z}{t}) & \text{si } |z| < t \end{cases}$$

définit une isotopie $\{h_t : D \longrightarrow D\}_{t \in I}$ de $h_0 = id$ à $h_1 = h$. On note que si $h(0) = 0$, alors $h_t(0) = 0$ pour tout $t \in I$.
Par conséquent, on obtient aussi $\mathcal{M}(M, \{0\}) = \{1\}$. ■

Exercices

Exercice 2.5.4 *On sait que* $B_3 =< \sigma_1, \sigma_2 / \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 >$*. Posons* $x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ *et* $y = \sigma_1\sigma_2$.
(1) Montrer que $x^2 = y^3$ *et que* $B_3 =< x, y / x^2 = y^3 >$.
(2) Montrer que $x^2 \in C(B_3)$*, le centre de* B_3.

Exercice 2.5.5 *Démontrer les égalités suivantes, en utilisant les relations d'Artin :*
(1) $(\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_1)^3$
(2) $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
(3) $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^4$

Exercice 2.5.6 *Démontrer les égalités suivantes, en utilisant les relations d'Artin :*
(1) $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$.
(2) $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.
(3 $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.

Exercice 2.5.7 ***(1)*** *Montrer que pour tout* $n > 1$*, le groupe* B_n *est engendré par les deux éléments* σ_1 *et* $\alpha = \sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}$*. (indication :* $\sigma_i = \alpha^{i-1}\sigma_1\alpha^{1-i}$*).*
(2) *Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes* $f : B_n \to \mathbb{Z}$ *tel que* $f(\sigma_i) = 1$*, pour tout* $i = 1, ..., n-1$*. Montrer que* f *induit un isomorphisme de* $B_n/[B_n, B_n]$ *dans* $\mathbb{Z}$.

Bibliographie

[1] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies 82, 1974.

[2] , *Braids : A survey* in Handbook of Knots Theory, 19-103, Elsevier B.V. Amsterdam, 2005.

[3] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics 247, Springer-Verlag, 2008.