Chapter 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

2.1 Position du problémes :

Soit à résoudre le système d'équations différentiélles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + \ a_{1n}x_n. \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + \ a_{2n}x_n. \\ \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + \ a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

où a_{ij} sont des constantes, $x_i(t)$ sont des fonction inconnues de t

Le système (1) est appelé système d'équations différentélles homogènes à coefficients constants

Pour résourdre ce système, on recherche une solution particulière du système sous la forme

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt}, ..., \ x_n = \alpha_n e^{kt} \tag{2}$$

2.2 Calcul des coefficients α_i et de la constante k :

$x_1, x_2, ..., x_n$ sont des solutions du système (1), ce dernier peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n)e^{kt} \\ k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n)e^{kt} \\ & . \\ & . \\ k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n)e^{kt} \end{cases}$$

$$(a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + \ a_{1n}\alpha_n = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + ... + \ a_{2n}\alpha_n &= 0 \\ &. \\ &. \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + \ (a_{nn} - k)\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Afin de résoudre le système (3), on calcule le déterminant de ce dernier donné par

$$\triangle(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-k \end{vmatrix} \tag{5}$$

— Si k est tel que $\triangle(k) \neq 0$, le système (3) admet une seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Par conséquant le système (2) donne des solutions triviales :

$$x_1(t) = x_2(t) = ... = x_n(t) = 0$$

.

— Par ailleurs, pour obtenir des solutions non triviales du système (2), il faut que : $\triangle(k) = 0$.

cependant , le système (3) n'a de solution non nulle que si le déterminant

$$\triangle(k) = 0 \tag{6}$$

Le calcul de ce déterminant donne une équation de degré n de type :

$$\triangle(k) = k^n + A_1 k^{n-1} + A_2 k^{n-2} + ... + A_n = 0 \tag{7}$$

dont les racines soit $k_1, k_{2,}....., k_n$

L'équations (5) est dite " équation caractéristique " du système (1) . Sous racines sont appellées "racines de l'équation caractéristique" .

On substitut chaque racine k_i dans le système (3) et on détermine les coefficients $\alpha_1^{(i)} = \alpha_2^{(i)} = ... = \alpha_n^{(i)}$ relatif à cette racine .

Remarque :

Ces coefficients sont définis à une constante multiplicative commune que l'on peut toujours choisir l'un des coefficients égal à 1 .

2.3 Etude de quelques cas

2.3.1 Les racines sont réelles est distinctes

Pour chaque racine k_i, écrivant le système (3) et déterminant les coefficients $\alpha_1^{(i)} = \alpha_2^{(i)} = ... = \alpha_n^{(i)}$ correspondants

On obtient alors les solutions du système (1) .

Pour k_1 : $x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, ..., x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t}$.

Pour k_2 : $x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, ..., x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t}$.

.

.

Pour k_n : $x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, ..., x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}$.

La solution générale du système (1) est une combinaison linéaire quelconque des solutions partculières précédentes .

$$
\begin{cases}
x_1 & = c_1 x_1^{(1)} + c_2 x_1^{(2)} + \ldots.. + \ c_n x_1^{(n)} \\
x_2 & = c_1 x_2^{(1)} + c_2 x_2^{(2)} + \ldots.. + \ c_n x_2^{(n)} \\
 & . \\
 & . \\
x_n & = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)} + \ldots.. + \ c_n x_n^{(n)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots.. + c_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}. \\
x_2 &= c_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots.. + c_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}. \\
&. \\
&. \\
x_n &= c_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + c_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots.. + c_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

où $c_1, c_2, \ldots.., c_n$ sont des constantes arbitraires. Elles peuvent être calculer à partir des conditions initiales .

Exercice :

Déterminer la solution générale du système :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + 2x_2 1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 3x_2
\end{aligned} \tag{9}
$$

Puis la solution particulière telle que : $t = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

Solution :

on pose : $x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt} \Leftrightarrow \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 k e^{kt}, \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 k e^{kt}$
le système (1) devient :

$$
\begin{aligned}
(2-k)\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0.2 \\
\alpha_1 + (3-k)\alpha_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

on résoud le système (2) :

$$
\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-k)(3-k) - 2 = 0
$$
$$
\Leftrightarrow k^2 - 5k + 4 = 0
$$
$$
\triangle = 25 - 16 = 9
$$

$$k_1 = \frac{5-3}{2} = 1, \qquad k_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$
$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t, \qquad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t$$
$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \qquad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}$$

Calcul des $\alpha_i^{(j)}$

- Pour $k_1 = 1$:

On remplace dans l'une des deux équation du système (2)

$$\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$$

on pose $\alpha_1^{(1)} = 1 \Longrightarrow \alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$.
d'où $x_1^{(1)} = e^t \quad , x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}e^t$.

- Pour $k_2 = 4$:

$-2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \Longrightarrow \alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = 1$. (on pose $\alpha_1^{(2)} = 1$).

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t}$$

La solutions générale du système est alors

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^t + c_2 e^{4t} 3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{aligned} \tag{11}$$

Solution particulière :

$$t = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

on rempace dans (3)

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2. \\ 2 = -\frac{c_1}{2} + c_2. \end{cases} \Longrightarrow -1 = \frac{3}{2}c_1 \Longrightarrow c_1 = -\frac{2}{3}$$

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Longrightarrow c_2 = \frac{5}{3}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{3} e^t + \frac{5}{3} e^{4t} \\ x_2 &= -\frac{1}{3} e^t + \frac{5}{3} e^{4t} \end{aligned}$$

2.3.2 Les racines sont distinctes, mais certaines sont complèxes :

Supposant que parmi les racines de l'équation caractéristique existent deut racines complèxes conjuguées .

$$k_1 = a + ib, \; k_2 = a - ib.$$

A ces racines corespondent les solutions

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(a+ib)t}$$
$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(a-ib)t}$$

Les coefficientf $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$ sont déterminés à partir du systèmes (3)

Les parties réelles et imaginaires de la solution sont aussi des solutions. On obtient ainsi deux solutions particulières :

$$\begin{aligned} \bar{x}_j^{(1)} &= e^{at}\left(\beta_j^{(1)} \cos bx + \beta_j^{(2)} \sin bx \right) \\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{at}\left(\gamma_j^{(1)} \cos bx + \gamma_j^{(2)} \sin bx \right) \end{aligned} \tag{12}$$

$\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}$ sont des coefficient réels définis au moyen de $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$

Des combinaisons linéaires de (8) entrent alors dans la solution générale du système

Exercice :

Trouver la solution générale du système :

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2.$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2.$$

Solution :

$$\begin{cases} (-7-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \Longrightarrow \triangle \begin{vmatrix} (-7-k) & 1 \\ -2 & (-5-k) \end{vmatrix} = 0. \\ -2\alpha_1 + (-5-k)\alpha_2 = 0 \\ k^2 + 12k + 37 = 0 \quad \text{(eqt caractéristique)} \end{cases}$$

Solution de l'équation caractéristique :

$$\triangle = 36 - 37 = -1 = i^2 \quad \begin{cases} k_1 = -6 + i \\ k_2 = -6 - i \end{cases}$$

- Pour $\quad k_1 = -6 + i$:

$$\begin{cases}(-7+6-i)\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0. & \Longrightarrow \alpha_2^{(1)}=(1+i)\alpha_1^{(1)}\\ 2\alpha_1^{(1)}+(-5+6-i)\alpha_2^{(1)}=0. & \end{cases}$$

on pose : $\alpha_1^{(1)}=1 \Leftrightarrow \alpha_2^{(1)}=1+i$.

$$x_1^{(1)}=e^{(-6+i)t}, \qquad x_2^{(1)}=(1+i)e^{(-6+i)t}$$

- Pour $k_2=-6-i$:

$$\begin{cases}(-7+6+i)\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}=0 & \Longrightarrow \alpha_2^{(2)}=(1-i)\alpha_1^{(2)}\\ 2\alpha_1^{(2)}+(-5+6+i)\alpha_2^{(2)}=0 & \end{cases}$$

on pose : $\alpha_1^{(2)}=1 \Leftrightarrow \alpha_2^{(2)}=1-i$.

$$x_1^{(2)}=e-^{(6+i)t}, \qquad x_2^{(2)}=(1-i)e^{-(6+i)t}$$

d'où

$$\begin{cases}x_1 & =c_1e^{(-6+i)t}+c_2e^{-(6+i)t}\\ x_2 & =c_1(1+i)e^{-(6+i)t}+c_2(1-i)e^{-(6+i)t}\end{cases}$$

on peut aussi remplacer les deux solutions particulières par leurs parties réelles et imaginaires séparément :

$$\begin{aligned}&x_1^{(1)}=e^{-bt}(\cos t+i\sin t), && x_1^{(2)}=e^{-bt}(\cos t-i\sin t)\\ &x_2^{(1)}=(1+i)e^{-bt}(\cos t+i\sin t)=e^{-bt}[(\cos t-i\sin t)\ +i(\cos t-i\sin t)]\\ &x_2^{(2)}=(1-i)e^{-bt}(\cos t-i\sin t)=e^{-bt}[(\cos t-i\sin t)\ -i(\cos t+i\sin t)]\end{aligned}$$