Table des matières

INTRODUCTION

Les premiers éléments de la fiabilité datent de la seconde guerre mondiale et proviennent du domaine militaire. Depuis les méthodes se sont multipliées en fonction des secteurs économiques. Les auteurs font l'étude systématique des probabilités d'apparition de tous les scénarios catastrophes possibles.

L'aspect mathématique de la fiabilité est ainsi très étroitement associé au choix de la modélisation technologique du système étudié. Le fiabiliste intervient également lors du fonctionnement du système, l'observation de l'évolutions des pannes d'un système permet d'avoir des informations sur les lois de probabilités des différentes défaillances.

Du point de vue des mesures de fiabilité, on distingue deux sortes de systèmes : les systèmes réparables ou récupérables destinés à fonctionné longtemps et à effectuer un grand nombre de mission successives et les systèmes non réparables ou non-récupérables destinés à ne fonctionner q'une seule fois.

Si nous voulons tenir compte des réparations pour évaluer les durées de bon fonctionnement du système, la modélisation la plus simple (dite markovienne), consiste à suppose l' ≪ oubli du passé ≫ lors de chaque modification physique du système, par exemple, le cas d'un système formé de composants identiques en redondance passive : un élément fonctionne lorsque il tombe en panne, on le répare, alors qu'un élément de secours est mis en service le taux de panne et de réparation sont constants et correspondent à λ et μ.

La modélisation markovienne a cependant un inconvénient major qui est l'hypothèse de base de perte de mémoire. Dans le cas réaliste, il faut pouvoir prendre en compte des durées de réparation et de commutation dont les lois sont loin d'être exponentielles , cela nous conduit à introduire la notion de modèle semi-markovien ou non-markovien.

La théorie mathématique de fiabilité des systèmes modélise les différents aspects de la sûreté de fonctionnement. **Fiabilité** si l'on s'intéresse à la date de la panne. **Maintenabilité** si l'on s'intéresse à la facilité de réparation. **Disponibilité** si l'on souhaite mesurer le bon fonctionnement à un moment précis.

L'évaluation de ces caractéristiques relève essentiellement du calcul des probabilités et de la statistique. Lorsqu'on observe suffisamment de pannes sur le système, il suffit d'appliquer les méthodes statistiques classiques. C'est le cas des automobiles pour lesquelles il est facile de collecter un grand nombre d'observations de panne. Mais ce n'est heureusement pas le cas pour la plupart des grands systèmes fortement réparables (aéronautique, nucléaire, etc.). Il faut alors pouvoir en modéliser le comportement avec, comme seules informations : la qualité des composants élémentaires, la structure du système et les procédures de réparation. Si la théorie des probabilités élémentaires suffit à l'étude des durées de vie d'un composant, nous devons faire appel à la théorie des processus stochastiques pour analyser la vie d'un système formé de plusieurs composants.

Considérant que les équipements et les systèmes complexes sont généralement réparables. Le but de la fiabilité est de développer des méthodes et des outils pour évaluer la fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité et la sécurité des composants, des équipements et des systèmes, ainsi que pour soutenir le développement déconstruction de ces caractéristiques dans la production.

Jusqu'aux années soixante, les objectifs de la qualité ont été considérées comme ayant été atteint lorsque l'élément considéré a été trouvé exempt des défauts ou des défaillances systématiques au moment où il a été fabriqué. La complexité croissante des équipements et systèmes, ainsi que le coût encouru par l'augmentation rapide de la perte de fonctionnement à la suite d'échecs, ont mis en avant les aspects de la fiabilité, de la maintenabilité, disponibilité, et de sécurité. L'attente aujourd'hui, c'est que les équipement et les systèmes complexe sont non seulement exempts de défauts et défaillances systématiques au temps $t = 0$ (quand ils sont mis en service), mais aussi de réaliser l'accomplission de la fonction requise gratuit pour un intervalle de temps donné et avoir un comportement **fail-safe** en cas de critique ou défaillances catastrophiques. Cependant, la question de savoir si un élément donné fonctionnera sans défaillances pendant une période donnée de temps ne peut pas être tout simplement répondu par oui ou non, sur la base d'un test de conformité. L'expérience montre que seule une probabilité pour cet événement peut être donnée. Cette probabilité est une mesure de la fiabilité et peut être interprété comme suit :

Si n composants statistiquement identiques et indépendants sont mis en service à l'instant $t = 0$ pour effectuer une mission donnée et $k \leq n$ d'entre eux l'accomplir avec succès, alors le rapport k/n est une variable aléatoire qui converge lorsque n augmente à la valeur réelle de la fiabilité.

FIABILITE

La fiabilité est une caractéristique de l'objet, exprimée par la probabilité qu'il remplir sa fonction requise dans des conditions données, pendant un intervalle de temps donné.

Il est généralement désigné par R. D'un point de vue qualitatif, la fiabilité peut être définie comme étant la capacité de l'élément à rester fonctionnel. Quantitativement, la fiabilité spécifie la probabilité que sans interruptions opérationnelles auront lieu au cours d'un énoncé intervalle de temps. Cela ne signifie pas que les parties redondantes peuvent pas échouer, ces pièces peuvent échouer et être réparé. le concept de fiabilité s'applique donc à non-repairable ainsi que les éléments réparables.

Pour donner un sens, un aspect numérique de fiabilité (par exemple $R = 0.9$) celle ci doit être accompagnée par la définition de la fonction requise, les conditions de fonctionnement et la durée de la mission. En général, il est également important de savoir si oui ou non l'élément peut être considéré comme neuf si la mission commence.

Un élément est une unité fonctionnelle ou structurelle de complexité arbitraire (par exemple, composant, Ensemble, sous-système, système) qui peut être considéré comme une entité pour enquêtes) Il peut s'agir de matériel, de logiciels, ou les deux, et peut également inclure des ressources humaines. Souvent, les aspects humains idéales et le soutien logistique sont pris en charge, (pour simplifier) le système d'expression peut être utilisé à la place d'un système technique.

La définition la mission nécessaire est le point de départ de toute analyse de la fiabilité, car elle définit les échecs.

Les conditions d'exploitation ont une influence importante sur la fiabilité, et doit être donc préciser avec soin. L'expérience montre par exemple, que le taux de défaillance des dispositifs semi-conducteur vont doubler pour l'augmentation de la température de fonctionnement de 10 à $20° C$.

La fonction souhaitée et / ou les conditions de fonctionnement peuvent dépendre du temps.

Dans ce cas, un profil de mission doit être définie et tous les grandeurs de la fiabilité qui lui sont liées. Un profil objectif représentant de la mission et la fiabilité correspondant devraient être donnés dans les caractéristiques de l'élément.

Souvent, la durée de la mission est considérée comme un paramètre du temps, la fonction de la fiabilité est alors défini par $R(t)$. $R(t)$ est la probabilité qu'aucune défaillance de l'élément sera survenir dans l'intervalle $(0, t]$. l'étatde l'élément à $t = 0$ (nouveaux ou non) a des influences suer le résultat finale.

Une distinction entre prévu et estimé ou évalué la fiabilité est importante. Le premier est calculé sur la base de la structure de la fiabilité de l'élément et le taux de défaillance de ses composants, le second est obtenue à partir d'une évaluation statistique des tests de fiabilité ou de données de terrain connues sous conditions environnementales et d'exploitation.

Chapitre 1

FIABILITE DES SYSTEMES

1. LES SYSTEMES

Déinition 1..1. *Un système est une combinaison d'éléments interconnect és ou en interaction formant un ensemble complet destiné à remplir une ou plusieurs fonctions précise..*

Déinition 1..2. *FIABILITE DES SYSTEMES*
On appelle fiabilité $R(t)$ d'un système S devant accomplir une mission dans des conditions données laprobabilité que le système S n'ait eu aucune dé faillance entre les instants 0 et t. On appelle disponibilité $A(t)$ la probabilité que le système S fonctionne à l'instant t . On a donc : $R(t) = P(S$ non dé faillant sur $[0, t])$, $A(t) = P(S$ non défaillant à l'instant t.

Déinition 1..3. *maintenabilité*
On appelle maintenabilité M(t) d'un système réparable S la probabilité pour que le système S soit réparé avant l'instant t sachant qu'il est défaillant à l'instant 0. On a donc : $M(t) = 1-P(S$ non réparé sur $[0, t])$

La maintenabilité est une fonction croissante de 0 à 1 lorsque t varie de 0 àl'infini.

Si T représente la variable aléatoire mesurant la durée de bon fonctionnement du système, on peut écrire :

$$R(t) = P(T > t) \tag{1}$$

D'autres fonctions peuvent être déterminées à partir de $R(t)$ par exemple $F(t) = 1-R(t)$: la fonction complémentaire de la fiabilité définie par la probabilité qu'un composant soit défaillant entre t_0 et t

On introduit également les taux instantanés de défaillance et de réparation $\lambda(t)$ et $\mu(t)$

La fiabilité (resp. la maintenabilité) s'exprime en fonction du taux instantané de défaillance (resp. de réparation) et vice versa.

Par ailleurs, le taux de défaillance $\lambda(t)$ permet d'estimer la probabilité conditionnelle qu'une défaillance se produise sur le composant élémentaire pendant un temps δt'a l'instant t, en sachant que le composant n'a pas eu de défaillance sur $[t_0, t]$ [Cox, 1962][Villemeur, 1988].

Puisque nous allons utiliser ces grandeurs dans les calculs de la suite du travail, nous exposons ces concepts d'une manière plus détaillée.

Soit T une variable aléatoire mesurant la durée de fonctionnement du composant avant défaillance (ou également la dur'ee de vie pour les composants non réparables).

Sachant qu'une variable aléatoire est définie par sa fonction de répartition et par sa densité de probabilité.

Nous supposerons dans la suite que T admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, presque partout continue. Cette densité vaut presque partout :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{2}$$

Si U est la variable aléatoire représentant la durée de réparation du système, on a :

$$M(t) = P(U \leq t) \tag{3}$$

$M(t)$ est la fonction de répartition de U. Nous supposerons que U admet une densité g parrapport à lamesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, presque partout continue. Cette densité vaut presque partout :

$$g(t) = \frac{dM(t)}{dt} \tag{4}$$

$F(t) = P[T \leq t]$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Elle possède lespropriétés suivantes :

$\lim_{t\to 0} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty F(t)=1.}$

$F(t)$ est non décroissante. $0 \leq F(t) \leq 1$.

$f(t)$ est la densité de probabilité de T (ou fonction de distribution) :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du. \tag{5}$$

$f(t)dt$ est la probabilité pour que T soit compris entre t et $t + \delta t$.

Rappelons que par définition :

$R(t) = P[T > t] et F(t) = 1 - R(t)$, par conséquence, la fonction complémentaire de la fiabilité (défiabilité) $F(t)$ est la fonction de répartition de T et $R(0) = 1, R(\infty) = 0$.

D'après la définition précédente, nous pouvons écrire le taux de défaillance $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} P[t < T \leq t + \delta t | T > t]$$

Nous pouvons l'écrire également :

$$\lambda(t)dt = P[t < T \leq t + dt | T > t]$$

D'après le théorème des probabilités conditionnelles, l'équation devient :

$$\lambda(t)dt = \frac{P[t < T \leq t + dt \cap T > t]}{P[T > t]} \tag{6}$$

Sachant que $T > t$ est inclus dans l'événement $t < T \leq t + \delta t$ donc

$$P[t < T \leq t + dt \cap T > t] \tag{7}$$

$$= P[t < T \leq t + dt] = f(t)dt = -\frac{dR(t)/dt}{dt} \tag{8}$$

Notons que $R(t) = P[T > t]$.

Nous pouvons en déduire, une relation entre le taux de défaillance et la fiabilité, en tout point de continuité, des densités on a les relations :

$$\lambda(t) = -\frac{dR(t)/dt}{dt} \qquad , \quad avec \quad \lambda(t_0) \ = 0 \tag{9}$$

En intégrant les deux membres de 0'a t, sachant que $R(0) = 1$:

$$R(t) = \exp - \left\{ \int_0^t \lambda(t).dt \right\} \tag{10}$$

$$\mu(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} P[t < U \leq t + \delta t | U > t] \tag{11}$$

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - M(t)} \frac{dM(t)/dt}{1 - M(t)} \qquad | \qquad t_0 = 0 \tag{12}$$

$$M(t) = 1 - \exp\left\{ - \int_0^t \mu(t).dt \right\} \tag{13}$$

Comme l'indique la courbe en baignoire de la figure (1.7), le taux de défaillance est dépendant du temps sur toute la durée de vie du composant élémentaire. Durant la période de jeunesse, les pannes nombreuses du début diminuent avec le temps contrairement à la période de vieillissement où le nombre de pannes s'accroît sans cesse. La période la plus importante est la période de vie utile durant laquelle le nombre de pannes est le plus faible. Pour simplifier les calculs, il est communément admis pendant la période de vie utile que le taux de défaillance soit approximé par une constante appelée λ.

Sinon, le problème posé est de modéliser ces grandeurs par des lois de probabilité connues.

En effet, il existe plusieurs lois, à titre d'exemple la loi exponentielle, la loi normale, la loi log-normale, la loi de Weibull et la loi Gamma.

Sous l'hypothèse que la distribution des durées de vie est représentée par une loi exponentielle, la fiabilité peut être exprimée comme suit :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \tag{14}$$

La figure (1.8) présente la courbe $R(t)$ en fonction du temps t avec λ constant.

Notons que la loi exponentielle représente correctement la fonction de distribution lorsque :

- Les défaillances sont indépendantes.

- Le taux de défaillance est constant.

Elle est caractérisée par les relations suivantes :

$\lambda(t) = \lambda = constant$

$R(t) = e^{-.\lambda t}$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda . t}$

$f(t) = \lambda e^{-.\lambda t}$

Nous avons choisi la loi exponentielle de part sa simplicité d'utilisation car elle ne fait pas intervenir trop de paramètres, mais les autres lois peuvent être utilisées si les paramètres de ces lois sont disponibles.

1.1 MTTF

Un autre indicateur de fiabilité est le MTTF (de l'anglais, Mean Time To Failure) qui représente une estimation du temps moyen de fonctionnement avant la première défaillance, ce temps a un rôle important en fiabilité, il est souvent pris comme un indicateur permettant la comparaison des fiabilités des systèmes fournis par un constructeur.

On sait que si T admet un premier moment alors le Il est défini par : MTTF

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \tag{15}$$

Le MTTF est calculé par la surface délimitée par $R(t)$

Dans le cas d'une distribution exponentielle, lorsque le taux de défaillance est constant, le temps moyen de fonctionnement MTTF est égal à $\frac{1}{\lambda}$ et il correspond à une probabilité de fonctionnement de $\frac{1}{e} \simeq 0.367$. Lecomposant a donc environ 36.7% de chances pour fonctionner correctement au bout du temps MTTF.

Précédemment, nous avons présenté des paramètres caractérisant la fiabilité d'un composant élémentaire, dans ce qui suit, nous allons étudier la fiabilité des systèmes qui contiennent plusieurs composants.

1.2 MTTR

Si le temps moyen de réparation est fini, on a alors :

$$MTTR = \int_0^{\infty} (1 - M(t))\, dt \tag{16}$$

2. Fiabilité des systèmes

Dans le cas des systèmes multi composants la défaillance du système dépend de la défaillance d'un certain nombre de composants suivant la structure du système. Pour calculer la fiabilité d'un système, son taux de défaillance et son MTTF à partir des propriétés de ses composants (fiabilité, taux de dé faillance et MTTF), il faut définir la structure de propagation des défaillances dans le système.

En fiabilité, deux types de systèmes sont à distinguer les systèmes ayant une structure élémentaire

et ceux ayant une structure complexe. Une structure élémentaire contient des composants indépendants en série ou en parallèle ou toutes combinaisons possibles de ces deux cas. Un système pouvant être décomposé en plusieurs modules à structure élémentaire est considéré comme système simple ou compliqué si sa taille est très importante. À l'inverse nous parlons de systèmes complexes quand le système n'est pas constitué de structure élementaire et si les composants ne sont pas indépendants.

L'exemple suivant illustre le diagramme de fiabilité d'un système à structure élémentaire (Fig.1.9) et le diagramme de fiabilité d'un système à structure complexe (Fig. 1.10) (dans ce cas la fonction de structure ne peut pas être factorisée).

Nous ne présentons dans la suite de ce paragraphe que les structures élémentaires série et parallèle, pour les structures complexes, nous renvoyons le lecteur à [Pagès et Gondran, 1980] pour plus de détails.

Nous présentons le cas des composants en série et le cas des composants en parallèle. Composants en série

Soit un système S constitué de $n$composants C_i en série, $i = 1...n$.

La fiabilité du système est :

$$R_{sys}(t) = \Pi_1^n R_i(t) \tag{17}$$

avec $R_i(t)$ la fiabilité du composant C_i

Composants en parallèle

Soit un système S constitué de $n$composants C_i en parallèle,

La fiabilité du système est :

$$R_{sys}(t) = 1-(1 - \Pi_1^n R_i(t)) \tag{18}$$

avec $R_i(t)$la fiabilité du composant C_i

2.1 Certaines distributions usuelles utilisées en fiabilité

Distribution binomiale

La distribution binomiale est l'une des variables aléatoires discrètes les plus utilisées distributions en fiabilité et contrôle qualité. Il a des applications en fiabilité l'ingénierie, par exemple, quand on fait face à une situation dans laquelle un événement est soit un succès ou un échec.

la distribution est donnée par :

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, ..., n$$

telle que :

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

où n = nombre d'essais ; x = nombre de succès ; p = probabilité d'essai unique de Succès.

La fonction de fiabilité $R(k)$ est donnée par :

$$R(k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Distribution de Poisson

Distribution de Poisson est utilisé pour traiter des événements dans lesquels la taille de l'échantillon est inconnue. Il s'agit également d'une distribution de variable aléatoire discrète est donné par :

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x \exp(-\lambda t)}{x!} \qquad pour\ x = 0, 1, 2, ...$$

où λ = taux d'échec constant, $P(X = x)$ est la probabilité d'exactement x échecs se produisant au temps t.

La fonction de fiabilité $R(k)$ est donnée par :

$$R(k) = \sum_{x=0}^{k} \frac{(\lambda t)^x \exp(-\lambda t)}{x!}$$

Distribution exponentielle

La distribution exponentielle joue un rôle essentiel dans l'ingénierie de la fiabilité car elle à un taux d'échec constant.

la fonction de densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{-t}{\theta}\right) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad \forall t \geq 0$$

La fonction de fiabilité $R(t)$ est donnée par :

$$R(t) = \exp\left(\frac{-t}{\theta}\right) = \exp(-\lambda t)$$

où $\theta = 1/\lambda > 0$ est un paramètre du $MTTF$ et $\lambda \geq 0$ est un taux d'échec constant.

La fonction de risque ou le taux d'échec de la fonction de densité exponentielle est constante, c'est-à-dire :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)} = \frac{1}{\theta} = \lambda$$

Nous allons maintenant discuter de certaines propriétés de la distribution exponentielle qui sont utile pour comprendre ses caractéristiques, quand et où il peut être appliqué

proprieté 2..1. *(Propriété sans mémoire)*
La distribution exponentielle est la seule distribution continue satisfaisante

$$P\{T \geq t\} = P\{T \geq t + s \mid T \geq s\} \quad \textit{pour } t > 0, s > 0$$

Ce résultat indique que la fonction de fiabilité conditionnelle pour la durée de vie d'un composant qui a survécu au temps s est identique à celui d'un nouveau composant.

Ce terme est l'hypothèse dite utilisée comme bonne comme nouvelle .

La durée de vie d'un fusible dans un système de distribution éléctrique peut être supposée ont une distribution exponentielle. Il échouera en cas de surtension provoquant le fusible à griller. En supposant que le fusible ne subit aucune dégradation pendant temps et que les surtensions qui provoquent une panne sont susceptibles de se produire également au fil du temps, alors l'utilisation de la distribution de durée de vie exponentielle est appropriée, et un fusible utilisé qui n'a pas échoué est comme neuf.

Distribution normale

La distribution normale joue un rôle important dans les statistiques classiques en raison de la Théorème de la limite centrale sa densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 \quad -\infty < t < \infty$$

et sa fonction de répartitoin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 ds$$

La fonction de fiabilité est :

$$R(t) = F(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 ds$$

Distribution de Weibull

La distribution de Weibull (Weibull 1951) est une généralisation de la distribution exponentielle et est couramment utilisé pour représenter la résistance à la fatigue, la balle durée de vie des roulements et durée de vie du tube à vide. La fonction de densité de probabilité est :

$$f(t) = \frac{\beta (t-\gamma)^{\beta-1}}{\theta^\beta} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^\beta\right), \quad t \geq \gamma \geq 0$$

où θ et β sont respectivement appelés paramètres d'échelle et de forme et γ est appelé paramètre d'emplacement. Ces paramètres sont toujours positifs. En utilisant différents paramètres, cette distribution peut suivre la distribution exponentielle, la distribution normale, etc. Il est clair que, pour $t \geq \gamma$, la fonction de fiabilité $R(t)$ est :

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^\beta\right) \qquad \text{pour } t > \gamma > 0,\ \beta > 0, \theta\ > 0$$

Par conséquent :

$$h(t) = \frac{\beta (t-\gamma)^{\beta-1}}{\theta^\beta} \qquad t > \gamma > 0,\ \beta > 0, \theta\ > 0$$

On peut montrer que la fonction de danger diminue pour $\beta < 1$,augmentant pour $\beta > 1$, et constant lorsque $\beta = 1$.

2.2 Systèmes multi-composants

Le système en série

La configuration du système en série à n composants est représentée par :

image/fig4.png

Figure 1.1 – Système en série

Système en série est le fonctionnement fonctionnel du système dépend de la bon fonctionnement de tous les composants du système. Un système comportant n unités est dit être en un système en série si la défaillance d'une unité arbitraire provoquer toute la défaillance du système.
La fiabilité d'un système en série à n composants est donnée par :

$$\begin{aligned}
R_{sys}(t) &= P(T>t) \\
&= P(\min\{T_1,T_2,\cdots,T_n>t\}) \\
&= P(T_1>t,T_2>t,\cdots,T_n>t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(T_i>t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} R_i(t)
\end{aligned}$$

la fonction de structure du ce système est donnée par :

$$\Phi(x)=\prod_{i=1}^{n} X_i$$

Example 2..1. ***Si les composants non identique :***
soit un poste de radio constitué de 4 composants en série : une alimentation $R_A = 0.95$, une partie récepteur $R_B = 0.92$, un amplificateur $R_C = 0.97$ et un haut-parleur $R_D = 0.89$.

La fiabilité R_S de l'appareil est :

$$R_S = R_A.R_B.R_C.R_D = 0.7545$$

Si les composants identique *soit une imprimante constitué de 2000 composants montés en série, supposés tous de même fiabilité, trés élevée, R=0.9999.*

La fiabilité de l'appareil est :

$$R_S = R^n = 0.9999^{2000} = 0.8187$$

Système en parallèle

La configuration du système parallèle à n composants est représentée par :

image/fig5.png

Figure 1.2 – Système en parallèle

un système en parallèle si le système est suffisant pour faire le travail en fonctionnant d'au moins une unité dans ce système, car toutes les unités du système sont connectées en parallèle, c-à-d : la défaillance du système se produit uniquement lorsque toutes les unités du système en parallèle tombent en panne.

Soit $R_i(t)$ et T_i la fiabilité du i$^{\text{ème}}$ composant et la durée de vie de la i$^{\text{ème}}$ unié au temps t respectivement, la fiabilité du ce système est obtenu par :

$$
\begin{aligned}
R_{sys}(t) &= P\left(T > t\right) \\
&= P\left(\max\left(T_1, T_2, \cdots, T_n\right) > t\right) \\
&= 1 - P\left(T_1 < t, T_2 < t, \cdots, T_n < t\right) \\
&= 1 - \left[\left(1 - R_1\left(t\right)\right).\left(1 - R_2\left(t\right)\right).\cdots.\left(1 - R_n\left(t\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Si les unités fonctionnent indépendamment, alors

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)]$$

La fonction de structure du ce système est donnée par :

$$\Phi(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)$$

Example 2..2.

soit un dispositif se compose de 4 composants connectés en paralléle dont les fiabilités sont respectivement de $R_A = 0.98$,$R_B = 0.97$, $R_C = 0.98$, $R_D = 0.99$.
La fiabilité de l'ensemble est :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \prod_{i=1}^{4} (1 - R_i(t)) \\ &= 1 - [(1 - R_A)(1 - R_B)(1 - R_C)(1 - R_D)] \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

Loi exponentielle

On rencontre souvent en fiabilité la loi exponentielle. Si le paramètre est α on a :
$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} 1_{t \geq 0}$, $R(t) = e^{-\alpha t} 1_{t \geq 0}$,$\lambda(t) = \alpha$, MTTF= $\dfrac{1}{\alpha}$

Loi gamma(α, β)

On rencontre également la loi Loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ dont la densité est
$f(t) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(\beta)} (\alpha t)^{\beta - 1} e^{-\alpha t} 1_{t \geq 0}$ avec $\alpha > 0$,$\beta > 0$. MTTF $= \frac{\beta}{\alpha}$ Quand $\beta = 1$ on retrouve la densité exponentielle. Lorsque $\beta \neq 1$ il n'y a pas de formule explicite pour la fiabilité et le taux de défaillance.

L'allure des densités de probabilité, selon les valeurs de β, est la suivante :

Loi de Weibull

La loi de Weibull, qui admet trois paramètres, est souvent utilisée. X suit une loi de Weibull de paramètres η, β,γ, si et seulement si $\left(\frac{X - \gamma}{\eta}\right)^{\beta}$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Sa densité vaut :

$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right) 1_{t\geq\gamma}$ avec $\beta > 0$, $\eta > 0$ et $\gamma \geq 0$.

$\forall t \geq \gamma, R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$ et $\lambda(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$

On trouve :

$$MTTF = \gamma + \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \tag{19}$$

Le choix des paramètres donne une grande variété de comportements, c'est ce qui fait l'intérêt de cette loi. Voici l'allure des densités de probabilité, selon les valeurs de β, pour $\eta = 1$ et $\gamma = 0$:

Loi lo-gnormale

On dit que X suit une loi lo-gnormale de paramètres m et σsi et seulement si $\ln X$suit une loi normale $N(m, \sigma)$, la loi lognormale a donc pour densité

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right) 1_{t>0}. \tag{20}$$

Le taux de défaillance vaut 0 en 0, croît et passe par un maximum puis décroît en tendant vers 0 à l'infini. On a :

$$MTTF = exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right). \tag{21}$$

Voici l'allure des densités de probabilité, pour $m = 0$ ou 1 et $\sigma = 0.5$, 1 ou 2

2.3 Absence de mémoire

Déinition 2..1. *Une variable aléatoire X est dite sans mémoire (ou sans usure) si*

$$\forall\ s, t \geq 0, P(X > t + s \ / \ X > t) = P(X > s). \tag{22}$$

Si Xest la durée de vie d'un matériel quelconque, l'équation (1.4.1) s'interprète de la manière suivante. Sachant le matériel en état de bon fonctionnement au temps t, la loi de probabilité de sa durée de vie future est la même que celle de sa durée de vie initiale. En d'autres termes, le matériel ne s'use pas.

Une variable aléatoire de loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration : La condition d'absence de mémoire (1.4.1) se formule de la manière suivante

$$\frac{P(X > t+s;\ X > t)}{P(X > t)} = P(X > s), \tag{23}$$

soit

$$P(X > t+s) = P(X > t)P(X > s). \tag{24}$$

La condition (1.4.2) est évidemment satisfaite par la loi exponentielle.

Une variable aléatoire sans mémoire suit la loi exponentielle .

Démonstration. Soit X une variable possédant la propriété (1.4.1). On note

$$G(x) = P(X > x). \tag{25}$$

Nous venons d'observer que la fonction G était solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall\ x, y \in_{+}, \qquad g(x+y) = g(x)g(y). \tag{26}$$

Un résultat d'analyse très classique garantit que les solutions continues (à droite) de cette équation sont de la forme

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_{+}, \qquad g(x) = e^{-\lambda x} \tag{27}$$

Ainsi, nous devons avoir

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_{+}, \qquad P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{28}$$

La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle se traduit sur une grandeur appelée taux de panne ou taux de hasard.

Déinition 2..2. *Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et de fonction de répartition F . On appelle taux de hasard la fonction définie par*

$$\forall\ t \geq 0, \quad r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \tag{29}$$

Cette grandeur s'interprète de la manière suivante. Supposons qu'un matériel de durée de vie X soit en état de bon fonctionnement au temps $t > 0$. On désire calculer la probabilité d'une panne dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$. Cette probabilité est égale à

$$P(X \in (t, t+dt)\ /\ X > t). \tag{30}$$

Or

$$P(X \in (t, t+dt) \ / \ X > t) = \frac{P(X \in (t, t+dt) \ ; \ X > t)}{P(X > t)} \tag{31}$$

$$= P(X \in (t, t+dt)) \simeq \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = r\,(t)\,dt \tag{32}$$

La fonction $r(t)$représente le taux (conditionnel) avec lequel un matériel cesse de fonctionner à la date t. Pour la loi exponentielle, ce taux se doit d'être constant par absence d'usure. On vérifie bien

$$\forall \ t \geq 0, \ r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \tag{33}$$

Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f. Le taux de hasard de X caractérise la loi de cette variable.

Démonstration. Notons que l'équation (1.4.3) se formule de manière équivalente

$$\forall \ t \geq 0, \quad r(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}. \tag{34}$$

En intégrant des deux cotés, on obtient

$$\ln\left(1 - F(t)\right) = -\int_0^t r(s)ds + k$$

soit

$$1 - F(t) = e^k \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} \tag{35}$$

En prenant $t = 0$, on obtient, puisque $F(0) = 0$,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} \tag{36}$$