كلية العلوم الدقيقة و الاعلام الالي

قسم الرياضيات و الاعلام الالي

السداسي الاول

الجبر 1 (الجبر العام)

تقديم الاستاذ : بن صويلح بشير

الــمــحــتــوى

Chapitre 1 : Notions de logique

- Table de vérité, quantificateurs, types de raisonnements.

Chapitre 2 : Ensembles et applications.

- Définitions et exemples.
- Applications : injection, surjection, bijection, image directe, image réciproque, restriction et prolongement.

Chapitre 3 : Relations binaires sur un ensemble.

- Définitions de base : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
- Relation d'ordre- Définition. Ordre total et partiel.
- Relation d'équivalence : classe d'équivalence.

Chapitre 4 : Structures algébriques.

- Loi de composition interne. Partie stable. Propriétés d'une loi de composition interne.
- Groupes-Définitions. Sous-groupe-Exemples-Homomorphisme de groupes- isomorphisme de groupes.Donner des exemples de groupes finis Z/nZ (n= 1, 2 , 3,…) et le groupe de permutations S_3.
- Anneaux-Définition- Sous anneaux. Règles de calculs dans un anneau. Eléments inversibles, diviseurs de zéro-Homomorphisme d'anneaux-Idéaux.
- Corps-Définitions-Traiter le cas d'un corps fini à travers l'exemple Z/pZ ou p est premier,R et C

Chapitre 5 : Anneaux de polynômes.

- Polynôme. Degré.
- Construction de l'anneau des polynômes.
- Arithmétique des polynômes-Divisibilité-Division euclidienne-Pgcd et ppcm de deux polynômes-Polynômes premiers entre eux-Décomposition en produit de facteurs irréductibles.
- Racines d'un polynôme-Racines et degré -Multiplicité des racines.

<u>Mode d'évaluation</u> : Examen (60%) , contrôle continu – intérrogations,devoirs,participations et présences- (40%)

Références

- M. Mignotte et J. Nervi, Algèbre : licences sciences 1ère année, Ellipses, Paris, 2004.
- J. Franchini et J. C. Jacquens, Algèbre : cours, exercices corrigés, travaux dirigés, Ellipes, Paris, 1996.
- C. Degrave et D. Degrave, Algèbre 1ère année : cours, méthodes, exercices résolus, Bréal, 2003.
- S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.

2- الحجم الاسبوعي : محاضرة + عمل موجه

3- التقييم :

- التقييم المتواصل (امتحانات قصيرة + واجبات منزلية + مشاركة + مواظبة) /40 نقطة
- الامتحان /60 نقطة

:

مدخل للمنطق الرياضي

1) **العبارة (القضية):**

تنقسم الجمل المفيدة في المنطق الرياضي ال قسمين

جمل انشائية	جمل خبرية
هي التي لا تحمل خبر كالاستفهام،الامر،التعجب مثل:ما اجمل جيجل	هي التي تحمل خبر او اكثر مثل:جيجل مدينة سياحية

تعريف1 : نسمي عبارة (قضية) كل جملة خبرية.هذه العبارة قد تكون صادقة و قد تكون خاطئة نرمز للصادقة بـ1او V و للخاطئة بـ 0او F كما نرمز للعبارة بـ P

امثلة:

1- $13<25$ عبارة صحيحة

2- تشرق الشمس من المغرب عبارة خاطئة

3- هل احضرت الواجب جملة انشائية ليست عبارة

4- $\frac{1}{0}=5$ ليست جملة مفيدة

نفي العبارة:

نرمز بـ ~P لنفي القضية $\bar{P}$ او P و نقرا نفي P او ليس P .اذا كانت P صحيحة كان نفيها خاطئة و العكس بالعكس.

مثال: نفي القضية $13<25$ هي $13\geq 25$ خاطئة

القضية المركبة :

تعريف2: نقول عن القضية انها بسيطة اذا كانت تحمل خبرا واحدا و مركبة اذا كانت تحمل اكثر من خبر.

امثلة:

1- و جعلنا من الماء كل شيء حي القضية بسيطة

2- جاء احمد مبتسما القضية مركبة

ادوات الربط:

تعريف3: **عطف الوصل** هو عبارة مركبة من عبارتين بسيطتين او اكثر مرتبطة بالربط (و) و تكون صحيحة اذا و تكون خاطئة اذا كانت احداهما خاطئة. $\wedge$ صحت جميع العبارات المكونة لها و يرمز له بـ

تعريف4: **عطف الفصل** هو عبارة مركبة من عبارتين بسيطتين او اكثر مرتبطة بالربط (او) و تكون صحيحة اذا و تكون خاطئة اذا كانتا كليهما خاطئتين. $\vee$ صدقت على الاقل احدى العبارات المكونة لها و يرمز له بـ

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

التكافؤ المنطقي:

تعريف5- نقول ان P يستلزم Q العبارة $P\to Q$ و نكتب $\bar{P}\vee Q$.

- نقول ان P يكافئ Q اذا كان $P\leftrightarrow Q$ ou $P\equiv Q$ و نكتب $P\to Q$ و $Q\to P$.

ملاحظة: اذا كانت القضيتان P,Q متكافئتين فإنهما صحيحتين او خاطئتين في أن واحد .

نظرية 1: اذا كانت P,Q,R ثلاث عبارات فان:

1) $P\vee P\equiv P$ ، $P\wedge P\equiv P$ و $\sim(\sim P)\equiv P$

2) $P\vee Q\equiv Q\vee P$ و $P\wedge Q\equiv Q\wedge P$ الربط تبديلي

3) $P\vee(Q\vee R)\equiv(P\vee Q)\vee R$ و $P\wedge(Q\wedge R)\equiv(P\wedge Q)\wedge R$ الربط تجميعي

4) $P\vee(Q\wedge R)\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$ و $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ الوصل توزيعي على الفصل و الفصل

توزيعي على الوصل.

نفي الوصل هو وصل النفي و نفي الفصل هو وصل النفي $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$ و $\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ (5

البرهان: نستخدم في البرهان جدول الحقيقة و نكتفي باثبات 4) و 5)

اثبات أن: $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

↑ ---------------↑

اثبات أن: $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$ و $\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P \wedge \sim Q$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

↑ --------- ↑ ---------↑

الاستلزام $P \rightarrow Q$ **عكس النقيض:** نسمي عكس النقيض الاستلزام $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$

نتيجة 1: الاستلزام $P \rightarrow Q$ و عكس نقيضه $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$ متكافئين

يكفي ملاحظة $(\overline{Q} \rightarrow \overline{P}) \equiv (\overline{\overline{Q}} \vee \overline{P}) \equiv (Q \vee \overline{P}) \equiv (P \rightarrow Q)$

الدالة العبارية و المكممات:

تعريف6:**الدالة العبارية** هي كل عبارة يتوقف صحتها على متغير او عدة متغيرات تنتمي لمجموعة معلومة E

مثال : $\forall x \in \Re_+; \frac{x+1}{x+2} < \frac{x+3}{x+4}$

لدينا E من x " تقرا مهما يكن $\forall x \in E; P(x)$ العبارة. " $\forall$ **المكمم الكلي**:يرمز له بـ$P(x)$

يحقق E من x " تقرا يوجد على الاقل $\exists x \in E; P(x)$ العبارة. " $\exists$ **المكمم الوجودي**:يرمزله بـ$P(x)$

أمثلة :1) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in N}$ متقاربة نحو l تكتب

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

2) طالب من جامعة جيجل حصل على المرتبة الاولى. تكتب:« x حصل على المرتبة الاولى» $\exists x \in E;$

مجموعة طلبة جيجل. E حيث

ملاحظات : نفي العبارة " $\forall x \in E; P(x)$ " هي العبارة " $\exists x \in E; \overline{P(x)}$ "

و نفي العبارة " $\exists x \in E; P(x)$ " هي العبارة " $\forall x \in E; \overline{P(x)}$ "

مثال : المتتالية العددية $(u_n)_{n \in N}$ غير متقاربة نحو l تكتب: $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > n \wedge |u_{n_0} - l| \geq \varepsilon$

2) طرق الاستدلال:

توجد ستة طرق للاستدلال هي:

1) **الاستدلال المباشر** :

صحيحة ونثبت صحة P نفرض أن $P \rightarrow Q$ لإثبات أن Q

مثال : برهن المتراجحة $\forall x \in \Re; x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$

الحل : لدينا $\forall x \in \Re; x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

2) **الاستدلال بالخلف :**

اذا اردنا اثبات صحة عبارة نفرض انها خاطئة و نحاول ان نجد تناقض او عبارة خاطئة.

عدد فردي كذلك a عدد فردي بين أن $(a^3 + a^2 + a)$ عدد طبيعي بحيث a مثال : اذا كان

زوجي و هذا يتناقض مع الفرض $(a^3 + a^2 + a)$ زوجي و منه a^3 زوجي و a^2 زوجي اذن a نفرض أن

3) **الاستدلال بفصل الحالات :**

و $P \to R$ فانه بإمكاننا اثبات $[P \vee Q] \to R$ اذا كانت لدينا $Q \to R$

مثال : برهن المتراجحة $\forall x > 0; x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

و $x > 1$ فانه لدينا حالتين $x > 0$ بما أن $0 < x \leq 1$

فبالجمع نجد أن $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ و $x > 1$ الحالة الاولى: $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

فبالجمع نجد أن $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$ فان $0 < x \leq 1$ الحالة الثانية : $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

4) **الاستدلال بعكس النقيض:**

يكافئ عكس نقيضه $P \to Q$ نعلم ان الاستلزام المنطقي $\overline{Q} \to \overline{P}$

مثال : برهن أن $\forall x \in \Re; x^2 > 4 \to [x > 2 \vee x < -2]$

نبين عوض ذلك $\forall x \in \Re; -2 \leq x \leq 2 \to x^2 \leq 4$

$$-2 \leq x \leq 2 \to |x| \leq 2 \to |x|^2 \leq 4 \to x^2 \leq 4$$

5) **الاستدلال بالمثال المضاد :**

لإثبات أن القضية : $\forall x \in E, P(x)$ خاطئة يكفي اثبات صحة $\exists x \in E: \overline{P(x)}$

مثال : لاثبات ان القضية " كل عدد صحيح موجب هو مجموع ثلاث مربعات " خاطئة

من اجل العدد 7 فأن الاعداد الوحيدة التي بامكانها تشكل العدد 7 هي 0 ،2، 1 لكن مجموع مربعاتها لا تساوي 7

6) الاستدلال بالتراجع:

اذا اردنا اثبات صحة الدالة العبارية $[\forall n \geq n_0; P(n)]$ حيث $n \wedge n_0$ اعداد طبيعية فيمكن ان نبرهن كما يلي:

1- اثبات صحة $[P(n_0)]$

2- نفرض أن $[P(n)]$ صحيحة و نثبت صحة $[P(n+1)]$

مثال : برهن أن $\forall n \in N^*; 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1- $n = 1; 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ محققة

2- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \to 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

سلسلة التمارين

التمرين 01:

1) أكتب جدول الحقيقة للقضايا التالية :

$$(1)\quad (P\vee\overline{P})\quad ,(2)\quad (P\wedge\overline{P})\quad ,(3)\quad [P\wedge(P\vee Q)]\quad ,(4)\quad [P\vee(P\wedge Q)]$$

ماذا تستنتج؟

2)برهن مستخدما جدول الحقيقة أن الاستلزام المنطقي غير تجميعي أي $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow r]\Leftrightarrow[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]$

التمرين 02:

اكتب بدلالة المكممات القضايا التالية:

1) جميع الطلبة ملزمون باجراء الفحص الطبي

2) طالب من جامعة جيجل تفوق في المسابقة الدولية

النمرين 03:

1) وضح حسب قيم x الحقيقة إن كانت العبارات التالية قضايا مبينا الصحيحة منها من الخاطئة:

$$(1)\quad \sin^2(tgx)\geq 0\qquad (2)\quad \frac{1}{1-x^2}\geq 1$$

2) هل القضايا التالية صحيحة ؟

$$(3)\quad 5-1=0\vee\frac{1}{2}\in Q\qquad (4)\quad x\in\phi\Rightarrow x\in E$$

3) أكتب نفي القضيتين(3)و (4) , عكس النقيض القضية(4)و القضية (3)على شكل استلزام منطقي.

التمرين 04:

برهن دون استعمال جدول الحقيقة العلاقات التالية:

$$(1)\quad (P\vee Q)\Leftrightarrow(\overline{P}\Rightarrow Q)\quad (2)\quad P\Leftrightarrow[(Q\Rightarrow P)\wedge(\overline{Q}\Rightarrow P)]$$

التمرين 05:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) إذا كان x عدد حقيقي موجب فان $\frac{x+1}{x+2}<\frac{x+3}{x+4}$

2) مجموع عدد ناطق مع عدد صم هو عدد صم.

3) من أجل كل $n\in N:\ n^2\ paire\Leftrightarrow n\ paire$

4) $\forall x\in\Re: x^2-9>0\Rightarrow x^2-x-2>0$

5) ليكن x عدد حقيقي موجب.برهن الاستلزام التالي: $[\forall\varepsilon>0: x<\varepsilon\Rightarrow x=0]$

6) برهن متراجحة برنولي: $h>-1\Rightarrow\forall n\in N:(1+h)^n\geq 1+nh$

التمرين 06:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) المستقيمان $y=x+1$ و $y=x-1$ متوازيان في المستوي.

2) اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in N}$متقاربة فان المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ متباعدة حيث $v_n=u_n+(-1)^n$

3) $\forall n\in N,\exists k\in N; n^2=4k\ ou\ n^2=4k+1$

التمرين 07:

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$.برهن أن $(1)\Rightarrow(2)$ حيث:

$$(1)\quad \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in N,\forall n\in N,n>n_0\Rightarrow|u_n-1|\le\varepsilon$$

$$(2)\quad \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in N,\forall n\in N,n\ge n_0\Rightarrow|u_n-1|<\varepsilon$$

التمرين 08: (يترك للطالب)

أعط نفي القضايا التالية:

$$(1)\quad \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x:|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$(2)\quad \exists\varepsilon>0,\forall n\in N,\exists(p,q)\in N^2:p\ge q\ge n\wedge|u_p-u_q|\ge\varepsilon$$

التمرين 09:

لدينا ثلاثة طلبة أحمد ، علي ، سالم و ثلاثة علامات 06،10 و 16.

لتكن القضايا الأربع التالية :

علامة أحمد 06 $\Leftarrow$ علامة علي 10 (P_1)

علامة علي 6 $\Leftarrow$ علامة أحمد سالم 10 (P_2)

علامة أحمد ليست 10 $\Leftarrow$ علامة علي 16 (P_3)

علامة سالم 16 $\Leftarrow$ علامة علي 06 (P_4)

املأ الجدول التالي باعتبار صحة القضية من خطئها:

الاحتمال المقترح	(P_1)	(P_2)	(P_3)	(P_4)
علامة احمد 6،علامة علي 10 و علامة سالم 16				
علامة احمد 6،علامة علي 16 و علامة سالم 10				
علامة احمد 10،علامة علي 6 و علامة سالم 16				
علامة احمد 10،علامة علي 16 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 10 و علامة سالم 6				
علامة احمد 16،علامة علي 6 و علامة سالم 10				

اذا كانت القضايا الاربعة صحيحة عين علامة كل طالب.

المـجـمـوعـات

تعريف 1: نسمي مجموعة E : كل عائلة لعناصر وتكتب بطريقتين
-بالقائمة مثال: $E=\{0,2,4,6,8\}$ أو
$E=$ - بالصفات المشتركة مثال "مجموعة الأرقام الزوجية "

مجموعات أساسية :

ϕ المجموعة الخالية و هي التي لا تحتوي على اي عنصر

$\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية : 0،1،2،3،4.......... و $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$

$\mathbb{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة : $\pm$1،0، ± 2، ± 3، ± 4،...........

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q},p\epsilon\mathbb{Z},q\epsilon\mathbb{N}^*\right\}$ مجموعة الاعداد الناطقة

$\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية

$\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة

الانتماء : العنصر a ينتمي للمجوعة a و يقرأ E من المجموعة $a\in E \Leftrightarrow E$

الاحتواء : نقول أن A محتواه في B اذا كان $A\subset B \Leftrightarrow [\forall x: x\in A \Rightarrow x\in B]$

نقول أنA جزء من B

المساواة : نقول أن A تساوي B اذا كانت $A=B \Leftrightarrow [A\subset B \wedge B\subset A]$

المتممة : نسمي متممة A بالنسبة E المجموعة $C_EA=\{x\in E: x\notin A\}$

التقاطع : تقاطع A و B المجموعة $A\cap B=\{x: x\in A\wedge x\in B\}$

الاتحاد : اتحاد A و B المجموعة $A\cup B=\{x\in E: x\in A\vee x\in B\}$

الجداء الديكارتي لـ A ثم B مجموعة الثنائيات $A\times B=\{(x,y): x\in A\wedge y\in B\}$

ملاحظة هامة : $(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x'\wedge y=y'$

نظرية : لتكن A ,B, C اجزاء من E و D,H اجزاء من F اذن لدينا :

$(1)\ A\cup B=B\cup A\,,A\cap B=B\cap A\,,A\cap\phi=\phi\,,A\cup\phi=A,C_E(C_EA)=A$

$[A\subset B\Leftrightarrow C_EB\subset C_EA],A\cap C_EA=\phi,A\cup C_EA=E(2)$

$(3)C_E\,(A\cup B)=C_EA\cap C_EB\,,C_E\,(A\cap B)=C_EA\cup C_EB$

$(4)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\,,(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(5)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\,,A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$(6)\ (A\times D)\cap(B\times H)=(A\cap B)\times(D\cap H)$

العــــلاقــــات

تعريف: نسمي علاقة الثلاثية $\Re=(E,F,\Gamma)$ من المجموعة E إلى المجموعة F

حيث Γ ، $E\times F$ جزء من الجذاء الديكارتي E مجموعة الوصول F تسمى مجموعة الانطلاق و
x سابقة لـ y و y صورة لـ x كما نقول $x\Re y$ و نقول y على علاقة بـ x و نكتب $(x,y)\in\Gamma$.

نقول أن العلاقة ثنائية على E إذا كانت $E=F$

انعكاسية $\Re \Leftrightarrow \forall x\in E: x\Re x$

تناظرية $\Re \Leftrightarrow \left(\forall(x,y)\in E^2: x\Re y\Rightarrow y\Re x\right)$

ضد تناظرية $\Re \Leftrightarrow \left(\forall(x,y)\in E^2: x\Re y\wedge y\Re x\Rightarrow x=y\right)$

متعدية $\Re \Leftrightarrow \left(\forall (x,y,z) \in E^3 : x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z\right)$

أمثلة:1) المساواة على E هي علاقة انعكاسية,تناظرية,ضد تناظرية و متعدية.

2) $P(E)$ هي علاقة انعكاسية,ليست تناظرية,ضد تناظرية و متعدية. $A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$ مزودة بـ:

علاقة التكافؤ و علاقة الترتيب :

1- تعريف:(1) نقول عن علاقة ثنائية أنها علاقة **تكافؤ** إذا كانت انعكاسية,تناظرية و متعدية.

(2) لتكن $\Re$. $x \in E$ و E علاقة تكافؤ على

المجموعة x نسمي صنف تكافؤ العنصر $\dot{x} = \{y \in E; x\Re y\}$

ملاحظة: $x \in \dot{x}$

نظرية: لتكن $\Re$ و $x \in E$ و E علاقة تكافؤ على $y \in E$ أو $\dot{x} \cap \dot{y} = \phi$ إذا $\dot{x} = \dot{y}$.

تعريف: نسمي حاصل القسمة المجموعة $E/\Re$ المعرفة بـ: $E/\Re = \left\{\dot{x}; x \in E\right\}$

أمثلة 1) Z مزودة بـ: $\forall (x,y) \in Z^2 \; x\Re y \Leftrightarrow x - y \; paire$

و $\dot{1} = \{2k+1; k \in Z\}$, $\dot{0} = \{2k; k \in Z\} = 2Z$ هي علاقة تكافؤ: $E/\Re = \left\{\dot{0}; \dot{1}\right\}$

2) $E = \mathbb{R}_+^*$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\ln y = y\ln x$

إثبات أن علاقة تكافؤ: ($\mathcal{R}$علاقة تكافؤ) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ انعكاسية , تناظرية ,متعدية)

- ($\mathcal{R}$ انعكاسية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y)$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x\ln y = y\ln x$ ومنه $x\mathcal{R}y$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- ($\mathcal{R}$ تناظرية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$

لدينا $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\ln y = y\ln x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

و منه $\mathcal{R}$ تناظرية.

- ($\mathcal{R}$ متعدية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

لدينا

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ln y = y\ln x \\ \wedge \\ y\ln z = z\ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x} \\ \wedge \\ \frac{\ln z}{z} = \frac{\ln y}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln z}{z} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow x\ln z = z\ln x \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية مما سبق نجد أن $\mathcal{R}$علاقة تكافؤ.

حساب صنف التكافؤ $\dot{1}$:

$\dot{1} = \{x \in \mathbb{R}_+^* : 1\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{R}_+^* : 1\ln x = x\ln 1\} = \{x \in \mathbb{R}_+^* : \ln x = 0\} = \{1\}$.

2- تعريف:(1) نقول عن علاقة ثنائية أنها علاقة **ترتيب** إذا كانت انعكاسية,ضد تناظرية و متعدية.

(2) نقول عن علاقة ترتيب $\Re$. أنها كلية إذا كانت: $\forall (x,y) \in E^2 ; x\Re y \vee y\Re x$

في حالة العكس نقول أن الترتيب جزئي.

أمثلة:1) R مزودة بـ: $x\Re y \Leftrightarrow x \le y$ مرتبة. R هي ترتيب كلي.نقول أن

2)$P(E)$ هي علاقة ترتيب و الترتيب جزئي. $A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$ مزودة بـ:

3) R^2 مزودة بـ: $(x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow (x < x') \vee (x = x' \wedge y \le y')$ هي علاقة ترتيب كلي.

4) لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ: $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow |x - x'| \le y' - y$

لدينا: ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$علاقة ترتيب) $\Leftrightarrow$ ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$ انعكاسية, ضد تناظرية, متعدية)

- ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$ انعكاسية) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)$

لدينا $\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}| = \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ومنه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, ادن $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ انعكاسية.

$\left(\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x,y)\Rightarrow(x,y)=(x',y')\right)\Leftrightarrow$
($\mathcal{R}$ ضد تناظرية)

-

لدينا $\left.\begin{array}{l}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\Leftrightarrow|x-x'|\leq y'-y\\(x',y')\mathcal{R}(x,y)\Leftrightarrow|x'-x|\leq y-y'\end{array}\right\}\Rightarrow|x-x'|\leq 0\Rightarrow x-x'=0$ و $y-y'=0$

اذن $(x',y')=(x,y)$ ومنه $\mathcal{R}$.علاقة ضد تناظرية

- $\left(\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x'',y'')\Rightarrow(x,y)\mathcal{R}(x'',y'')\right)\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ متعدية)

لدينا: $\left.\begin{array}{l}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\Leftrightarrow|x-x'|\leq y'-y\\(x',y')\mathcal{R}(x'',y'')\Leftrightarrow|x'-x''|\leq y''-y'\end{array}\right\}\Rightarrow|x-x''|\leq|x-x'|+|x'-x''|\leq y''-y$

اذن $(x,y)\mathcal{R}(x'',y'')$ ومنه $\mathcal{R}$. علاقة متعدية فهي علاقة ترتيب

غير مرتبطين بالعلاقة. $(1,5)$ و $(3,4)$ اذن $|1-3|=2>4-5=-1$ و $|3-1|=2>5-4=1$ نلاحظ أن

3وبما أن ($\mathcal{R}$علاقة ترتيب كلي) $\Leftrightarrow\left(\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathcal{R}(x',y')\vee(x',y')\mathcal{R}(x,y)\right)$

من المثال السابق يتبين ان الترتيب جزئي و غيركلي.

التطبيقات

تعريف: نسمي تطبيق كل علاقة $f=(E,F,\Gamma)$ بحيث كل سابقة x لها صورة وحيدة يرمز لها $y=f(x)$

كما يسمى Γ ببيان التطبيق و نرمز للتطبيق بـ $f:E\to F,x\to y=f(x)$

مثال: التطبيق الحيادي $id_E:E\to E,x\to f(x)=x$

إذن لدينا: $f:E\to F$ ، $f:E'\to F'$ مساواة التطبيقين: $f=g\Leftrightarrow E=E'\wedge F=F'\wedge(\forall x\in E:f(x)=g(x))$

تعريف: ليكن التطبيقين $f:E\to F$ و $g:F\to G$ نسمي تركيب f و g التطبيق $g\circ f:E\to G$ المعرف بـ $\forall x\in E:(g\circ f)(x)=g(f(x))$

التطبيق المتباين و الغامر و التقابلي :

تعريف:- نقول أن التطبيق $f:E\to F$ متباين إذا كان $(\forall(x,x')\in E^2:f(x)=f(x')\to x=x')$

- نقول أن التطبيق $f:E\to F$ غامر إذا كان $(\forall y\in F,\exists x\in E:y=f(x))$
- نقول أن التطبيق $f:E\to F$ تقابلي إذا كان $(\forall y\in F,\exists!x\in E:y=f(x))$

ملاحظة: $f:E\to F$ متباين و غامر f تقابلي إذا و فقط إذا كان

نظرية: ليكن $f:E\to F$ إذن لدينا:

- f تقابلي إذا و فقط إذا وجد تطبيق $g:F\to E$ بحيث $g\circ f=id_E$ و $f\circ g=id_F$

أي f^{-1} يسمى التطبيق العكسي و يرمز بـ $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

نظرية: إذا كان $f:E\to F$ و $g:F\to E$ تقابلي و $g\circ f:E\to G$ تطبيقين تقابليين فان التطبيق $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

تعريف: لتكن B تطبيق $f:E\to F$ و F جزء من A جزء من E ،

المجموعة المباشرة و المجموعة العكسية :

تعريف: ليكن $f:E\to F$ تطبيق و $A\subset E\wedge B\subset F$

حيث $f(A)=\{f(x);x\in A\}$ المجموعة A نسمي الصورة المباشرة للمجموعة

المجموعة B نسمي الصورة العكسية للمجموعة $f^{-1}(B)=\{x\in E;f(x)\in B\}$

نظرية : لتكن A ,A’ اجزاء من E و B,B’ اجزاء من F اذن لدينا :

$(1)\quad A\subset A'\Rightarrow f(A)\subset f(A')$, $\qquad(2)\quad B\subset B'\Rightarrow f^{-1}(B)\subset f^{-1}(B')$

$[f(A\cap A')\subset f(A)\cap f(A')]$, $\quad(4)\quad[f^{-1}(B\cap B')=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')](3)$

$(5)\quad f(A\cup B)=f(A)\cup f(A')$, $\qquad(6)\quad[f^{-1}(B\cup B')=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')]$

$(7)\quad A\subset f^{-1}(f(A))$, $\qquad (8)\ f(f^{-1}(B))\subset B$

$(9)\ \forall A: A=f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f$ متباين $\qquad (10)\ \forall B: f(f^{-1}(B))=B \Leftrightarrow f$ غامر

ملاحظة هامة: $[f(A\cap A')\neq f(A)\cap f(A')]$ في الحالة العامة.مثال

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=|x|\ , f(]-1,0[)=]0,1[\ et\ f(]0,1[)=]0,1[$ بينما $]-1,1[\cap]0,1[=\emptyset$ و $f(\emptyset)=\emptyset$

تمديد التطبيق و اقتصار التطبيق :

$f:E\to F$ ، E أجزاء من A,B تعريف: لتكن $g:A\to F$

إذا كان g أنه **تمديد** لـ f نقول عن $(\forall x\in A:\ f(x)=g(x))$

المعرف بـ $f/_B:B\to F$ التطبيق B على المجموعة f نسمي **اقتصار** التطبيق $f/_B(x)=f(x)$

سلسلة التمارين رقم 2

التمرين 01:

1) برهن المساواة: $\bigcap_{n\in N^*}\left[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right]=\{0\}$

2) نرمز لـ $P(E)$ لجميع اجزاء E : اي $[X\in P(E)\Leftrightarrow X\subset E]$

أ) لتكن $B=\phi\wedge A=\{1,2\}$ عين. $P(P(B)),P(B),P(A)$

ب) لتكن B,A أجزاء من E برهن أن. $A\subset B\Leftrightarrow P(A)\subset P(B)$

التمرين 02 (يترك للطالب):

لتكن B,A أجزاء من E.

1) عين المجموعات التالية: $(1)\quad X=(A\cap B)\cup(C_EA\cap B)\quad ,(2)\quad Y=(C_EA\cup C_EB)\cap(C_EA\cup B)$

2) برهن تكافؤ الخواص التالية: $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow C_EB\subset C_EA$

التمرين 03:

لتكن A,B أجزاء من E ونرمز للفرق بـ $A-B=\{x;x\in A\wedge x\notin B\}$.

1) نفرض أن A مجموعة الأعداد الطبيعية مضاعفات 5 و B مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

عين الفرق $(A-B)$

2) برهن أن $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$ و استنتج المجموعة $A-(A-B)$.

التمرين 04 :(يترك للطالب)

لتكن $(A_i)_{i\in I}$ عائلة من أجزاء E. برهن الخواص التالية:

$(1)\ \bigcup_{i\in I}C_EA_i=C_E\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\quad ,\quad (2)\ \bigcap_{i\in I}C_EA_i=C_E\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\quad ,\quad (3)\ \left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)\quad ,\quad (4)\ \left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$

التمرين 05:

- نقول ان العائلة $(A_i)_{i\in I}$ تشكل تغطية لـ E اذا كانت $E=\bigcup_{i\in I}A_i$

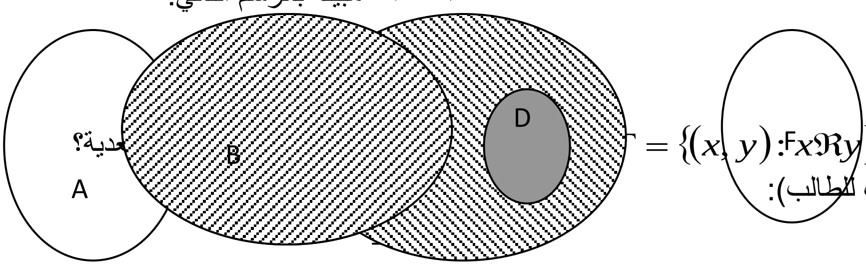
- نقول أن العائلة $(A_i)_{i\in I}$ تجزئة لـ E اذا كانت تغطية و منفصلة مثنى مثنى اي $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\phi$

من بين العائلات التالية بين من هي تجزئة:

$(1)\ A_n=\{n,n+2\}ou\ n\in N\ et\ E=N\quad ;(2)\quad A_n=\{2n,2n+1\}ou\ n\in N\ et\ E=N;(3)\ A_n=[n,n+1[\ ou\ n\in N\ et\ E=\Re_+$

التمرين 06:

لتكن $E=\{A,B,C,D,F\}$ و $\forall(A,B)\in E^2: A\Re B\Leftrightarrow A\cap B\neq\phi$ مبينة بالرسم التالي:



عددية؟

عين بيان العلاقة $=\{(x,y):x\Re y\}$

التمرين 07 (يترك للطالب):

لتكن $\lambda \in \Re$ و R علاقة ثنائية معرفة على $\Re$ بـ: $\forall(a,b)\in \Re^2 : aRb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = \lambda(a^2 - b^2)$

برهن أن R علاقة تكافؤ.

من أجل $\lambda = 7$ عين صنف التكافؤ العدد 6

التمرين 08:

لتكن $E = \Re^* \times \Re^*$ و $\{\forall(x,y),(x',y')\in E : (x,y)R(x',y') \Leftrightarrow xy' = yx'\}$

- برهن أن R هي علاقة تكافؤ على E.

- من أجل $a \in \Re^*$ عين صنف التكافؤ للعنصر (a,a)

التمرين 09 : (يترك للطالب)

لتكن R علاقة معرفة على $\Re^2$ بـ $\{\forall(x,y),\Re^2 : xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x\}$

- برهن أن R هي علاقة تكافؤ على E.

- من أجل $a \in \Re$ حدد عدد العناصر الموجودة في صنف التكافؤ a

التمرين 10:

نعرف على $\Re^2$ العلاقة $\leq$ بـ

$$\forall(x,y),(x',y')\in \Re^2 : (x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow [(x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y')]$$

للعلم: $((x < x') \Leftrightarrow (x \leq x' \wedge x \neq x'))$

برهن أن $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي على $\Re^2$.

التمرين 11(يترك للطالب):

نعرف على N^* العلاقة: $\forall(x,y)\in (N^*)^2 : xRy \Leftrightarrow x \; divise \; y$

برهن أن R علاقة ترتيب.هل الترتيب كلي أم جزئي؟

التمرين 12:

أحسب $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارن بينهما حيث:

$$f : \Re \to \Re_+ \quad ; \quad g : \Re_+ \to \Re$$

$$x \to f(x) = |x| \qquad x \to g(x) = \sqrt{x}$$

التمرين 13 :(يترك للطالب)

لتكن $E = [0,1]$ و $F = [0,2]$ مجالات من $\Re$.

1- ارسم المجموعتين $E \times F$ و $E \times E$.

2- ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to E$ تطبيقين معرفين بـ: $g(x) = (x-1)^2 \wedge f(x) = 2 - x$.

أ- أحسب التطبيقين $f \circ g$ و $g \circ f$ هل. $f \circ g = g \circ f$ ؟ $g \circ f = g$ ؟

ب- عين $f^{-1}(\{0\})$ و $g^{-1}\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$. برهن أن التطبيق $g \circ f$. تقابلي و عين تطبيقه العكسي.

التمرين 14:

أدرس إن كانت التطبيقات التالية متباينة,غامرة,تقابلية:

$$f : \Re \to \Re_+ \quad ; \quad g : \Re_+ \to \Re \qquad h : \Re_+ \to [-1,1] \quad ; \quad k : \Re \to \Re$$

$$x \to f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \to g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad x \to h(x) = \sin x \qquad x \to k(x) = \sqrt[3]{x}$$

و أوجد التطبيق العكسي إن أمكن.

التمرين 15: (يترك للطالب)

نعرف التطبيق: $f : Z^2 \to Z^2 \;\; tq \;\; f(k,l) = (2k+l, k+l)$

برهن أن f تقابلي و عين التطبيق العكسي f^{-1}.

التمرين 16:

ليكن التطبيق f معرف من $\Re$ في $\Re$ بـ $f(x) = x^2$

1) احسب $f([0,2])$, $f^{-1}(f([0,2]))$. هل التطبيق متباين؟

2) احسب $f^{-1}([-1,0[)$, $f(f^{-1}([-1,0[))$. هل التطبيق غامر؟

التمرين 17: (يترك للطالب)

.برهن الخواص التالية: F في E تطبيق من f ليكن

$$(1)\quad \forall B, B' \in \mathrm{P}(F) : f^{-1}(B - B') = f^{-1}(B) - f^{-1}(B')$$
$$(2)\quad \forall A, A' \in \mathrm{P}(E) : f(A - A') \supset f(A) - f(A')$$

التمرين 18:

لتكن $f : E \to F$ تطبيق، A, B أجزاء من E .

-1 برهن أن $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

-2 برهن تكافؤ الخواص التالية:

أ) f متباين ب) $A \cap B = \phi \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \phi$ جـ) $A \subset B \Rightarrow f(B - A) = f(B) - f(A)$

التمرين 19: واجب منزلي

ليكن التطبيق المميز $f_A : E \to \{0,1\}$ المعرف بـ $f_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$

- برهن الخواص التالية:

1) $f_A(x) = f_B(x) \Rightarrow A = B$ 2) $f_{C_E A}(x) = 1 - f_A(x)$

3) $f_{A-B}(x) = f_A(x).(1 - f_B(x))$ 4) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x).f_B(x)$

5) $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$ 6) $f_{A \Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x)$

حيث $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ الفرق التناظري للمجموعتين.

التمرين 20:

ليكن $f : E \to F$ تطبيق و δ علاقة ثنائية على F

نعرف العلاقة $\Re$ على E بـ $\forall (x, y) \in E^2 : x \Re y \Leftrightarrow f(x) \delta f(y)$

-1 برهن أنه إذا كانت δ علاقة تكافؤ على F فان $\Re$ علاقة تكافؤ على E

-2 برهن أنه إذا كانت δ علاقة ترتيب على F و f متباين فان $\Re$ علاقة ترتيب على E

التمرين 21: طرح في الامتحان

ليكن $f : \Re \mapsto \Re$ تطبيق معرف بـ: $\forall x \in \Re : f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

1) نضع $A = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$ أحسب $f(A)$. هل التطبيق f متباين؟

2) عين قيم $y \in \Re$ التي من أجلها تكون المعادلة $f(x) = y$ لها حلول.

3) استنتج أن $f(\Re) = \left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. هل التطبيق f غامر؟

4) أحسب $f^{-1}(B)$ حيث $B = [-1, 0]$

Structures algébriques جبر المجموعات

1- قانون التركيب الداخلي: Loi de composition interne

في E^2 من $*$ كل تطبيق E **تعريف1**: نسمي قانون تركيب داخلي على E $E\times E\rightarrow E$ المعرف ب

$(x,y)\rightarrow x*y$

نرمز لقانون التركيب الداخلي بإحدى هذه الرموز: $\perp,\otimes,\oplus,\times,\bullet,+,*,\ldots\ldots\ldots\ldots$

أمثلة : - الطرح ليس قانون تركيب داخلي على $\Re_+^*$

- الجمع و الضرب العادي قانون تركيب داخلي على $\Re$

تعريف2: نقول أن: $*$

$*$ تجميعي $\Leftrightarrow \forall(x,y,z)\in E^3 : x*(y*z)=(x*y)*z$

$*$ تبديلي $\Leftrightarrow \forall(x,y)\in E^2 : x*y=y*x$

$*$ تقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow \exists e\in E,\forall x\in E : x*e=e*x=x$

لكل عنصر نظير $\Leftrightarrow \forall x\in E,\exists x'\in E,: x*x'=x'*x=e$

$*$ توزيعي على $\perp$ $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\forall(x,y,z)\in E^3 : x\perp(y*z)=(x\perp y)*(x\perp z)\\ \wedge\quad (x*y)\perp z=(x\perp z)*(y\perp z)\end{array}\right\}$

فإننا نرمز للعنصر الحيادي بـ 0 إذا رمزنا للقانون بـ $+$ و ل x نظير $-x$

بـ 1 فإننا نرمز للعنصر الحيادي بـ $\bullet$ و إذا رمزنا للقانون بـ x و لنظير x^{-1}

و إذا رمزنا للقانون بباقي الرموز بـ e فإننا نرمز للعنصر الحيادي بـ x و لنظير x'

نتيجة 1: ليكن $*$ قانون تركيب داخلي على E إذن لدينا:

أ) العنصر الحيادي إن وجد فهو وحيد

تجميعي فان العنصر النظيران وجد فهو وحيد. $*$ ب) إذا كان

2- الزمرة Groupe

تعريف3: نقول عن $(G,*)$ أنها زمرة إذا كان $*$ قانون تركيب داخلي على المجموعة G ($*$ تجميعي،تقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير.

و إذا أضيف شرط التبديل فنقول أن الزمرة تبديليه

أمثلة:

1) $(N,+)$ ليست زمرة لأن نظير 1 هو $-1\notin N$

2) $(Z,+)$، $(Q,+)$، $(\Re,+)$ و $(C,+)$ هي زمرة تبديليه عنصرها الحيادي 0 و نظير x هو $-x$

3) $(Q^*,\bullet)$، $(\Re^*,\bullet)$ و $(C^*,\bullet)$ هي زمرة تبديليه عنصرها الحيادي 1 و نظير x هو $\frac{1}{x}$

4) $(F(\Re,\Re),\oplus)$ حيث $F(\Re,\Re)=\{f:\Re\rightarrow\Re\}$ مجموع التطبيقات الحقيقية مزودة بالعملية:

$\forall(f,g)\in(F(\Re,\Re))^2,(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x),\forall x\in\Re$

هي زمرة تبديليه عنصرها الحيادي التطبيق المعدوم 0 و نظير التطبيق f هو التطبيق $-f$

نتيجة2: لتكن $(G,\bullet)$ زمرة إذن لدينا:

1) $\forall x\in G : (x^{-1})^{-1}=x$

2) $\forall(x,y)\in G^2 : (x\bullet y)^{-1}=y^{-1}\bullet x^{-1}$

نتيجة3: لتكن $(G,\bullet)$ زمرة إذن لدينا:

$\forall(x,y,z)\in G^3 : x\bullet y=x\bullet z\rightarrow y=z$

$\forall(x,y,z)\in G^3 : x\bullet z=y\bullet z\rightarrow x=y$

3- الزمرة الجزئية Sous groupe

تعريف4: $(G,*)$ و H جزء غير خالي من G نقول أن H زمرة جزئية من G إذا تحقق

لتكن

$$(1)\quad \forall (x,y)\in H^2 : x \bullet y \in H$$

$$(2)\quad \forall x \in H : x^{-1} \in H$$

أمثلة: 1) $(Z,+)$ هي زمرة جزئية من $nZ=\{nk; k\in Z\}$

2) Q^* هي زمرة جزئية من $(\Re^*,\bullet)$

نتيجة4: لتكن $(G,*)$ و H جزء غير خالي من G

H زمرة جزئية من G $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in H^2 : x \bullet y^{-1} \in H$

ملاحظات: 1) كل زمرة جزئية تحتوي على العنصر الحيادي e

2) $G \wedge \{e\}$ هي زمر جزئية من $(G,\bullet)$

نتيجة5: لتكن $(G,*)$ زمرة، H_1 و H_2 زمر جزئية من G إذن $H_1\cap H_2$ هي زمرة جزئية

ليست بالضرورة زمرة جزئية من G

ملاحظة: $H_1 \cup H_2$ ليست بالضرورة زمرة جزئية من G

مثال: $(3\mathbb{Z})\cup 5\mathbb{Z}$ ليست زمرة جزئية لأن $8=3+5\notin(3\mathbb{Z})\cup 5\mathbb{Z}$.

4- التماثل Morphisme

تعريف5: لتكن $(G,*)$ و $(G',\perp)$ زمرتين و f تطبيق من G في G'

- نقول أن f تماثل إذا كان: $(1)\quad \forall (x,y)\in G^2 : f(x*y)=f(x)\perp f(y)$

- نقول أن f تشاكل إذا كان تماثل تقابلي

أمثلة: 1) التطبيق $f:(\Re,+)\to(\Re_+^*,\bullet)$ المعرف بـ $\forall x\in\Re : f(x)=e^x$ تشاكل

2) التطبيق $f_a : G\to G$ المعرف بـ $\forall x\in G : f_a(x)=a\bullet x\bullet a^{-1}$ تشاكل حيث $a\in G$

نتيجة 6: إذا كان f تماثل من $(G,*)$ في $(G',\bullet)$ فان:

$$(1)\quad f(1_G)=1_{G'} \quad ,(2)\quad \forall x\in G : f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$$

نتيجة 7: لتكن $(G,*)$، $(G',\bullet)$ و $(G'',\perp)$ ثلاثة زمر و $f:G\to G'$، $g:G'\to G''$ تماثلين إذن: $g\circ f$ تماثل من $(G,*)$ في $(G'',\perp)$.

تعريف6: ليكن $f:(G,+)\to(G',\bullet)$ تماثل زمري.

المجموعة $Kerf=\{x\in G; f(x)=1_{G'}\}$ نسمي نواة f -

نتيجة 8: 1) $Kerf$ هي زمرة جزئية من $(G',\bullet)$

2) f متباين $\Leftrightarrow Kerf=\{e\}$

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 3

التمرين الأول:

نعرف على $\Re$ القانون $\perp$ حيث $\forall(x,y)\in\Re^2 : x\perp y = x+y+xy$

برهن أن القانون تبديلي ، تجميعي و يقبل عنصر حيادي.ما هي الاعداد التي لها نظير؟

هل $(\Re,*)$ زمرة؟ برهن أن $(G,*)$ زمرة تبديليه حيث $G=\Re-\{-1\}$

هل $\perp$ توزيعي على الضرب العادي؟

التمرين الثاني: نعرف على المجموعة $G=\{(x,y)\in\Re^2; x^2-y^2=1\}$

القانون $*$ كما يلي: $\forall((a,b),(a',b'))\in G^2.(a,b)*(a',b')=(aa'+bb',ab'+ba')$

برهن أن $*$ فعلا قانون تركيب داخلي.

برهن أن $(G,*)$ زمرة تبديليه.

التمرين الثالث:

برهن أن مجموعة الأعداد العشرية $D=\left\{\frac{a}{10^n}; a\in Z, n\in N\right\}$ زمرة جزئية من $(Q,+)$

التمرين الرابع:

لتكن $(G,*)$ و $(G',\circ)$ زمرتين و f ، g تماثلين من G في G' .نعرف

$H=\{x\in G; f(x)=g(x)\}$. برهن أن H زمرة جزئية من G .

التمرين الخامس:

لتكن $(G,*)$ زمرة و $f: G\mapsto G$ تطبيق معرف بـ: $\forall x\in G: f(x)=x^2$

برهن التكافؤ: f زمرة تبديليه $\Leftrightarrow (G,*)$ تشاكل زمري

نفس السؤال بالنسبة ل: $g: G\mapsto G$ تطبيق معرف بـ: $\forall x\in G: g(x)=x^{-1}$

التمرين السادس:

برهن أن القانون * المعرف على N بـ: $\forall(x,y)\in N^2, x*y=\max(x,y)$

تجميعي تبديلي يقبل عنصر حيادي ، ما هي العناصر التي لها نظير؟

التمرين السابع:

لتكن $E=]-1,\infty[$ مزودة بالعملية Δ حيث $\forall(x,y)\in E^2 : x\Delta y=\frac{xy+x+y-2}{3}$

برهن أن Δ قانون تركيب داخلي في E (يمكن إثبات أن $x\Delta y+1>0$)

برهن أن (E,Δ) هي زمرة تبديليه.

التمرين الثامن: لتكن $(G,*)$ تحقق الخواص التالية:

1) $\forall(x,y,z)\in G^3 : (x*y)*z = x*(y*z),$

2) $\exists e\in G; \forall x\in G, e*x=x$

3) $\forall x\in G, \exists x'\in G : x'*x=e$

برهن أن $(G,*)$ هي زمرة

توجيه: استخدم العلاقة الثالثة مرتين للحصول على $x*x'=e$

التمرين التاسع: لتكن $(G,.)$ زمرة عنصرها الحيادي 1نفرض أن $\forall x\in G: x^2=1$

برهن أن $\forall x\in E: x^{-1}=x$ وأن G زمرة تبديليه.

التمرين العاشر: لتكن $G=\Re^*\times\Re$ مزودة بالعملية $\perp$ حيث

$$\forall(a,b)\in G, \forall(a',b')\in G : (a,b)\perp(a',b')=\left(a.a', \frac{b'}{a}+b\right)$$

برهن أن $(G,\perp)$ زمرة غير تبديليه.

التمرين الحادي عشرة: لتكن $(G,*)$ زمرة.برهن تكافؤ الخواص التالية:

1) القانون $*$ تبديلي

2) $\forall(a,b)\in G^2 : (a*b)^2 = a^2 * b^2$

3) $\forall(a,b)\in G^2 : (a*b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$

التمرين الثاني عشرة:

برهن ان $H = \{ n+k\sqrt{3}; n\in N \wedge k\in Z, n^2-3k^2=1\}$ زمرة جزئية من $(\Re_+^*,\bullet)$

التمرين الثالث عشرة:

لتكن Z^2 مزودة بالقانون الداخلي: $\forall(m,n),(m',n')\in Z^2 : (m,n)\oplus(m',n') = (m+(-1)^n m', n+n')$

1) برهن أن $(Z^2,\oplus)$ زمرة .هل هي تبديليه.

2) لتكن المجموعة $H = \{(x,0) : x\in Z\}$ و $F = \{(0,b) : b\in Z\}$

برهن أن H و F زمرة جزئية من $(Z^2,\oplus)$

3) نعرف التطبيق $f : Z^2 \mapsto Z$ معرف بـ: $\forall(m,n)\in Z^2 : f((m,n)) = n$. برهن أن f تماثل

التمرين الرابع عشرة:

لتكن Z^2 مزودة بالقانون الداخلي: $\forall(a,b),(a',b')\in Z^2 : (a,b)\oplus(a',b') = (a+a', b+b')$

1) برهن ان $(Z^2,\oplus)$ زمرة تبديليه

2) لتكن المجموعة $H = \{(x,y)\in Z^2 : x+y\ pair\}$

برهن أن H زمرة جزئية من $(Z^2,\oplus)$

3) نعرف التطبيق $f : Z^2 \mapsto H$ معرف بـ: $\forall(x,y)\in Z^2 : f((x,y)) = (x, 2y-x)$. برهن أن f تشاكل

التمرين الخامس عشرة: لتكن $Q[\sqrt{2}] = \{ p+q\sqrt{2}; p\in Q\wedge q\in Q\}$

1) برهن ان $Q[\sqrt{2}]$ زمرة جزئية من $(\Re,+)$

2) برهن أن $Q[\sqrt{2}]^* = Q[\sqrt{2}] - \{0\}$ زمرة جزئية من $(\Re^*,\bullet)$

نعرف التطبيق $f : Q[\sqrt{2}] \to Q[\sqrt{3}]$ بـ $f(p+q\sqrt{2}) = p+q\sqrt{3}$

3) برهن ان f تشاكل من $(Q[\sqrt{2}],+)$ في $(Q[\sqrt{3}],+)$

4) هل التطبيق f تماثل من $(Q[\sqrt{2}]^*,\bullet)$ في $(Q[\sqrt{3}]^*,\bullet)$

توجيه: احسب اولا $f\left((\sqrt{2})^2\right)$

التمرين السادس عشرة: لتكن المجموعة $E =]-1,1[$ مزودة بالقانون $(x,y)\in E^2 : x*y = \frac{x+y}{1+x.y}$

1) برهن أن $*$ قانون تركيب داخلي على E

2) برهن أن $(E,*)$ زمرة تبديليه.

3) برهن أن التطبيق $f : (\Re,+) \to (E,*)$ المعرف ب: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ هو تشاكل زمري.

1- عموميات:

تعريف1: نسمي حلقة كل مجموعة A غير خالية مزودة بقانوني تركيب داخلي + و • بحيث

1) $(A,+)$ زمرة تبديليه ذات عنصر حيادي 0 أو اختصارا 0_A

2) • تجميعية أي $\forall(x,y,z)\in A^3 : x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z$

3) • توزيعية على + أي $\forall(x,y,z)\in A^3 : x\bullet(y+z)=(x\bullet y)+(x\bullet z)\wedge(x+y)\bullet z=(x\bullet z)+(y\bullet z)$

- إذا كان • تبديلي فنقول حلقة تبديليه و إذا كانت تقبل عنصر حيادي $1_{A'}$ أو 1 فنقول حلقة واحديه

أمثلة: 1) $(C,+,\bullet)$ و $(\Re,+,\bullet)$، $(Q,+,\bullet)$، $(Z,+,\bullet)$ هي حلقات تبديليه واحديه عنصرها الحيادي 1

2) مجموع التطبيقات الحقيقية مزودة بـ: $F(\Re,\Re)=\{f:\Re\to\Re\}$ حيث $(F(\Re,\Re),\oplus,\otimes)$

$$\forall(f,g)\in(F(\Re,\Re))^2,(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x),\forall x\in\Re$$

$$(f\otimes g)(x)=f(x)\bullet g(x),\forall x\in\Re$$

هي حلقة تبديليه واحديه عنصرها الحيادي التطبيق $1_F:\Re\to\Re$ المعرف بـ $\forall x\in\Re:1_F(x)=1$

تعريف2: لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة واحديه و $a\in A$

نقول أن a قابل للقلب إذا وجد $a^{-1}\in A$ بحيث $a\bullet a^{-1}=a^{-1}\bullet a=1_A$ نرمز للعناصر القابلة للقلب بـ A^*

أمثلة: 1) في $(Z,+,\bullet)$ العناصر القابلة للقلب هي $Z^*=\{-1,1\}$

2) في $(Q,+,\bullet)$ العناصر القابلة للقلب هي $Q^*=Q-\{0\}$

نتيجة 1:ليكن $(A^*,\bullet)$ هي زمرة.

2- قواعد الحساب:

نتيجة 2:لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة واحديه تحتوي على عنصرين على الأقل إذن لدينا:

$$(1)\quad \forall a\in A:0_A\bullet a=a\bullet 0_A=0_A \qquad (2)\,0_A\neq 1_A$$

$$(3)\,\forall a\in A:(-1_A)\bullet a=-a\,,(4)\,(-1_A)\bullet(-1_A)=1_A$$

(5) 0_A ليس له مقلوب

و $n.x=\underbrace{x+x+..+x}_{n\ fois}$ ، $x^n=\underbrace{x\bullet x\bullet\ldots\bullet x}_{n\ fois}$ نرمز $n\in\mathrm{N}$ اصطلاح: من اجل $x^0=1$

نظرية 1:لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة إذن لدينا:

$$(1)\quad \forall(x,y)\in A^2 : x\bullet(-y)=(-x)\bullet y=-(x\bullet y)$$

$$(2)\quad \forall(x,y,z)\in A^3 : x\bullet(y-z)=x\bullet y-(x\bullet z)\quad \wedge(x-y)\bullet z=x\bullet z-y\bullet z$$

$$(3)\quad \forall(x,y)\in A^2 :(x+y)^2=x^2+x\bullet y+y\bullet x+y^2$$

$$(4)\qquad \bullet\ commutative\rightarrow\ (x+y)^2=x^2+2\bullet x\bullet y+y^2$$

دستور ثنائي الحد:لتكن $n\in\mathrm{N}$ ، $(a,b)\in A^2$ بحيث $a\bullet b=b\bullet a$ اذن

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k.b^{n-k}\qquad ou\qquad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

3) الحلقة التامة:Anneau intègre

تعريف 3: لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة و $a\in A$.

1) نقول عن a انه قاسم للصفر إذا كان $a\neq 0$ و وجد $b\neq 0$ بحيث $a\bullet b=0$ أو $b\bullet a=0$.

تامة إذا كانت لا تملك قواسم الصفر $(A,+,\bullet)$ 2) نقول أن الحلقة

أمثلة:1) $(Z,+,\bullet)$، $(Q,+,\bullet)$، $(\Re,+,\bullet)$ و $(C,+,\bullet)$ هي حلقات تامة.

2) $(F(\Re,\Re),\oplus,\otimes)$ هي حلقة غير تامة مثال:

$$f:\Re\to\Re \qquad g:\Re\to\Re$$

$$x\to f(x)=\begin{cases}0 \; si \; x\geq 0\\ x \; si \; x\leq 0\end{cases} \qquad x\to g(x)=\begin{cases}x \; si \; x\geq 0\\ 0 \; si \; x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\in\Re:(f\otimes g)(x)=f(x).g(x)=0\\ \Rightarrow f\otimes g=0_{F(\Re,\Re)}\end{cases}$$

التطبيقان f و g هي قواسم للصفر.

نتيجة 3:لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة واحديه و a غير قابل للقلب. a قاسم للصفر إذن

4) الحلقة الجزئية:Sous anneau

تعريف4: لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة و B جزء غير خالي من A .نقول أن H حلقة جزئية من A إذا تحقق

1) B زمرة جزئية من $(A,+)$ 2) $\forall(x,y)\in B^2: x\bullet y\in B$.

إذا و فقط إذا كانت: B حلقة جزئية من $(A,+,\bullet)$ اي أن

$$(1)\quad 0\in B\quad ,(2)\forall(x,y)\in B^2: x\bullet y\in B\wedge x+y\in B\quad ,(3)\quad \forall x\in B:-x\in B$$

نتيجة 4) إذا و فقط إذا كانت: B حلقة جزئية من $(A,+,\bullet)$

$$(1)\quad 0\in B\quad ,(2)\quad \forall(x,y)\in B^2: x\bullet y\in B\wedge x-y\in B$$

مثال: $Z[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5};(a,b)\in Z^2\}$ هي حلقة جزئية من $(C,+,\bullet)$.

5) الحقل:Corps

تعريف 4: نسمي حقل كل حلقة واحديه $(K,+,\bullet)$ بحيث $K^*=K-\{0\}$.

إذا كان $\bullet$ تبديلي فنقول أن الحقل تبديلي

أمثلة: 1) $(Z,+,\bullet)$ ليست حقل لأن $Z^*=\{-1,1\}\neq Z-\{0\}$.

2) $(Q,+,\bullet)$، $(\Re,+,\bullet)$ و $(C,+,\bullet)$ هي حقول تبديليه

3) $(F(\Re,\Re),\oplus,\otimes)$ ليست حقل.

تعريف 5: ليكن $(K,+,\bullet)$ حقل و L جزء غير خالي من K.نقول أن L حقل جزئي اذا تحقق: K

1) L حلقة جزئية 2) من اجل كل $x\in L$ فان $x^{-1}\in L$

تمرين: لتكن E مجموعة و $A=P(E)$ مزودة بالقانون $\forall(X,Y)\in A^2: X\Delta Y=X\cup Y-X\cap Y$.

يسمى $A\Delta B$ بالفرق التناظري للمجموعتين A و B.

نعرف التطبيق f_A من E في $\Re$ بـ: $\forall x\in E; f_A(x)=1 \; si \; x\in A \; et \; f_A(x)=0 \; si \quad x\notin A$

1) برهن أن (A,Δ) زمرة تبديليه 2) برهن أن $(A,\Delta,\cap)$ حلقة تبديليه واحديه.

2) عين العناصر القابلة للقلب A^*. هل $(A,\Delta,\cap)$ حقل؟

سلسلة التمارين رقم 4

التمرين الأول :

لتكن $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية مزودة بـالعمليتين:

$\forall(a,b)\in\Re^2 : a\oplus b = a+b+1 \quad \wedge \quad a\otimes b = a.b+a+b$ حيث $+$,. الجمع و الضرب العاديين.

1) برهن أن $(\Re,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديليه واحديه مبينا العنصرين الحياديين $0_\Re$ و $1_\Re$

2) برهن أن $(\Re,\oplus,\otimes)$ حلقة تامة.

3) عين العناصر القابلة للقلب و استنتج أن $(\Re,\oplus,\otimes)$ حقل تبديلي.

التمرين الثاني:

- برهن أن المجموعة $Z_{(3)} = \left\{ x\in Q; x=\dfrac{a}{b}; b \text{ non divisible par } 3 \right\}$ حلقة جزئية من $(Q,+)$ تحتوي على Z و ليست حقل.

- برهن أن : $\forall x\in Q : x\in Z_{(3)} \text{ ou } x^{-1}\in Z_{(3)}$

التمرين الثالث: لتكن $(A,+,\times)$ حلقة غير تبديليه و $*$ القانون الداخلي المعرف بـ:

$$\forall(a,b)\in A^2 : a*b = a.b-b.a$$

1) برهن أن $*$ توزيعي على الجمع.

2) برهن أن $\forall(a,b)\in A^2 : a*b=-b*a$.

3) برهن أن :

$$\forall(x,y,z)\in A^3 : x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)=0 \qquad (1)$$

$$x*(y*z)-(x*y)*z=(z*x)*y$$

التمرين الرابع: نعرف على $\Re^2$ القانونين :

$$\forall(a,b),(c,d)\in\Re^2 : (a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$\forall(a,b),(c,d)\in\Re^2 : (a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc')$$

1) برهن أن $(\Re^2,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديليه واحديه و عين مجموعة العناصر القابلة للقلب.

2) استنتج أن $(\Re^2,\oplus,\otimes)$ حقل تبديلي.

3) برهن أن $i^2=-1$ حيث $i=(0,1)$ و استنتج العلاقة $\forall(x,y)\in\Re^2 : (x,y)=x+iy$

نسمي $(\Re^2,\oplus,\otimes)$ بمجموعة الأعداد المركبة و نرمز لها بـ: C

التمرين الخامس:

ليكن $(Q,+,\times)$ حقل الأعداد الناطقة و K جزء غير خالي من Q .

برهن أنه إذا كان K حقل جزئي فان $K=Q$.

التمرين السادس:

لتكن $(A,+,\times)$ و $(B,+,\times)$ حلقتين.نعرف على $A\times B$ العمليتين:

$$\forall(a,b),(a',b')\in A\times B : (a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$\forall(a,b),(a',b')\in A\times B : (a,b)\otimes(a',b')=(aa',bb')$$

1) برهن أن $(A\times B,\oplus,\otimes)$ هي حلقة.

2) ما هي الشروط التي تجعل $A\times B$ تبديليه؟واحديه؟

3) إذا كانت A و B تامتين فهل $A\times B$ تامة؟

التمرين السابع: أي المجموعات التالية هي حلقة جزئية من $(\Re,+,\times)$

$$H=\left\{a+b\sqrt{5} \,/\, a,b\in Z\right\} \quad , \quad G=\left\{a+b\sqrt[3]{5} \,/\, a,b\in Z\right\}$$

التمرين الثامن:

لتكن: $(\Re^2,\oplus,\otimes)$ حيث:

$$\forall(a,b),(a',b')\in\Re^2:(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b')$$
$$\forall(a,b),(a',b')\in\Re^2:(a,b)\otimes(a',b')=(aa'+bb',ab'+a'b)$$

1) برهن أن $(\Re^2,\oplus,\otimes)$ هي حلقة تبديليه واحديه.

2) عين عناصر $\Re^2$ التي تقبل مقلوب.

3) متى يكون الاستلزام: $(a,b)\otimes(x,y)=:(a,b)\otimes(u,v)\Rightarrow(x,y)=(u,v)$

التمرين التاسع:

ليكن $A=Z[i]=\{a+ib/a,b\in Q\}$ حيث Q مجموعة الأعداد الناطقة و $i^2=-1$

تأكد أن: $Q[i]\subset C$ ثم برهن أن: $Q[i]$ حلقة واحديه تبديليه

عين العناصر $z=a+ib$ القابلة للقلب.هل $Q[i]$ حقل جزئي من $(C,+,.)$؟

التمرين العاشر:

لتكن $(A,+,\bullet)$ حلقة واحديه.1) نفرض أن A تحقق $\forall x\in A; x^2=x\bullet x=x$.برهن الخواص التالية:

(1) $\forall x\in A; x+x=0$ و(2) A تبديليه.

2) لتكن $B=\{x\in A; x^2=x\}$. ا) برهن أنه إذا كان $x\in B$ فان $(1-x)\in B$

ب) نعرف على B العملية $\circ$: $\forall(x,y)\in B^2; x\circ y=x+y-2x\bullet y$.

برهن أن $(B,\circ,\bullet)$ هي حلقة تبديليه واحديه.

التمرين الحادي عشرة:

لتكن α إحدى الجذور العقدية للمعادلة $x^3-2=0$ نضع $A=\{x=a+b.\alpha+c.\alpha^2;(a,b,c)\in Q^3\}$.

برهن أن A حقل جزئي من $(C,+,.)$.

التمرين الثاني عشرة:

لتكن $A=\mathrm{P}(E)$ حيث E جزء غير خال.

1) احسب $A\Delta\phi, A\Delta E, A\Delta A$ حيث $\forall(A,B)\in L^2; A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

2) برهن أن $X_{A\Delta B}=X_A+X_B-2X_AX_B$ حيث $\forall A\in L; X_A: L\to\Re; X_A(x)=\begin{cases}1\ si\ x\in A\\0\ si\ x\notin A\end{cases}$

3) باستخدام الخاصية السابقة برهن أن Δ تجميعية على A .

4) برهن أن (A,Δ) هي زمرة تبديليه.

5) برهن أن $(A,\Delta,\cap)$ هي حلقة تبديليه.

التمرين الثالث عشرة:

برهن أن مجموعة الأعداد العشرية $D=\left\{\frac{a}{10^n};a\in Z,n\in N\right\}$ حلقة جزئية من $(Q,+,.)$.

برهن آن $x\in D$ قابل للقلب $\Leftrightarrow x=2^p.5^q$ بحيث $p\in N\wedge q\in N$

التمرين الرابع عشرة:

لتكن المجموعة $A=\left\{\frac{p}{q}; p\in Z,q\in N^*\wedge q\ impair\right\}$ حيث $|p|\wedge q$ اوليان فيما بينهما

1) برهن آن A حلقة جزئية من $(Q,+,.)$

2) برهن أنه اذا كان $\frac{p}{q}\in A$ قابل للقلب فان $|p|$ فردي

3) هل A حقل جزئي من $(Q,+,.)$ ؟ علل اجابتك.

كــــثـيـرات الـحـدود Polynômes

مفاهيم و خواص عامة

1- تعاريف: ليكن K حقل تبديلي $(K=Q \quad \vee \quad K=\Re \quad \vee \quad K=C)$

تعريف1: نسمي كثير حدود كل متتالية $P=(a_0,a_1,a_2,...,a_n,...)=(a_n)_{n\in N}$ لعناصر $a_n \in K$ معدومة ماعدا من اجل عدد منته أي يوجد $n\in N$ بحيث $a_n \neq 0$ و $\forall m>n: a_m=0$

نقول في هذه الحالة أن P من الدرجة n و نكتب $\deg p=n$ و نتفق على $\deg(0)_{n\in N}=-\infty$

نرمز لمجموع كثيرات الحدود بـ$K[X]$ و لكثير الحدود المعدوم $(0)_{n\in N}$

نزود $K[X]$ بالقانونين: $(a_n)_{n\in N}+(b_n)_{n\in N}=(a_n+b_n)_{n\in N}$

و $(a_n)_{n\in N}.(b_n)_{n\in N}=(c_n)_{n\in N} \;/\; c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0$

نتيجة 1) $(K[X],+)$ زمرة تبديليه عنصر ها الحيادي: $P=(a_n)_{n\in N} \;/\; a_n=0$ و نظير العنصر $P=(a_n)_{n\in N}$ هو $-P=(-a_n)_{n\in N}$

البرهان: + داخلية $\Leftrightarrow \forall p=(a_n)_{n\in N}, q=(b_n)_{n\in N} \in K[X]: p+q\in K[X]$

$$\left.\begin{array}{l} p=(a_n)_{n\in N}\in K[X]\to \exists n_1\in N, \forall n>n_1: a_n=0 \\ q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]\to \exists n_2\in N, \forall n>n_2: b_n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n>n_0=\max(n_1,n_2): a_n+b_n=0$$

$$\Rightarrow p+q\in K[X]$$

+ تجميعية $\Leftrightarrow \forall p=(a_n)_{n\in N}, q=(b_n)_{n\in N}, r=(c_n)_{n\in N}\in K[X]: (p+q)+r=p+(q+r)$

$$(p+q)+r=(a_n+b_n)_{n\in N}+(c_n)_{n\in N}=((a_n+b_n)+c_n)_{n\in N}=$$
$$(a_n+(b_n+c_n))_{n\in N}=(a_n)_{n\in N}+(b_n+c_n)_{n\in N}=p+(q+r)$$

+ تبديليه $\Leftrightarrow \forall p=(a_n)_{n\in N}, q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p+q=q+p$

$$p+q=(a_n+b_n)_{n\in N}=(b_n+a_n)_{n\in N}=q+p$$

+ تقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow \exists q=(a_n)_{n\in N}, \forall p=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p+q=q+p=p$

$$q=(a_n)_{n\in N}, p=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p+q=p \Leftrightarrow (a_n+b_n)_{n\in N}=(b_n)_{n\in N} \Leftrightarrow$$
$$\forall n: a_n+b_n=b_n \Leftrightarrow a_n=0 \Rightarrow q=(0)_{n\in N} \Rightarrow 0_{K[X]}=(0)_{n\in N}=(0,0,...,0,0...)$$

لكل عنصر نظير $\Leftrightarrow \forall p=(a_n)_{n\in N}, \exists q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p+q=q+p=0_{K[X]}$

$$p=(a_n)_{n\in N}, q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p+q=0_{K[X]} \Leftrightarrow (a_n+b_n)_{n\in N}=(0)_{n\in N} \Leftrightarrow$$
$$\forall n: a_n+b_n=0 \Leftrightarrow b_n=-a_n \Rightarrow q=(-a_n)_{n\in N} \Rightarrow -p=(-a_n)_{n\in N}$$

نتيجة 2) $(K[X],+,.)$ هي حلقة تبديليه واحديه عنصر ها الحيادي $1_{K[X]}=(1,0,0,..,0,...)$

البرهان: . داخلية $\Leftrightarrow \forall p=(a_n)_{n\in N}, q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]: p.q\in K[X]$

$$\left.\begin{array}{l} p=(a_n)_{n\in N}\in K[X]\to \exists n_1\in N, \forall n>n_1: a_n=0 \\ q=(b_n)_{n\in N}\in K[X]\to \exists n_2\in N, \forall n>n_2: b_n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n>n_0=n_1+n_2:$$

$$c_n=a_0\underbrace{b_n}_{=0}+a_1\underbrace{b_{n-1}}_{=0}+...+a_{n_1}\underbrace{b_{n-n_1}}_{=0}+\underbrace{a_{n_1+1}}_{=0}b_{n-n_1-1}+...\underbrace{a_n}_{=0}b_0=0 \Rightarrow p.q\in K[X]$$

$$\forall p\in K[X]: p.(1,0,0,..,0,...)=(a_0,a_1,...,a_n,...).(1,0,0,..,0,...)=(a_0,a_1,...,a_n,...)=p$$

بنفس الطريقة نثبت باقي الشروط.

نتيجة 3) كل كثير حدود من الدرجة n يكتب بشكل $p=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$

حيث $X=(0,1,0,..,0,...)$ يسمى بالمجهول أو غير المحدود.

البرهان: p من الدرجة $n \Leftrightarrow \forall k>n, a_k=0 \wedge a_n\neq 0$

$$\forall p=(a_n)_{n\in N}=(a_0,0,0..0..)+(0,a_1,0..0..)+\ldots+(0,0,\ldots,a_n,0..)=$$

$$a_0(1,0,0,\ldots,0,0,\ldots)+a_1(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots)+a_2(0,0,1,\ldots,0,0,\ldots)+\ldots+a_n\left(0,0,0,\ldots,\underset{n+1}{\underbrace{1}},0,\ldots\right)$$

$$X=(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots)\rightarrow X^2=(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots).(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots)=(0,0,1,\ldots,0,0,\ldots)\rightarrow$$

$$X^3=(0,0,1,\ldots,0,0,\ldots).(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots)=(0,0,0,1,\ldots,0,0,\ldots)\rightarrow X^n=X^{n-1}.(0,1,0,\ldots,0,0,\ldots)=$$

$$\left(0,0,0,\ldots,\underset{n+1}{\underbrace{1}},0,\ldots\right)\Rightarrow p=a_0 1+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$$

تعريف2 نقول أن $p=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ واحدي إذا كانت $a_n=1$

ملاحظة: $p=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\wedge a_n\neq 0 \Leftarrow p=\frac{a_0}{a_n}+\frac{a_1}{a_n}X+\ldots+X^n$ واحدي

نتيجة4) ليكن p و q كثيري حدود غير معدومين إذن:

1) كثير الحدود $p.q$ غير معدوم و لدينا $\deg(p.q)=\deg p.\deg q$

2) $(K[X],+,.)$ هي حلقة تامة

3) اذا كان $p+q\neq 0$ فان $\deg(p+q)\leq\max(\deg p,\deg q)$

4) اذا كان $\deg p\neq\deg q$ فان $\deg(p+q)=\max(\deg p,\deg q)$

البرهان: نضع $\deg p=n\wedge\deg q=m$ و $p=(a_k)_{k\in N}\wedge q=(b_k)_{k\in N}$

$$(a_k)_{k\in N}.(b_k)_{k\in N}=(c_k)_{k\in N}:c_{n+m}=a_0\underbrace{b_{n+m}}_{=0}+a_1\underbrace{b_{n+m-1}}_{=0}+\ldots+a_nb_m+\underbrace{a_{n+1}}_{=0}b_{m-1}+\underbrace{a_{n+m}}_{=0}b_0=a_nb_m$$

$$\Rightarrow p.q\neq 0\wedge\deg(p.q)=n.m=\deg p.\deg q$$

2) واضح من الإجابة السابقة أن $(K[X],+,.)$ لا تملك قواسم الصفر فهي حلقة تامة

3) بما ان $p+q\neq 0$ فان $\forall k>\max(n,m):a_k+b_k=0\rightarrow\deg(p+q)\leq\max(\deg p,\deg q)$

4) نفرض أن $\deg p<\deg q$ فان $a_m+b_m=b_m\neq 0\Rightarrow\deg(p+q)=\max(\deg p,\deg q)$

تعريف3) ليكن $p=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ نسمي كثير حدود المشتق

كثير الحدود $p'=a_1+2a_2X+\ldots+na_nX^{n-1}$

نتيجة5) لدينا $(p.q)'=p'.q+p.q'\wedge(p+q)'=p'+q'$

2- القسمة الاقليدية:Division euclidienne

أ)القسمة الاقليدية حسب القوى التنازلية:

تعريف4) ليكن p و q كثيري حدود .نقول أن q قاسم لـ p أو q يقسم p أو p مضاعف لـ q

إذا وجد كثير حدود Q بحيث $p=q.Q$ نسمي Q بحاصل القسمة.

أمثلة: 1) جميع كثيرات الحدود هي قواسم للصفر(كثير الحدود المعدوم) $0=0.p$

2) المضاعف الوحيد للصفر هو الصفر.

3) كثير الحدود $p=X^5+X+1$ و $p=X^2+X+1$ مضاعف لـ $p=X^3-X^2+1$

$$p=X^5+X+1=(X^2+X+1)(X^3-X^2+1)$$

4) $X-1$ قاسم لـ X^n-1 لأن $X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+..+X+1)$

نتيجة6) ليكن p و q كثيري حدود بحيث $p\neq 0$

إذا كان q قاسم لـ p فان حاصل القسمة Q وحيد

البرهان: $p\neq 0\Rightarrow q\neq 0$. نفرض أن $p=Q.q=Q'.q$ إذن:

$$q.(Q-Q')=0\Rightarrow(Q-Q')=0\Rightarrow Q=Q'$$

نتيجة7) ليكن p و q كثيري حدود غير معدومين

اذا كان q قاسم لـ p فان $\deg q\leq\deg p$

البرهان: $p=Qq\wedge p\neq 0\Rightarrow Q\neq 0\Rightarrow\deg Q\geq 0\Rightarrow\deg p=\deg q+\deg Q\Rightarrow\deg p\geq\deg q$

نتيجة8) ليكن p ، q و r ثلاثة كثيرات حدود غير معدومة.

1) اذا كان r قاسم لـ q و q قاسم لـ p فان r قاسم لـ p

2) اذا كان q قاسم لـ p و p قاسم لـ q فانه يوجد $\lambda \in K$ بحيث $p=\lambda q$

3) اذا كان r قاسم لـ q وقاسم لـ p فان r قاسم لـ $p+q$

البرهان:1) $p=Q.q \wedge q=Q_1.r \Longrightarrow p=Q.Q_1.r$ و منه r قاسم لـ p

$$(2) \quad p=Qq \wedge q=Q_1p \Longrightarrow \deg p=\deg Q+\deg q \wedge \deg q=\deg Q_1+\deg p$$

$$\deg Q_1 \geq 0 \wedge \deg Q \geq 0 \Rightarrow \deg p=\deg q$$

$$(3) \quad p=Q.r \wedge q=S.r \Longrightarrow p=(Q+S).r$$

نظرية1) ليكن p و q كثيري حدود بحيث $q \neq 0$

إذن يوجد كثيري حدود Q و R بحيث $p=Q.q+R$ و $R=0 \vee \deg R<\deg q$

نسمي Q حاصل القسمة و R باقي القسمة

البرهان: نجري القسمة الاقليدية حسب القوى التنازلية حتى نحصل على باقي R يحقق

$$R=0 \vee \deg R<\deg q$$

مثال $p=X^5+X^2+1$ و $q=X^2+X+1$ نجري القسمة

$$X^5+X^2+1=\left(X^2+X+1\right).\underbrace{\left(X^3+X^2+2\right)}_{Q}+\underbrace{(-2X-1)}_{R}$$

(ب)القسمة الاقليدية حسب القوى التصاعدية:

نظرية5) نفرض أن $K=\Re \vee K=C$

ليكن p و q كثيري حدود من الدرجة n و m على التوالي و $k \in N^*$

إذن يوجد كثيري حدود Q و R بحيث $p(X)=Q(X).q(X)+X^{k+1}R(X)$ و $R=0 \vee \deg Q \leq$

نسمي Q حاصل القسمة و R باقي القسمة

البرهان: نجري القسمة الاقليدية حسب القوى التصاعدية حتى نحصل على باقي $R_1(X)=X^{k+1}R(X)$

مثال:قسمة $p(X)=2-3X+4X^2-5X^3$ على $q(X)=1-X-X^2$ من الرتبة $k=3$

$$\begin{array}{ll}
2-3X+4X^2-5X^3 & 1-X-X^2 \\
2-2X-2X^2 & \underbrace{2-X+5X^2-X^3}_{Q} \\
-X+6X^2-5X^3 & \\
-X+X^2+X^3 & \\
5X^2-6X^3 & \\
5X^2-5X^3-5X^4 & \\
-X^3+5X^4 & \\
-X^3+X^4+X^5 & \\
+4X^4-X^5=X^4\underbrace{(4-X)}_{R} &
\end{array}$$

3- القاسم المشترك الأكبر:Plus grand commun diviseur

نظرية2) ليكن p و q كثيري حدود غير معدومين

إذن يوجد كثير حدود واحدي من أعلى درجة يقسم p و يقسم q

يسمى القاسم المشترك الأكبر و يرمز له بـ$PGCD(p,q)$

البرهان: نفرض أن $\deg q \leq \deg p$ إذن $p=Q_1.q+R_1$

اذا كان $R_1 \neq 0$ فان $q=Q_2R_1+R_2$ نكرر العملية حتى نحصل في المرحلة n على

$R_{n-2}=Q_nR_{n-1}+R_n \ ou \ R_n=0$ إذن $PGCD(p,q)=R_{n-1}$

حيث R_{n-1} هو كثير الحدود الواحدي الناتج من R_{n-1}

مثال: $p = X^4 + 4X^3 + X^2 - 16$ و $q = X^3 + 3X^2 - 3X + 4$ نجري القسمة

$$(1)\quad \underbrace{X^4 + 4X^3 + X^2 - 16}_{p} = \underbrace{(X^3 + 3X^2 - 3X + 4)}_{q}.\underbrace{(X+1)}_{Q_1} + \underbrace{(X^2 - X - 20)}_{R_1}$$

$$(2)\quad \underbrace{X^3 + 3X^2 - 3X + 4}_{q} = \underbrace{(X^2 - X - 20)}_{R_1}.\underbrace{(X+4)}_{Q_2} + \underbrace{(21X + 84)}_{R_2}$$

$$(3)\quad \underbrace{X^2 - X - 20}_{R_1} = \underbrace{(21X + 84)}_{R_2}\underbrace{\left(\frac{1}{21}X - \frac{5}{21}\right)}_{Q_3} \Rightarrow PGCD(p,q) = X + 4 \; car \; R_2 = \frac{1}{21}R_2$$

تعريف5 نقول أن p و q أوليان فيما بينهما إذا كان $PGCD(p,q) = 1$

مثال: $p = X^3 + 3X^2 + 1$ و $q = X^2 + 1$

$$X^3 + 3X^2 + 1 = (X^2+1).(X+3) + \underbrace{(-X-2)}_{R_1} \Rightarrow X^2 + 1 = (-X-2).(-X+2) + \underbrace{5}_{R_2}$$

$$\deg R_2 = 0 \Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow PGCD(p,q) = 1$$

نظرية Bezout

اذا كان $D = PGCD(p,q)$ فانه يوجد كثيري حدود U و V يحققان المعادلة $D = p.U + q.V$

4- جذر كثير الحدود: Racine d'un polynôme

تعريف6 ليكن p كثير حدود و $a \in K$ نقول أن a جذر ل p إذا كان $p(a) = 0$

مثال: 2- هو جذر لـ $p = X^3 + 3X^2 + X - 2$

نتيجة9 ليكن p كثير و $a \in K$:إذن:

1) باقي القسمة p على $X - a$ هو $p(a)$

2) a جذر لـ p $\Leftrightarrow$ $X - a$ قاسم لـ p

البرهان: $p(X) = Q(X-a) + R \wedge R = const \Rightarrow p(a) = R$

$$p(X) = Q(X-a) \Leftrightarrow p(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ جذر لـ } p$$

نتيجة10 إذا كان $\deg p = n \in N^*$ فان p يقبل على الأكثر n جذر

البرهان: نستخدم البرهان بالتراجع

$n = 1$ إذن $\Leftarrow$ $\alpha = \frac{-b}{a}$ $p = aX + b \wedge a \neq 0$ جذر واحد لـ p

$n \geq 2$ إذن إما p لا يقبل جذر في K أو له جذر هو α $\deg Q = n - 1 \wedge p = (X - \alpha).Q \Leftarrow$

إذن Q له على الأكثر $(n-1)$ جذر و بالتالي p يقبل على الأكثر n جذر.

أمثلة:

1) $p = X^2 - 2$ ليست له جذور في Q و له جذران في $\Re$ هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

2) $p = X^4 + 1$ ليست له جذور في $\Re$ و له 4جذور في C هي $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

تعريف7 ليكن p كثير حدود و $a \in K$ جذر لـ p

نقول أن a جذر بسيط إذا كان $(X-a)^2$ لا يقسم p

نقول أن a جذر مضاعف من الرتبة k إذا كان $(X-a)^k$ قاسم لـ p و $(X-a)^{k+1}$ لا يقسمه

نتيجة11) ليكن p كثير حدود $a \in K$ إذن لدينا:

1) a جذر بسيط لـ p $\Leftrightarrow$ $p(a) = 0 \wedge p'(a) \neq 0$

2) a جذر مضاعف من الرتبة k لـ p $\Leftrightarrow$ $p(a) = p'(a) = ... = p^{(k-1)}(a) = 0 \wedge p^{(k)}(a) \neq 0$

البرهان: نستخدم البرهان بالنقض. نفرض أن $p(a) = 0 \wedge p'(a) = 0 \Rightarrow p' = (X-a)Q_1$

$$p = Q.(X-a) \Rightarrow p' = Q + (X-a).Q' = (X-a)Q_1 \Rightarrow Q = (X-a).Q_2$$
$$\Rightarrow p = Q_2.(X-a)^2 \Rightarrow (X-a)^2 \ divise\ p$$

a جذر مضاعف من الرتبة k لـ $p \Leftarrow p = (X-a)^k Q$ بحيث $Q(a) \neq 0$

$$p = (X-a)^k Q \Rightarrow p(a) = 0, p' = (X-a)^k Q' + k.(X-a)^{k-1} Q \Rightarrow p'(a) = 0 \Rightarrow$$
$$p'' = (X-a)^k Q'' + 2k.(X-a)^{k-1} Q' + k.(k-1).(X-a)^{k-2} Q \Rightarrow p''(a) = 0$$

....

$$p^{(k)} = (X-a)^k Q^{(k)} + C_k^1.(X-a)^{k-1} Q^{(k-1)} + ... + k!Q \Rightarrow p^{(k)}(a) = k!Q(a) \neq 0$$

مثال: $p = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$

$$p' = 4X^3 - 12X^2 + 6X + 4 \quad , p'' = 12X^2 - 24X + 6 \quad , p''' = 24X - 24$$

(1-) جذر بسيط لان $p(-1) = 0 \wedge p'(-1) = -18 \neq 0$

(1) جذر بسيط لان $p(1) = 0 \wedge p'(1) = 2 \neq 0$

(2) جذر مضاعف من الرتبة الثانية لان $p(2) = 0 \wedge p'(2) = 0 \wedge p''(2) = 6 \neq 0$

نظرية D'alembert-Gauss

كل كثير حدود غير ثابت له جذر على الأقل في $C[X]$

و عليه نستنتج أن كل كثير حدود من الدرجة n له n في $C[X]$

5- تحليل كثير الحدود إلى عناصر أولية:

تعريف8:نقول أن p غير قابل للتحليل إذا كان يقبل القسمة على كثير الحدود الثابت و λp فقط.

أمثلة:

1) $p = X^2 - 2$ غير قابل للتحليل في $Q[X]$ بينما في $\Re[X]$ فان $p = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$

2) $p = X^4 + 1$ في $\Re[X]$ فان $p = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$

بينما في $C[X]$ فان $p = \left(X - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).\left(X - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).\left(X - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right).\left(X + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

نتيجة12) ليكن p و q كثيري حدود غير ثابتين.اذن الجذور المشتركة لـ q و p هي الجذور العقدية للقاسم المشترك الأكبر $D = PGCD(p,q)$

البرهان:نفرض أن α جذر لـ D إذن $D(\alpha) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = q(\alpha) = 0$ لان p و q مضاعفات لـ D

عكسيا $\alpha \in C$ جذر لـ p و q إذن $(X - \alpha)$ قاسم لـ p و q فهو قاسم لـ D $D(\alpha) = 0 \Leftarrow$

نتيجة13) ليكن p غير قابل للتحليل و $q \neq 0$ إذن اما p قاسم لـ q أو $D = PGCD(p,q) = 1$

البرهان: D قاسم لـ p إذن $D = PGCD(p,q) = 1$ أو $D = \frac{1}{a} p$ حيث $p = aX^n + ... + dX + e$ و منه p قاسم لـ q.

(أ) التحليل في $C[X]$: بما أن كل كثير حدود p من الدرجة n له n في $C[X]$ اذن:

$p = a.(X - \alpha_1)^{k_1} ... (X - \alpha_l)^{k_l}$ حيث k_j رتبة الجذر α_j نلاحظ أن $k_1 + k_2 + .. + k_l = n$

مثال:تحليل $p = X^6 + 1$ في $C[X]$

$$p = X^6 + 1 = 0 \rightarrow X^6 = -1 = i^2 = e^{i.\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \wedge X = e^{i\theta} \rightarrow 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k}{3}\pi$$

$$\rightarrow X_j = e^{i\theta_j} \ ou\ \theta_1 = \frac{\pi}{12}, \theta_2 = 5\frac{\pi}{12}, \theta_3 = 9\frac{\pi}{12}, \theta_4 = 13\frac{\pi}{12}, \theta_5 = 17\frac{\pi}{12}, \theta_6 = 21\frac{\pi}{12}$$

$$X^6 + 1 = (X - X_1).(X - X_2).(X - X_3).(X - X_4).(X - X_5).(X - X_6)$$

(ب) التحليل في $\Re[X]$: نعلم انه إذا كان p من الدرجة n له n جذر على الأكثر في $\Re[X]$

كما نعلم أن المعادلة $a.x^2 + bx + c = 0$ تقبل حل حقيقي $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ إذن

نتيجة14) كل كثير حدود p غير ثابت يحلل في $\Re[X]$ **بالشكل**

$$p = a.(X-\alpha_1)^{k_1}\dots(X-\alpha_l)^{k_l}.(\alpha_1 X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{J_1}\dots(\alpha_m X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{J_m}$$

حيث k_j رتبة الجذر α_j و $\Delta_j = (\beta_j)^2 - 4\alpha_j\gamma < 0_j$

مثال: تحليل $p = X^6 - 1$ في $\Re[X]$

نلاحظ أولا أن $p(1)=0 \wedge p(-1)=0$ إذن $p = (X^2-1).(X^4+X^2+1)$

$$p = (X^2-1).(X^2+\sqrt{2}X+1).(X^2-\sqrt{2}X+1)$$

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 5

التمرين الأول:

أجري القسمة الاقليدية لـ: P على q حسب القوى التنازلية

$$(1)\quad P = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9 \quad \wedge \quad q = X^2 - 5X^2 + 4 ; (2) \quad P = X^{18} - 1 \quad \wedge \quad q = X^3 - 1$$

التمرين الثاني:

أجري القسمة الاقليدية حسب القوى التصاعدية ل P على Q من الرتبة n حيث:

$$(1)\quad P = 1 \quad \wedge \quad Q = 1 + X^4 \quad n = 5 \quad ; (2) \quad P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12} \quad \wedge \quad Q = 1 - 2X^2 + X^4 \quad n = 5$$

التمرين الثالث:

عين قيم $(a,b) \in \Re^2$ حتى يكون $q = X^2 + 2$ قاسم لـ: $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

التمرين الرابع:

1- لتكن P كثير حدود.إذا كان باقي قسمة P على $X - a$ هو 1 و باقي قسمة P على $X - b$ هو (-1)

أحسب باقي قسمة P على $(X-a)(X-b)$ علما أن $b \neq a$

2- أحسب باقي قسمة $P = X^n + X + 1$ على $(X-1)^2$ حيث $n \in N^*$.

3- عين قيم $m \in N^*$ التي من أجلها يكون: $P = (X+1)^m - X^m - 1$ قابل للقسمة على $Q = X^2 + X + 1$

4- احسب جذور $P = X^6 + 1$ في $C[X]$.

التمرين الخامس:

أوجد باقي القسمة $p_n = (\cos\alpha + \sin\alpha.X)^n$ على $q = (X^2+1)^2$ حسب قيم $n \in N$

التمرين السادس:

برهن أن كثير الحدود $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^n}{n!}$ لا يملك جذور مضاعفة.(يمكن حساب: $P - P'$).

التمرين السابع:

أوجد القسم المشترك $PGCD(p,q)$ حيث $p(X) = X^3 - X^2 - X - 2$ و $q(X) = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$

التمرين الثامن:

ليكن $p(X) = X^6 - X^4$ و $q(X) = X^{25} + X + 1$

برهن دون حساب أن الجذور المشتركة ل: p و q هي جذور لـ $PGCD(p,q)$

عين جذور p في $C[X]$ و استنتج أن p و q أوليان فيما بينهم.

التمرين التاسع:

نضع $p(X) = X^5 - X^3 - 4X^2 - 3X - 2$.

1- أحسب القاسم المشترك الأكبر لـ p و p'.

2- اوجد جذور كثير الحدود $q(X) = X^2 + X + 1$ في $C[X]$.

3- استنتج أن p يقبل القسمة على $q^2 = (X^2 + X + 1)^2$.

4- حلل كثير الحدود p على شكل جداء لكثيرات حدود بسيطة في $\Re[X]$ ثم في $C[X]$.

التمرين العاشر:

ليكن كثير الحدود $p(X) = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1, q(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$

1) عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD(p,q)$.

2) حلل p و q إلى جداء كثيرات حدود بسيطة في $\Re[X]$.

3) أجري القسمة الاقليدية حسب القوى التصاعدية من الرتبة 2 لـ $p_1 = X^2 + 1$ على $q_1 = (X-2)^2$.

التمرين الحادي عشرة:

ليكن $p(X) = X^3 - X^2 - 2$

1- ليكن $q \in Z$ و $r \in N^*$ بحيث $PGCD(|q|,r)=1$ برهن أنه إذا كان $\frac{q}{r}$ جذر لـ p فان $r=1$

2- برهن انه اذا كان $\frac{q}{r}$ جذر لـ p فان $r=1$ و $q \in \{-2,-1,1,2\}$ و استنتج أن p لا يملك جذور في $Q[X]$

3- استنتج أن p غير قابل للتحليل في $Q[X]$

4- برهن أن p يقبل جذر حقيقي(غير مطالب بحسابه) $\alpha \in]1,2[$.

5- حلل P في $\Re[X]$ بدلالة α

التمرين الثاني عشرة:

ليكن $P = X^4 + X^3 + X^2 + 3$

1- أدرس جدول تغيرات التابع $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3$ و استنتج أن P ليست له جذور حقيقية .

2- هل P غير قابل للتحليل في $\Re[X]$

التمرين الثالث عشرة:

ليكن $P = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8$ كثير حدود

1) أحسب باقي قسمة P على $(X+1)^2$ دون إجراء عملية القسمة الاقليدية.

2) تأكد أن (-2) جذر مضاعف لـ P ما هي رتبته؟

3) حلل P إلى جداء عناصر بسيطة في $C[X]$.

4) استنتج جذور P في $C[X]$.

التمرين الرابع عشرة:

نعتبر كثيري حدود $P = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ و $Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$

1) عين القاسم المشترك الأكبر $D = PGCD(P,Q)$

2) استنتج الجذور الحقيقية المشتركة لـ P و Q .

3) حلل P و Q إلى جداء عناصر بسيطة في $\Re[X]$.

التمرين الخامس عشرة:

ليكن P كثير حدود من الدرجة الخامسة

اذا كان $P+1$ قابل للقسمة على $(X-1)^3$ و أن $P-1$ قابل للقسمة على $(X+1)^3$ فعين P

توجيه:فكر في P'

التمرين السادس عشرة:

ليكن $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 6$

1) نريد اثبات ان P لا يملك جذر مضاعف

أ) اجري القسمة الاقليدية لـ $2.P$ على $\frac{1}{2}P'$ و عين باقي القسمة R_0

ب) اجري القسمة الاقليدية لـ $\frac{1}{2}P'$ على R_0 و عين باقي القسمة R_1

جـ) برهن ان كان α جذر مضاعف لـ P فانه جذر لـ R_0 و جذر لـ R_1

د) استنتج أن P لا يملك جذر مضاعف

2) نريد تحليل P في $\Re[X]$

a) نضع $X = Y+1$ و $Q(Y) = P(X+1)$. احسب $Q(Y)$

b) اوجد جذور Q في $C[X]$

c) استنتج تحليل P الى عناصر بسيطة في $\Re[X]$

التمرين السابع عشرة:

من اجل $n \in N^*$ نضع :

$$Q_n(X) = X^n.(X+1)^2 \text{ و } P_n(X) = n.X^{n+2} - (n+2).X^{n+1} + (n+2).X - n$$

1) برهن أن $(X-1)^3$ قاسم لـ P_n

2) احسب باقي قسمة P_n على $(X+1)$ و استنتج أن -1 ليس جذر لـ P_n

3) برهن ان P_n و Q_n اوليان فيما بينهم .

4) حلل P_3 الى عناصر بسيطة في $\Re[X]$

التمرين الثامن عشرة:

1) ليكن $n \in N^*$ و $\alpha \in C$ ، $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ كثير حدود

برهن أنه اذا كانت المعاملات $a_i \in \Re$ و α جذر لـ p فان المرافق $\overline{\alpha}$ جذر كذلك

2) ليكن $p = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2$ و $q = X^3 - 1$

أ) اوجد القاسم المشترك الأكبر $D = PGCD(p, q)$

ب) استنتج أن p له جذر حقيقي يطلب تعيينه.ما هي رتبته؟

ج) تأكد أن $i\sqrt{2}$ جذر بسيط لـ p و استنتج أن $(X^2 + 2)$ قاسم لـ p كثير الحدود

د) حلل في p في $\Re[X]$ ثم في $C[X]$

المراجع

Cours d’algèbre, A. Hitta	512/15 Hit
Algèbre, Sedgbo	512(1)/57 Sep
Algèbre, F. Liret	512/233 Lir
Algèbre générale, L.	512/10 Les
Algèbre, J. Rivaud	512(1)/14 Riv
Algèbre 1, Baba Hamed	512(1)/84 Ham
الجبر 1، بابا حامد	512/36 حام
الجبر، عبد الوهاب بيبي	512(1)/19 بيب
تمارين في الجبر، برنار كالفو	512/1 كال

مصطلحات الجبر 1

A

abélien (groupe) : زمرة تبديلية associative : تجميعية addition :جمع Absurde:النقض
anneau unitaire : حلقة واحدية abscisse:فاصلة angle :زاوية Appartenance : انتماء
anneau: حلقة Antisymétrique :ضد تناظرية application linéaire :تطبيق خطي
application injective: تطبيق متباين application surjective :تطبيق غامر
application bijective: تطبيق تقابلي anneau commutatif : حلقة تبديلية
anneau intègre: حلقة تامة anneau principal :حلقة رئيسية

B

base :أساس base canonique :أساس قانوني barycentre :مركز الثقل Bijection :تقابل

C

Caractéristique :مميز cartésien :ديكارتي conjugué :مرافق Conjonction :وصل
centre d'un groupe: مركز الزمرة complément : متمم colonne :عمود commutative:تبديليه
coefficient: معامل composition : تركيب composante :مركبة Contraposée:عكس النقيض
corps: حقل coordonnées polaires:إحداثيات قطبية courbe :منحنى Classe :رتبة
Combinaison linéaire:مزج خطي Couple :زوج

D

dénombrable : قابلة للعد distributivité :توزيعية dimension :بعد diviseur: قاسم
diviseur de zéro :قاسم للصفر décomposition canonique : تحليل قانوني Disjonction :فصل
Degré :درجة Déterminent :محدد Développement :نشر Distance :مسافة Domaine : مجال

E

élément : عنصرélément maximal : عنصر أعظمي élément minimal : عنصر اصغري
élément neutre : عنصر حيادي élément symétrique: نظير العنصر Egalité :مساواة
endomorphisme: تشاكل داخلي ensemble fini: مجموعة منتهية équivalente:تكافؤ
ensemble infini : مجموعة غير منتهية ensemble ordonné : مجموعة مرتبة
espace vectoriel :فضاء شعاعي sous- espace vectoriel :فضاء شعاعي جزئي
espace vectoriel de dimension finie : فضاء شعاعي ذو بعد منته

F

facteur direct: عامل مباشر fonction d'Euler : تابع أولر fractions :كسر Faux :خاطئة
forme:شكل formule : قانون،دستور،صيغة famille génératrice : عائلة مولدة Fraction:كسر

G

groupe:زمرة groupe quotient : زمرة حاصل قسمة groupe produit:زمرة الجذاء Graphe :بيان

H-I

idéal :مثالي image:صورة indice:دليل isomorphisme :تشاكل تقابلي Impaire :فردي
inverse:مقلوب inversible (élément) : قابل للقلب Invariant :ثابت Inclusion:احتواء
isométrie :تقايس image directe : صورة مباشرة image réciproque :صورة عكسية
Imaginaire :تخيلي Inégalité :متراجحة Interne :داخلي Intersection:تقاطع Implication :استلزام

J – K-L

Loi de composition interne: قانون تركيب داخلي Loi externe:قانون خارجي Logique :منطق
linéairement indépendants: مستقلة خطيا linéairement dépendants : مرتبطة خطيا

M

matrice:مصفوفة matrice triangulaire:مصفوفة مثلثيةmatrice carré:مصفوفة مربعة
Majorant:حاد أعلى matrice unitaire: مصفوفة الوحدة matrice symétrique : مصفوفة تناظرية Minorant :حاد أدنى
Maximum : الحد الأعلى Minimum :الحد الأدنىmaximal (élément) :اكبر عنصر modulaire:معياري
morphisme:تشاكل multiplication: ضرب matrice diagonale:مصفوفة قطرية

N

norme : نظيم noyau (d'un morphisme):نواة التشاكل nature :طبيعة Négation :نفي

O

ordonné:مرتبة ordre d'un élément :رتبة العنصر opération :عملية

P

partie génératrice:مجموعة مولدة partie libre : مجموعة حرة Plan:مستوي Proposition :قضية

permutation: تبديل   permutation circulaire : تبديل دائري Point :نقطة
point fixe :نقطة ثابتة Principe :مبدأ   polynôme : كثير حدود Prolonge :تمديد
polynôme caractéristique:كثير حدود مميز   paire :زوجي
polynôme homogène : كثير حدود متجانس   partie:جزء
polynôme irréductible:كثير حدود غير قابل للاختزال période:دورة
polynôme symétrique:كثير حدود متناظر   périodique :دورية
polynôme unitaire:كثير حدود واحدي premier : أولي
primitif (élément): عنصر أصلي principal (anneau): حلقة رئيسية
produit d'anneaux:حلقة الجذاء   produit direct de groupes : جداء مباشر للزمر

Q

quadratique:تربيعي   quotient (d'un anneau) : حاصل قسمة Quantificateurs :مكممات
Quantificateur Universel :مكمم كلي Quantificateurs Existentiel :مكمم وجودي

R

racine:جذر   racine multiple :جذر مضاعف racine simple : جذر بسيط Récurrence : التراجع
rang (d'un groupe) : رتبة   nombre rationnel :عدد ناطق rayon :نصف القطر
relation d'équivalence: علاقة تكافؤ relation d'ordre :علاقة ترتيب Réflexive :انعكاسية
relation d'ordre totale:علاقة تريب كلي   Rotation : دوران   Reste :باقي

S-T

Sphérique :كروي Solution : حل Supplémentaire :إضافي Scalaire :سلمي
somme de sous-groupes : مجموع الزمر الجزئية   tableau :جدول
somme directe de groupes abéliens :الجمع المباشر للزمر ألتبديليه
sous-anneau:حلقة جزئية   sous-corps : حقل جزئي   stable:قار
sous-corps premier:حقل جزئي أولي   sous-groupe : زمرة جزئية
symétrique (élément) : نظير العنصر terme:الحد trace :أثر Translation : إزاحة
Transposée(d'une matrice):منقول مصفوفه   Théorème:نظرية

U - Z

Variation :تغيرات   Vrai :صحيحة Valeur absolue :قيمة مطلقة Valeur propre :قيمة ذاتية
Vecteur propre :شعاع ذاتي Vecteur :شعاع Vecteur ligne:شعاع سطري volume :حجم
vecteur unitaire:شعاع الوحدة vecteur colonne :شعاع عمودي
zéro (d'un polynôme): صفر كثير الحدود