جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
قسم الفيزياء

مقياس: الاهتزازات و الأمواج
السنة الجامعية 2021/2020

السلسلة رقم 01

التمرين 1 :

حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة بدون طرف ثان التالية:

a) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 0$ b) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$ c) $\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$

التمرين 2 :

حل المعادلات التفاضلية التالية علما أن: $y(0) = 0$ و $\dot{y}(0) = 0$.

a − $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$

b − $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\cos(5t)$ c − $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2$

التمرين 3: حل المعادلتين التفاضليتين: ا − $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^3 - 7t^2 + 2t - 1$

ب − $\ddot{y} - 4\dot{y} + 13y = 10\cos(2t) + 25\sin 2t$

حـل الـسلـسلـة

حل التمرين 1:

a) $\ddot{y}-4\dot{y}+3y=0$

نبحث عن حل من الشكل: $y(t)=e^{rt}$

بعد التعويض نحصل على المعادلة المميزة: $r^2-4\mathrm{r}+3=0 \Leftarrow \Delta=4$ للمعادلة جذران:

$r_1=1$ و $r_2=3$

و يكتب الحل المتجانس: $y_H(t)=A_1e^t+A_2e^{3t}$

b) $\ddot{y}-6\dot{y}+9y=0$

المعادلة المميزة: $r^2-6\mathrm{r}+9=0 \Leftarrow \Delta=0$ لها جذر مضاعف $r_0=3$

و يكتب الحل المتجانس: $y_H(t)=(A_1t+A_2)e^{3t}$

c) $\ddot{y}+\dot{y}+y=0$

المعادلة المميزة: $r^2+\mathrm{r}+1=0 \Leftarrow \Delta=-3$ ، للمعادلة جذران مركبان:

$r_1=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ و $r_2=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

يكتب الحل المتجانس: $y_H(t)=e^{-\frac{1}{2}}(Acos\frac{\sqrt{3}}{2}t+Bsin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

حل التمرين 2:

ا **–** a – $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=4$

حل المعادلة بدون طرف ثان: $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=0$. نبحث عن حل من الشكل: $y(t)=e^{rt}$

بعد التعويض نحصل على المعادلة المميزة: $r^2+3\mathrm{r}+2=0$

نحسب المحدد: $\Delta=b^2-4ac$ نجد: $\Delta=9-8=1>0$

إذن يوجد جذران مختلفان $r_{1,2}=\frac{-\mathrm{b}\mp\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$ و منه $r_1=-1$ و $r_2=-2$

و يكتب الحل المتجانس: $y_H(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

نبحث الآن عن حل خاص للمعادلة ذات الطرف الثاني و الذي يكون من نفس طبيعة الطرف الثاني أي

$y_P(\ \ )=Cte=C$ *بالتعويض:* $2y_P(t)=2C=4$ *إذن* $y_P(t)=C=2$

يكتب الحل العام للمعادلة

$$y(t)=y_H(t)+y_P(t)=2+A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

لتحديد الثابتين A_1 و $_2$ نستعمل الشروط الابتدائية:

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow 2 + A_1 + A_2 + 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \ \Rightarrow \ -A_1 - 2A_2 = 0$$

نستنتج : $A_2 = 2$ *و* $A_1 = -4$

و في الأخير يكتب الحل العام للمعادلة:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$\mathbf{b-}\ \ \ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{4}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{4}\boldsymbol{y} = \mathbf{2cos}\ (\mathbf{2}\boldsymbol{t}) \qquad \mathbf{(I)}$$

حل المعادلة بدون طرف ثان: $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$. نبحث عن حل من الشكل: $y(t) = e^{rt}$

بعد التعويض نحصل على المعادلة المميزة: $r^2 + 4\mathrm{r} + 4 = 0$

نحسب المحدد: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ لدينا جذر مضاعف $r_{1,2} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = -\frac{4}{2} = -2$

و يكتب الحل المتجانس: $y_H(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$

الحل الخاص ( ) y_P: $y_P(t) = y_0 \cos\,(2t + \varphi)$

$$\dot{y}(\mathrm{t}) = -2\mathrm{y}_0 \sin\,(2\mathrm{t} + \varphi)$$

$$\ddot{y}(\mathrm{t}) = -4\mathrm{y}_0 \cos\,(2\mathrm{t} + \varphi)$$

نعوض في **(I):**

$$-4\mathrm{y}_0 \cos(2\mathrm{t} + \varphi) - 8\mathrm{y}_0 \sin(2\mathrm{t} + \varphi) + 4y_0 \cos(2t + \varphi) = 2cos2t$$

$$-8\mathrm{y}_0(sin2tcos\varphi + sin\varphi cos2t) = 2cos2t \ \Rightarrow \begin{cases} -8y_0 sin\varphi = 2 \\ \ cos\varphi = 0 \end{cases}$$

و منه نستنتج: $\begin{cases} \ \varphi = \frac{3\pi}{2} \\ y_0 = 0.25 \end{cases}$ يكتب الحل الخاص: $y_P(t) = 0.25\cos\,(2t + \frac{3\pi}{2})$

الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t} + 0.25\cos\,(2t + \frac{3\pi}{2})$$

$$\mathbf{c-}\ \ \ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{4}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{5}\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$$

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{4}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{5}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}\ ;\ \ r^2 + 4\mathrm{r} + 5 = 0\ ;\ \ \Delta = -4 \Rightarrow r_1 = -2 + i\ , r_2 = -2 - i$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{y_H(t) = e^{-2t}(Acost + Bsint)}$$

$$\boldsymbol{y_P(t) = Cste = C\ \ \Longrightarrow 5C = 2\ \ \Longrightarrow C = \frac{2}{5}\quad \Longrightarrow\ \ y_P(t) = \frac{2}{5}}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = \boldsymbol{e^{-2t}(Acost + Bsint) + \frac{2}{5}}$

<u>حل التمرين 3:</u>

ا - $\boldsymbol{\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^3 - 7t^2 + 2t - 1}$

يكتب الحل العام على الشكل: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

الحل المتجانس $\boldsymbol{y_H(t)}$ للمعادلة: $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

المعادلة المميزة من أجل حل من الشكل $(t) = e^{rt}$**:** $\mathrm{r}^2 - 3\mathrm{r} + 2 = 0$

للمعادلة جذران حقيقيان، $r_1 = 1$ **و** $r_2 = 2$ و يكتب الحل المتجانس:

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^t$$

يكون الحل الخاص من نفس شكل الطرف الثاني: $y_P(t) = A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$

$$\dot{y}_P = 3A_3 t^2 + 2A_2 t + A_1$$

$$\ddot{y}_P(t) = 6A_3 t + 2A_2$$

نعوض في المعادلة التفاضلية: $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^3 - 7t^2 + 2t - 1$

$$6A_3 t + 2A_2 - 9A_3 t^2 - 6A_2 t - 3A_1 + 2A_3 t^3 + 2A_2 t^2 + 2A_1 t + 2A_0$$
$$= 2t^3 - 7t^2 + 2t - 1$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 2A_3 = 2 \\ -9A_3 + 2A_2 = -7 \\ 6A_3 - 6A_2 + 2A_1 = 2 \end{array}$$

$$2A_2 - 3A_1 + 2A_0 = -1$$

نستنتج $A_0 = 0$ **و** $A_1 = A_2 = A_3 = 1$

و منه: $y_P(t) = t^3 + t^2 + t$

و يكتب الحل العام : $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^t + c_2 e^t + t^3 + t^2 + t$

ب - $\ddot{\boldsymbol{y}} - \mathbf{4}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{13}\boldsymbol{y} = \mathbf{10}\mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{t}) + \mathbf{25}\ \boldsymbol{sin2t}$

حل المعادلة بدون طرف ثاني: $\ddot{y} - 4\dot{y} + 13y = 0$

المعادلة المميزة: $\mathrm{r}^2 - 4\mathrm{r} + 13 = 0$ المحدد: $\Delta = 16 - 52 = -36$

جذران مركبان: $r_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} = 2 + 3\mathrm{i}$ و $r_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$

$$y_H(t) = e^{2t}\left(\lambda e^{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t} + \mu e^{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t}\right)$$

و تكتب على الشكل: $y_H(t) = e^{2t}(Acos3t + Bsin3t)$

الحل الخاص: نبحث عن حل من الشكل $y_P(t) = Acos2t + Bsin2t$

$$\dot{y}_P = -2Asin2t + 2Bcos2t \quad ; \quad \ddot{y}_P = -4Acos2t - 4Bsin2t = -4y_P$$

نعوض في المعادلة

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 13y = 10\cos(2t) + 25\ sin2t$$

$8Asin2t - 8Bcos2t + 9Acos2t + 9Bsin2t = 10cos2t + 25sin2t$ من هنا نجد: $B = 1$ و $A = 2$

إذن $y_P(\quad) = 2cos2t + sin2t$

الحل العام $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = e^{2t}\left(\lambda e^{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t} + \mu e^{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t}\right) + 2cos2t + sin2t$