

CH I : Concepts de base et lois de conservation

I) Hypothèses de l'hydrodynamique :

- Milieu fluide continu : le fluide, jusqu'à des volumes infiniment petits, garde ses propriétés inchangées. Ces propriétés du milieu continu varient de façon continue d'un point à un autre.
- fluide newtonien : lorsque les contraintes tangentielles dans un écoulement sont reliées au gradient de vitesse de manière linéaire, le liquide est dit newtonien. De manière générale, on écrit :

$$\tau^n = \mu \frac{dv}{dy} \quad \left| \quad \tau = \frac{dF}{dS}$$

τ : Contrainte tangentielle

F : force de frottement

S : Surface de contact

dv/dy : gradient de vitesse

μ : viscosité dynamique

n : exposant

pour $n = 1 \rightarrow$ fluide newtonien

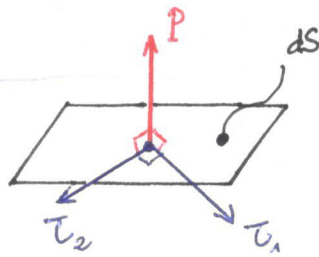
$n = 0 \rightarrow$ fluide parfait

II) Champs des forces extérieures :

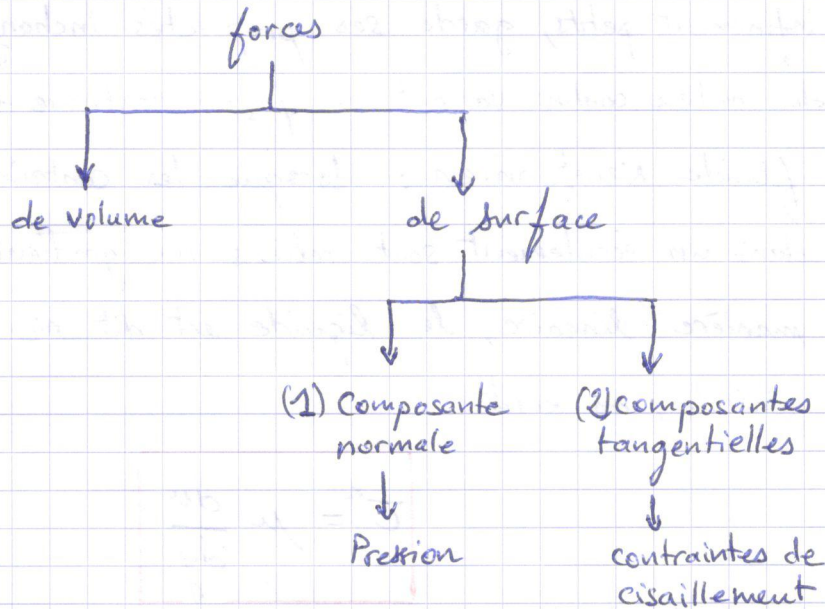
Les forces agissant sur un fluide sont de deux types :

$\rightarrow$ forces de volume (massiques) : agissant sur la masse entière. exple : inertie, poids, magnétisme... etc.

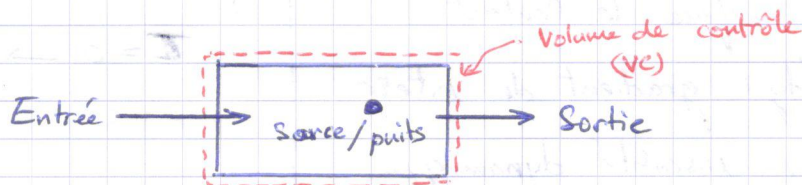
$\rightarrow$ forces de surface : agissant sur une surface de séparation entre deux parties d'un corps ou deux milieux différents. Sur une surface dS , on distingue trois (03) composantes : 1 normale et 2 tangentielles.



En résumé :



III) Principes fondamentaux de conservation :

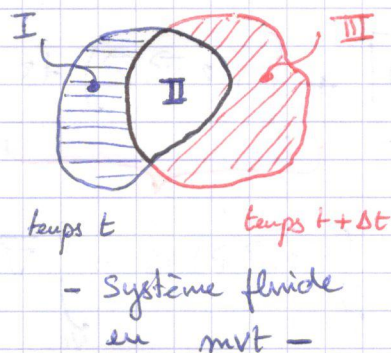


On considère un volume de contrôle dans un système fluide en mouvement. Le bilan d'une certaine quantité dans le volume de contrôle s'écrit :

$$\text{Entrée} - \text{Sortie} \pm \begin{matrix} \text{Source} \\ \text{ou} \\ \text{puits} \end{matrix} = \text{changement.}$$

En MDF, on utilise la description Eulerienne $\rightarrow$ nécessité de passer (transformation) Lagrangienne $\leadsto$ Eulerienne $\Rightarrow$ usage du Théorème de Transport de Reynolds (TTR).

• Théorème de Transport de Reynolds:



II : Volume de contrôle (Vc)

ϕ : propriété extensive : (masse, quantité de mv $\pm$, énergie ... etc)

Sc : section de contrôle

$\vec{n}$: vecteur normal à la section dS

Le TTR s'écrit :

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\text{sys}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{Vc} + \int_{Sc} \rho \frac{\phi}{m} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

c'est une généralisation du théorème de Leibniz.

On écrit aussi le TTR :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{Vc} f dV}_{\text{variation totale}} = \underbrace{\int_{Vc} \frac{\partial f}{\partial t} dV}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\int_S f \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux}}$$

où : $\phi = \int_V f dV$ et dV : élément de volume.

Les trois (03) principe de l'hydrodynamique peuvent être déduit à partir du TTR.

• Principe de conservation de la masse:

Dans ce cas $\phi = m = \int_V \rho dV$

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sys}} = \underbrace{\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{Vc}}_{\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vc} \rho dV} + \int_V \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

→ volume de contrôle indéformable $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV)$

→ volume de contrôle stationnaire $\Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0$

On aura alors :

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sys} = 0 = \int_{Vc} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) \right] + \underbrace{\int_{Sc} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS}$$

→ Théorème de Gauss $\rightarrow \int_{Sc} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{Vc} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$

$$\Rightarrow \int_{Vc} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

ég. de continuité
sous forme différentielle.

→ écoulement incompressible $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\rho = \text{cte}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

→ écoulement compressible stationnaire :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

• Principe de conservation de la quantité de mouvement

$$\phi = m\vec{v} = \int dm \vec{v} = \int (\rho dV) \cdot \vec{v}$$

$$\text{TTR} \Rightarrow \underbrace{\left. \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \right|_{sys}}_{\sum \vec{F}_{ext}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vc} \rho \vec{v} dV + \int_{Sc} (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \int_{Vc} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{Sc} (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}$$

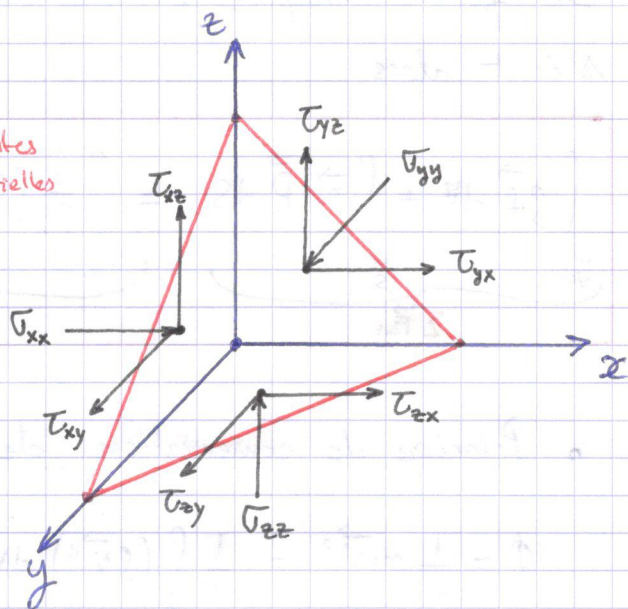
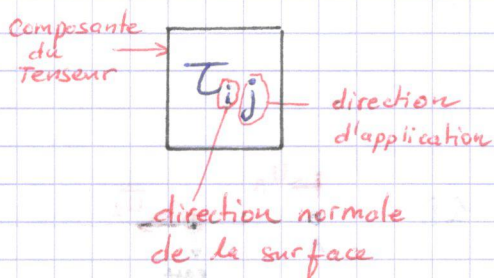
Les composantes des forces de surface autour d'un point sont groupées dans un tenseur des contraintes $\vec{\vec{P}}$.

Contraintes normales

Contraintes tangentielles

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

avec la notation.



Ici $\bar{\bar{P}}$: est un tenseur symétrique : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
 $\rightarrow$ fluide en repos $\Rightarrow \tau_{ij} = 0$ et $\tau_{ii} =$ Pression hydrostatique

On peut exprimer $\bar{\bar{P}}$ comme suit : $\bar{\bar{P}} = -p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{U}}$

Avec

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tenseur unitaire}$$

et

$$\bar{\bar{U}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} + p & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} + p & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} + p \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ liquide parfait $\Rightarrow \bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ On peut représenter les force de surface donc comme suit :

$$\vec{F}_s = \int_s \vec{n} \cdot \bar{\bar{P}} \, ds$$

$\rightarrow$ Les forces de volume peuvent s'exprimer comme :

$$\vec{F}_v = \int_v \rho \vec{f} \, dV \quad \text{avec : } \vec{f} : \text{accélération.}$$

La forme intégrale du théorème de conservation des q^{tes} de $m\vec{v}$ s'écrit alors

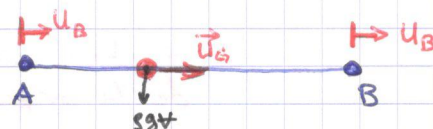
$$\underbrace{\int_{V_c} \vec{f} dV + \int_{S_c} \vec{n} \bar{P} dS}_{\Sigma \vec{F}_{ext}} = \underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{S_c} (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}_{\frac{d}{dt}(m\vec{v})}$$

• Principe de conservation de l'énergie

$$\phi = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \int_V (\rho \vec{v}^2) dV$$

Le long d'une ligne de courant en 1D

on a : $\phi = \frac{1}{2} \int_A^B \rho u^2 dx$



Par ailleurs : $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \int_A^B \rho \frac{d}{dt} (u^2) dx = \text{Puissances des forces appliquées}$

$$\frac{1}{2} \int_A^B \rho \frac{d}{dt} (u^2) dx = sgx u_G + P_A u_A - P_B u_B = \frac{d\phi}{dt}$$

P_A et P_B : pressions exercées sur A et B

u_G : vitesse du centre de gravité de la masse

u_A et u_B : vitesses en A et B

Régl

$dE_c = \text{Travail}$

$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\text{Travail}}{\text{temps}} = \text{Puissance}$

$\frac{d\phi}{dt} = \text{Puiss.} = \text{Force} \times \text{vitesse}$

$$\rightarrow sgx u_G + P_A u_A - P_B u_B = \int_A^B \left[sgx u - \frac{\partial}{\partial x} (pu) \right] dx$$

$$= \int_A^B \left[-u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (pu) \right] dx$$

$$= \int_A^B \left[-u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx$$

Où ψ désigne le potentiel de gravitation : $-sg = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi = -sgx$

$\rightarrow$ on a donc :

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_A^B \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} (u^2) dx = \int_A^B \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \int_A^B \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial (u\psi)}{\partial x} \right] dx$$

$$\text{où : } \varphi = \rho \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_A^B \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u\varphi)}{\partial x} \right] dx = \int_A^B \left[-u \frac{\partial}{\partial x} (\varphi + p) - p \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx$$

Ainsi, sous forme différentielle (locale),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (\varphi + p) + (\varphi + p) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Cette expression se simplifie quand :

- l'écoulement est incompressible : $\rho = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (ppe de continuité)
- l'écoulement est permanent (stationnaire) : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

On aboutit alors à :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\varphi + p] = 0$$

Soit :

$$\boxed{\varphi + p = \text{cte}}$$

La somme de l'énergie cinétique, énergie potentielle et de la pression doit rester constante. Cette relation scalaire est appelée équation de Bernoulli.