Dans ce chapitre, on présentera de manière simplifiée les notions mathématiques et physiques de base, requises pour l'étude des phénomènes vibratoires et des ondes.

1/ phénomènes périodiques

Un phénomène est dit périodique dans le temps si son mouvement se répète identiquement à lui-même pendant des intervalles de temps successifs et égaux. La durée de ces intervalles est appelée la période T ([T]= s).

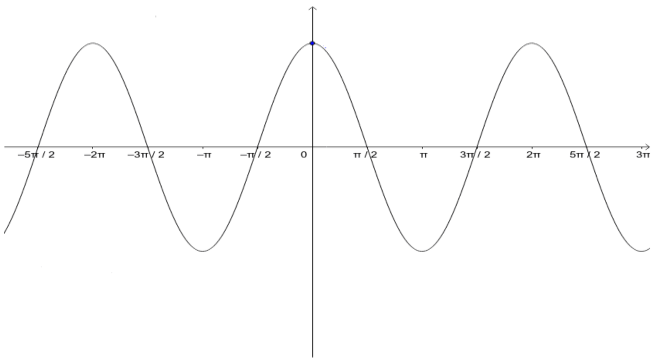
2/ Fonctions périodiques

Soit une fonction f(t). Si cette fonction est périodique de période T, on peut écrire :

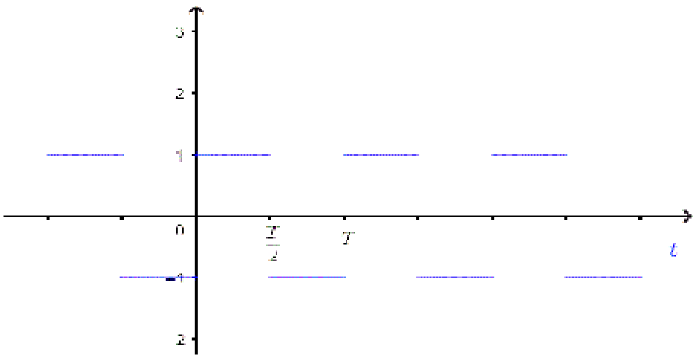
$$f(t)= f(t+T)= f(t+2T)= \dots\dots\dots f(t+nT) \quad / \text{ n : entier}$$

Exemples :

- f (t)=cos t de période T=2π



- $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -1, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$



Valeur moyenne d'une fonction périodique :

$$f_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

3/ Séries de Fourier

Une fonction périodique f(t) de période T peut être développée en une série de fonctions sinusoïdales appelée série de Fourier. Cette dernière est donnée par :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier et sont calculés comme suit :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$$

Remarques :

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, obtenu pour *n=0* dans l'expression de a_n , est la valeur moyenne de $f(t)$.
- Si $f(t)$ est paire ($f(t)= f(-t)$) $\Rightarrow$ b_n=0.
- Si $f(t)$ est impaire ($f(t)=-f(t)$) $\Rightarrow$ a_n=0.

Application :

Développer en séries de Fourier la fonction $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T/2 \\ -1, & T/2 \le t \le T \end{cases}$

Réponse : a_n= a_0 = 0 (fonction impaire) ;

Si n est paire : n=2p, b_{2p}=0

Si n est impaire : n=2p+1, $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$

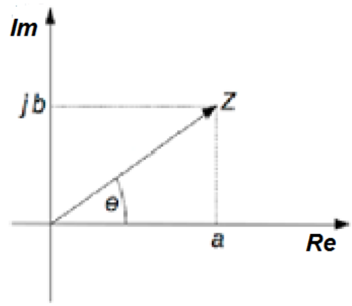
$$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin\,(2p+1)\omega t$$

Les séries de Fourier seront utilisées pour l'étude des systèmes vibratoires forcés soumis à des excitations périodiques quelconques.

4/ Nombres complexes

Un nombre complexe *z* est représenté par :

$$z = a + jb = |z|\,(\cos\theta + j\,sin\theta) = |z|\,e^{j\theta}$$



avec :

- *a* et *b* sont, respectivement, les parties réelle (*Re*) et imaginaire (*Im*) de *z* ;
- *j* est le nombre imaginaire : $j^2 = -1$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module de *z* ;
- $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ est l'argument de *z*.

Notation complexe :

Soit une fonction sinusoïdale du temps : *x(t) = A cos (ωt+ φ)*

En représentation complexe, x(t) s'écrit sous la forme : $\overline{x(t)} = A\, e^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = A^{\star}e^{j\omega t}$

A : amplitude réelle ; $A^{\star}$: amplitude complexe ($A^{\star} = Ae^{j\varphi}$) ; ω : pulsation ; φ : déphasage.

Lors des calculs, et en particulier pour la résolution des équations différentielles régissant les mouvements des systèmes vibratoires, cette notation est recommandée pour faciliter l'étude des solutions.

5/ Equation fondamentale de la dynamique

- **Translation :**
  Les mouvements des systèmes mécaniques en translation sont régis par l'équation :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = m\vec{\gamma} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$: somme (résultante) de toutes les forces agissant sur le système ; *m* : masse du système ; *x* : position ; *v* : vitesse linéaire; *γ* : accélération linéaire.

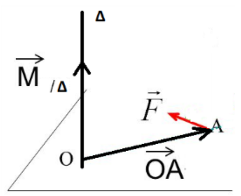
- **Rotation :**
  Les mouvements des systèmes mécaniques en rotation par rapport à un axe Δ sont régis par l'équation :

$$\overrightarrow{M_{/\Delta}} = \sum_i \overrightarrow{M_{i_{/\Delta}}} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

$\overrightarrow{M_{/\Delta}} = \sum_i \overrightarrow{M_{i_{/\Delta}}}$: somme (résultante) de tous les moments des forces calculés par rapport à l'axe de rotation ; J : moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation ; $\ddot{\theta}$: accélération angulaire du système.

Le moment d'une force par rapport à un axe de rotation est le produit vectoriel du vecteur position du point d'application de cette force par le vecteur force. Si $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur position de la force, son moment est donné par :

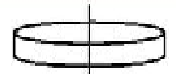
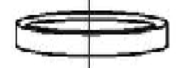
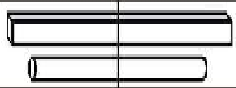
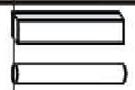
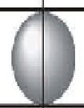
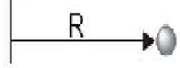
$$\overrightarrow{M_{/\Delta}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$



Le moment $\overrightarrow{M_{/\Delta}}$ est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$. Ce moment est nul si la direction de la force passe par l'axe de rotation ou si les vecteurs position et force sont colinéaires.

6/ Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide en rotation par rapport à un axe est l'analogue de la masse d'un système soumis à un mouvement de translation (accélération linéaire). Sa valeur dépend de la forme géométrique du solide et de l'axe de rotation. Sa dimension est *[J]= kg.m²*. Quelques expressions de ce moment sont données ci-dessous.

	$\frac{1}{2}MR^2$
	MR^2
	$\frac{1}{12}ML^2$
	$\frac{1}{3}ML^2$
	$\frac{2}{5}MR^2$
	MR^2

Théorème de HUYGENS

Le moment d'inertie J_Δ d'un corps solide de masse M par rapport à un axe de rotation Δ distant d'une distance d par rapport à son centre de gravité G est donné par :

$$J_\Delta = J_G + Md^2$$

J_G : moment d'inertie calculé par rapport à un axe passant par G et parallèle à Δ.

7/ Nombre de degrés de liberté et coordonnées généralisées

Le nombre de degré de liberté (*ddl*) est le nombre de coordonnées indépendantes nécessaires et suffisantes pour déterminer la position d'un système en mouvement. Ces coordonnées indépendantes sont appelées coordonnées généralisées.

- **Vitesses généralisées**
  Soit un système à n coordonnées généralisées de coordonnées q_i *(i=1, 2, …….n).* La vitesse généralisée $\dot{q}_i$ selon le *ddl i* est donnée par :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

- **Accélérations généralisées**
  Elles correspondent à la deuxième dérivée par rapport au temps des coordonnées généralisées :

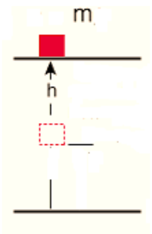
$$\ddot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}$$

8/ Energie mécanique

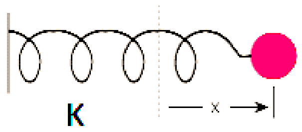
- Energie cinétique : $\begin{cases} Translation : \; E_c = \frac{1}{2} m v^2 \\ Rotation : \; E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \end{cases}$

- Energie potentielle : elle est fonction des coordonnées du système, $E_p = f(q_i)$. On peut citer comme exemples :

  - l'énergie potentielle de pesanteur $E_p=mgh$, h : hauteur

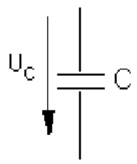


  - l'énergie d'élasticité d'un ressort $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, k : constante de raideur, x : allongement ou compression du ressort

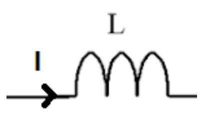


9/ Energie électrique et magnétique

- Energie électrique emmagasinée dans un condensateur : $W_e = \frac{1}{2} C U_c^2$,
  C : capacité du condensateur, U_c : tension aux bornes du condensateur.



- Energie magnétique d'une bobine : $W_m = \frac{1}{2} L I^2$,
  L : inductance de la bobine ; I : courant électrique traversant la bobine.



10/ Conservation de l'énergie

Pour les systèmes conservatifs (sans dissipation d'énergie), l'énergie totale est conservée (égale à une constante).

11/ Energie de dissipation

- Frottement visqueux : c'est le ca qui sera considéré dans ce cours pour l'étude des systèmes vibratoires. Le frottement est dit visqueux si la force de frottement est proportionnelle et opposée à la vitesse $\vec{v}$ de déplacement du système (cas des vitesses faibles),

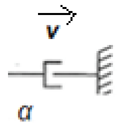
$$\vec{F} = -\,\alpha\,\vec{v}$$

α : coefficient de frottement ou d'amortissement

- Fonction ou énergie de dissipation : pour le cas du frottement visqueux, c'est une fonction quadratique des vitesses généralisées.

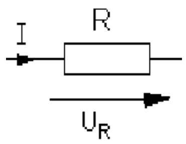
Cas d'un amortisseur de constante d'amortissement α animé d'une vitesse $\vec{v}$:

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$$



Cas d'une résistance *R* traversée par un courant *I*:

$$D = \frac{1}{2} R I^2$$



12/ Lagrangien et équation de Lagrange

Pour un système en mouvement, Le Lagrangien est une fonction des coordonnées et vitesses généralisées :

$$L = E_c - E_p = f(\dot{q}, \ddot{q})$$

Cette fonction permet de déduire l'équation de Lagrange générale qui représente l'équation différentielle régissant le mouvement des systèmes vibratoire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + f_i(t)$$

$f_i(t)$ est la force (ou moment) généralisée qui agit sur le système suivant le *ddl* q_i (excitation externe pour les système forcés). Cette équation sera réécrite par la suite pour chaque cas de système vibratoire.