- ABAQUE DE SMITH

1. Introduction

Nous avons bien établi que :

$$\rho(x) = \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c} \qquad (1)$$

Posons $z(s)=Z(x)/Z_c$ et $\rho(x)=\Gamma(s)$ avec $s=j\omega$, alors $z(s)$ et $\Gamma(s)$ sont reliés par la relation suivante:

$$\Gamma(s) = \frac{z(s) - 1}{z(s) + 1} \qquad (2)$$

Si on connaît $\Gamma(s)$, il est donc possible de calculer z. tous deux sont complexes. Le calcul est donc complexe. L'abaque de Smith, que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre, va permettre d'effectuer ce calcul graphiquement. Il n'est pas bien entendu pas question de prétendre se passer de machine pour calculer cette transformation, mais nous verrons que, plus qu'un outil de calcul, l'abaque de Smith est un outil indispensable, d'abord pour présenter des résultats, mais surtout comme outil graphique de réflexion sur des problèmes complexes.

2. Construction de l'Abaque de Smith

On pose :

$z(s)$=a+jb

et

$\Gamma = X + jY$.

La relation (2) devient :

$$\Gamma = \frac{a-1+jb}{a+1+jb} = \frac{[a-1+jb]\,[a+1-jb]}{[a+1+jb]\,[a+1-jb]} = \frac{a^2-1+b^2+j2b}{(a+1)^2+b^2} \qquad (3)$$

D'où :

$$X = \frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2} \qquad (4)$$

Et :

$$Y = \frac{2b}{(a+1)^2+b^2} \qquad (5)$$

a. **Quel est le lieu de Γ lorsque la partie réelle de z est constante et que b varie ?**

On montre que :

$$\left(X-\frac{a}{a+1}\right)^2+Y^2=\frac{1}{(a+1)^2} \qquad (6)$$

est l'équation d'un cercle de centre $(X_0, Y_0)=(a/(a+1), 0)$ et de rayon $R=1/(1+a)$.

On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite horizontale passant par Y=0 (figure 1).

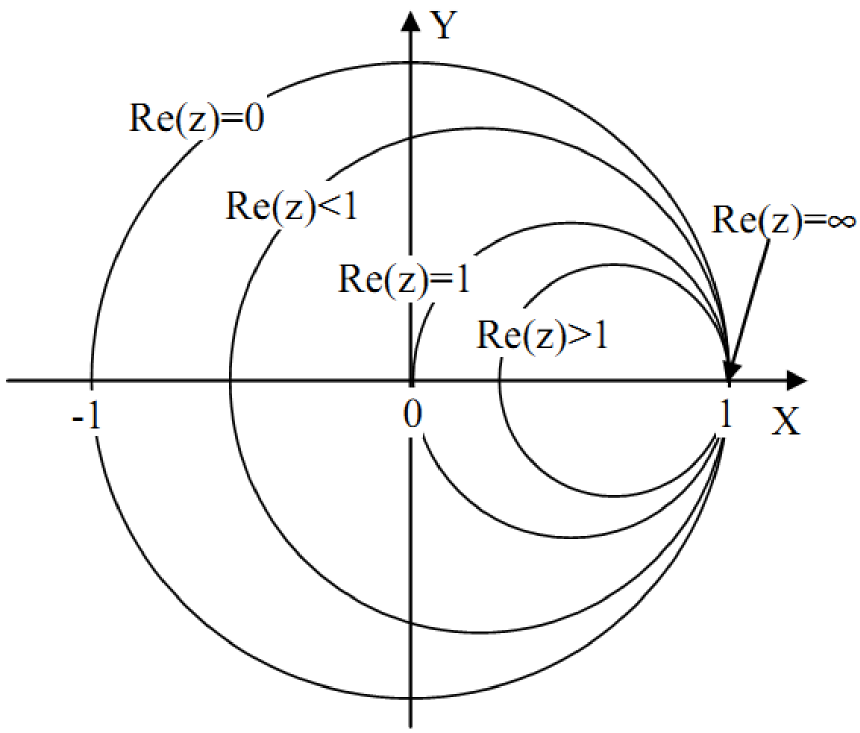

Figure 1. famille de cercles représentant le lieu de Γ lorsque la partie réelle de z est constante.

b. **Quel est le lieu de Γ lorsque b la partie imaginaire de z est constante et que a varie ?**

On montre que :

$$(X-1)^2+\left(Y-\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{b^2} \qquad (7)$$

est l'équation d'un cercle de centre $(X_0, Y_0)=(1, 1/b)$ et de rayon $R=1/b$.

On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite verticale passant par X=1(figure 2).

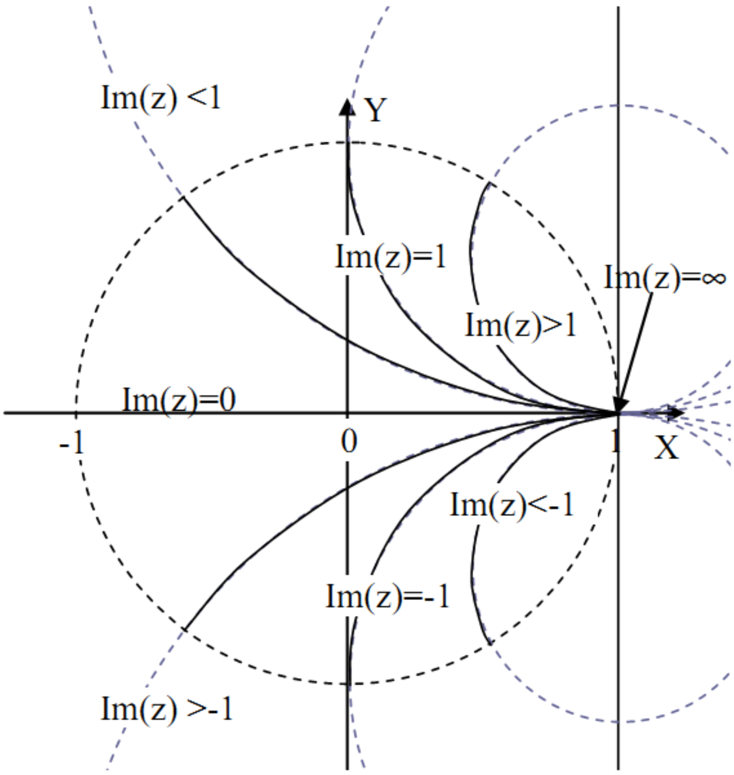

Figure 2. famille de cercles représentant le lieu de Γ lorsque la partie imaginaire de z est constante.

On a limité le tracé des cercles aux parties comprises à l'intérieur du cercle $|\Gamma|<1$ car on se limite aux cas des circuits passifs pour lesquels le module de Γ ne peut être supérieur à 1. Dans le cas des circuits actifs, cette limitation "saute".

3. *Abaque de Smith et utilisation pratique*

L'abaque de Smith est donc le tracé des cercles Re(z)=cste et des cercles Im(z)=cste sur le plan complexe de Γ, comme le montre la figure 3 suivante :

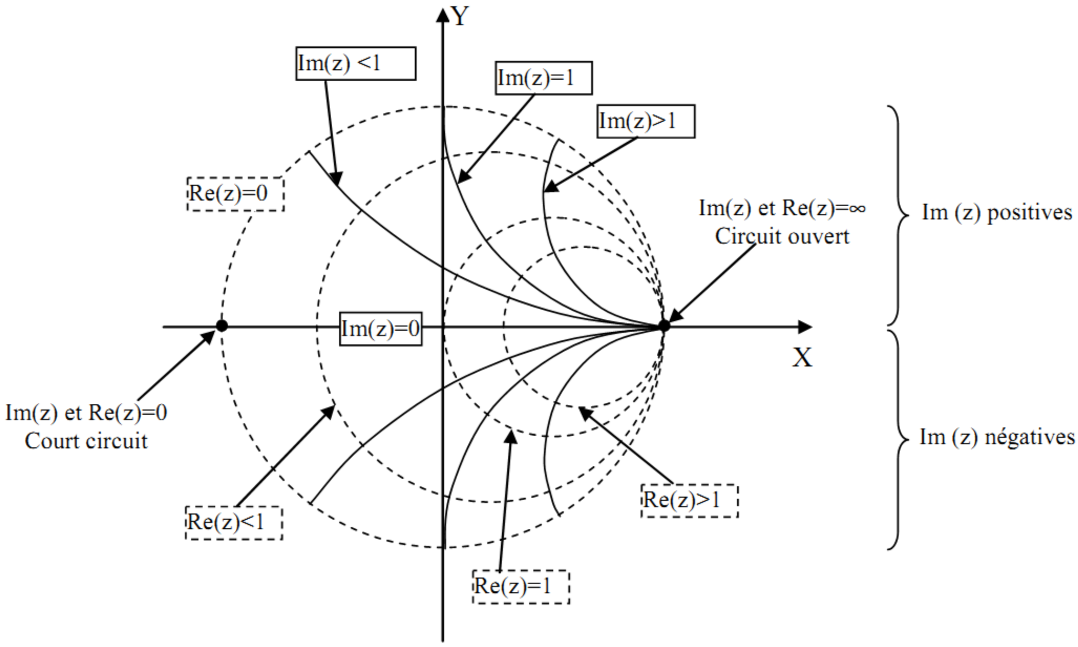

Figure 3. Abaque de Smith.

L'Abaque que nous utiliserons le plus souvent se présente comme la figure 4 suivante. Elle comporte de nombreuses indications supplémentaires.

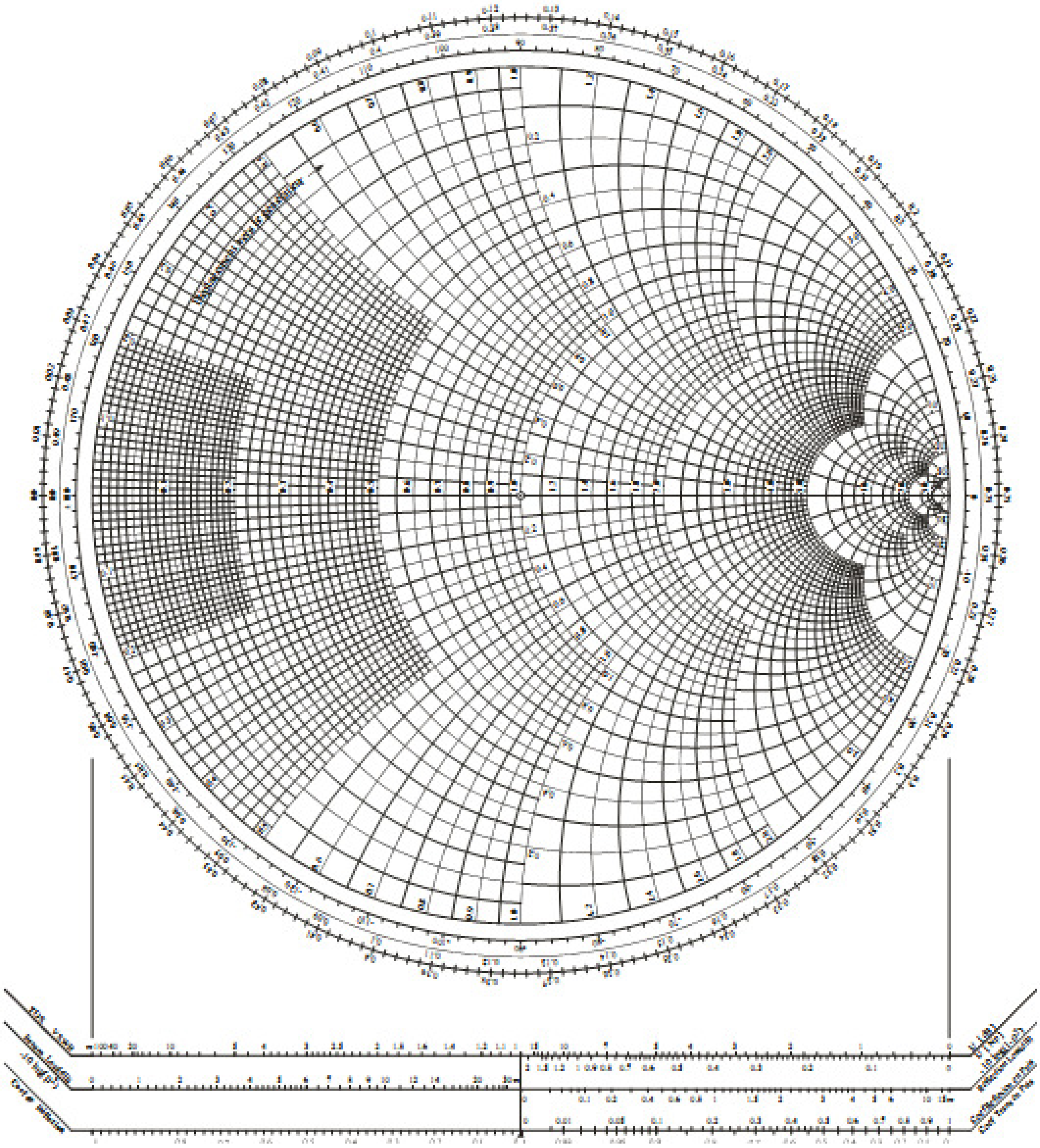

Figure 4. Abaque de Smith conventionnelle.

On peut placer par exemple $z=0.3+j0.5$ en figure 5. Pour mesurer $\Gamma=\rho e^{j\theta}$, il suffit de mesurer la longueur du segment ρ sachant le rayon du grand cercle vaut 1 (règle de 3) et de mesurer l'angle θ grâce à l'échelle extérieure (en degrés) ou d'utiliser les autres échelles en faisant une règle de 3. Ici par exemple $\Gamma=0.62\ e^{j\ 123°}$

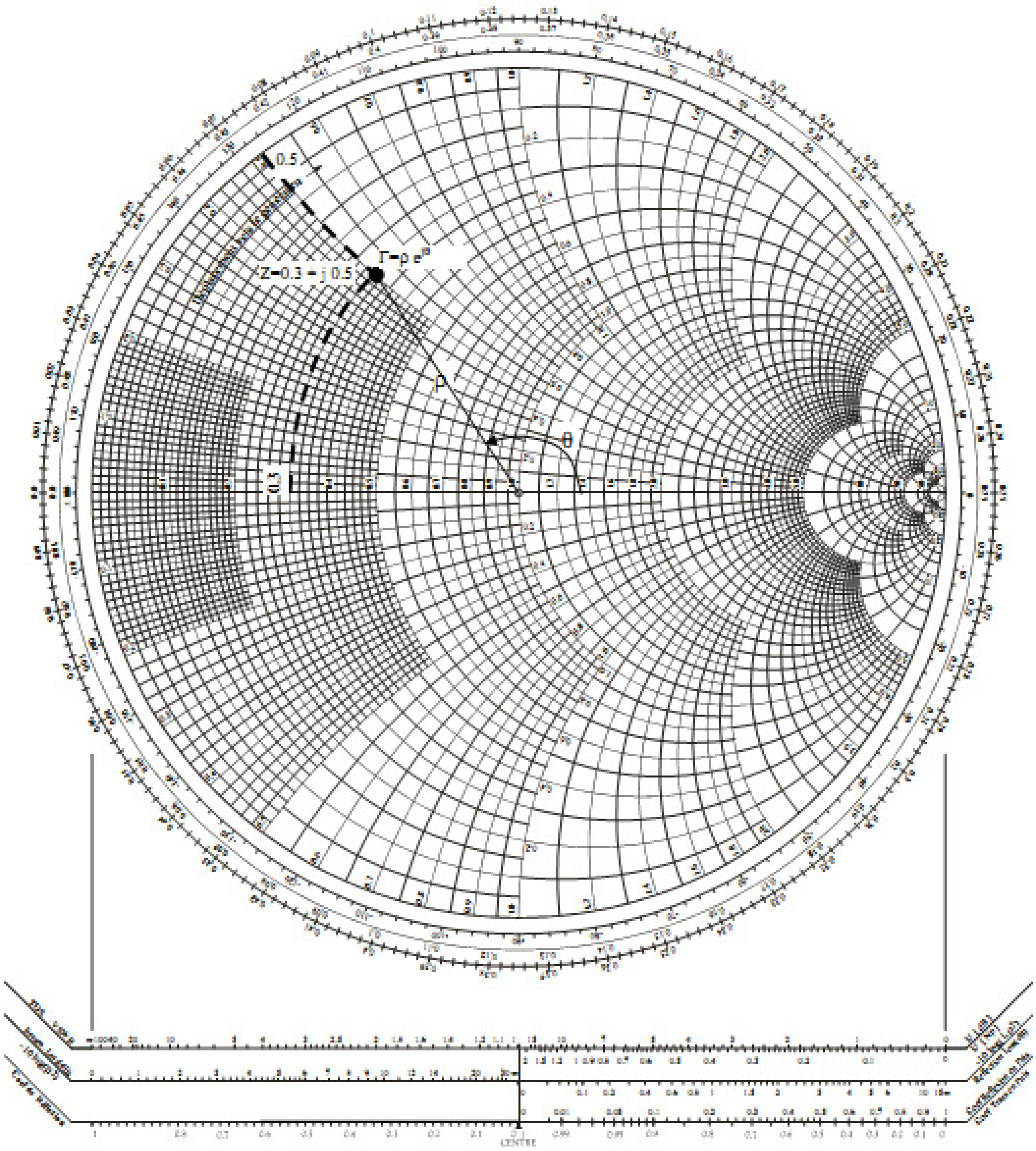

Figure 5. Exemple d'utilisation de l'abaque de Smith.

On peut aussi utiliser l'échelle en bas à droite (coef de ref) pour déterminer ρ le module de Γ.

4. Abaque de Smith en admittance

La relation :

$$\Gamma(s) = \frac{z(s)-1}{z(s)+1} \qquad (8)$$

peut s'écrire :

$$\Gamma(s) = \frac{1-\dfrac{1}{z(s)}}{1+\dfrac{1}{z(s)}} \qquad (9)$$

ce qui en considérant l'admittance y=1/z s'écrit encore :

(10)

$$\Gamma(s) = \frac{1 - y(s)}{1 + y(s)} \tag{10}$$

Ou encore :

$$-\Gamma(s) = \frac{y(s) - 1}{y(s) + 1} \tag{11}$$

Il y a donc la même relation entre -Γ et y qu'entre Γ et z. L'Abaque de Smith permet donc aussi de calculer y connaissant Γ. Il suffit pour cela de poser Γ, de prendre le symétrique de Γ par rapport au centre de l'Abaque (figure 6), ce qui donne –Γ, et enfin de lire y en cet endroit. Autrement dit on montre que y est le symétrique de z par rapport au centre de l'abaque.

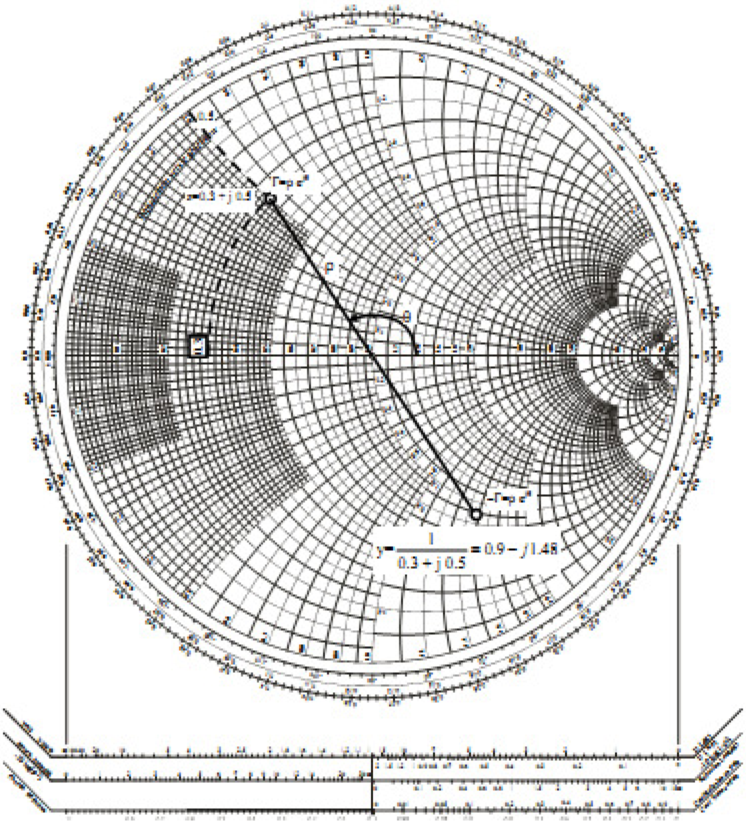

Figure 6. Abaque de Smith en admittance.

- *TRANSPORT* DE L'ENERGIE SUR LES LIGNES

1. Rappel sur les puissances et l'emploi des complexes

Soit une charge Z_l alimentée par un générateur (figure 1) d'impédance de sortie Z_e de f.e.m e.

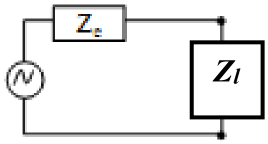

Figure 1. Charge alimentée par un générateur.

On donne :

$v=V_0cos(\omega t)$ et $i=I_0cos(\omega t+\varphi)$

φ est le déphasage entre le courant et la tension et ne dépend que de la valeur et de la nature de la charge Z_l. Le calcul de la puissance instantanée dans la charge :

$P(t)=V_0\ I_0cos(\omega t)cos(\omega t+\varphi)$

Ce qui donne :

$P(t)=(V_0\ I_0)/2[cos(2\omega t+\varphi)+\ cos\varphi]$

$P(t)$ est la somme de 2 termes. Le premier terme $P(t)=(V_0I_0)/2[cos(2\omega t+\varphi)]$ correspond à une composante alternative qui varie sinusoïdalement avec une amplitude $1/2(V_0/I_0)$ et de valeur moyenne nulle. Elle est donc alternativement positive et négative et traduit un échange oscillatoire et réversible d'énergie entre la source et la charge. Le second terme $(V_0\ I_0)/2(cos\varphi)$ correspond à la valeur moyenne de la puissance et traduit un échange d'énergie unidirectionnel entre la source et la charge.

La puissance moyenne s'écrit : $\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt=\frac{V_0I_0}{2}\cos(\varphi)$ est appelée puissance active. C'est la puissance effectivement transmise à la charge (et dissipée dedans).

Ce calcul de la puissance dissipée nous oblige à passer en notation réelle alors que dans la plupart des cas en électronique, on reste en notation complexe. Comment faire le calcul de la puissance dissipée directement en notation complexe ?

Soit $V=V_0e^{j\omega t}$ et $I=I_0e^{j(\omega t+\varphi)}$ les tensions et courants en notation complexe. Le calcul de $V.I$ ne correspond à rien de physique et certainement pas à la puissance instantanée ni à la puissance moyenne.

On définit la grandeur Π : $\Pi=1/2(V.I^*)$ (1)

On a alors : $\mathrm{Re}\,(\Pi)=\overline{P}$ = puissance consommée par la charge.

En effet Re $(\Pi)=1/2(V_0I_0\cos\varphi)$ qui est bien la puissance moyenne cad la puissance consommée dans la charge telle qu'on l'a calculée plus haut.

2. Puissance transportée dans une ligne

a. Lignes quelconques

Soit une charge Z_l alimentée par un générateur à travers une ligne (figure 2)

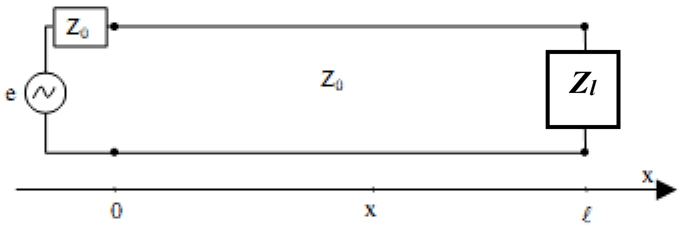

Figure 2. Ligne quelconque alimentant une charge.

Quelle est la puissance dissipée (ou consommée ou transmise) dans le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x et dans la charge ?

On utilise la formule (1) démontrée dans le paragraphe précédent :

$$\mathrm{Re}\,(\Pi)=\overline{P}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}V(x)I^*(x)\right] \qquad (2)$$

Or on a : $V(x)=V_1e^{-\gamma x}+V_2e^{\gamma x}$ et $I(x)=1/Z_c(V_1e^{-\gamma x}-V_2e^{\gamma x})$

Il ne faut pas oublier dans le calcul qui va suivre que V_1 et V_2 sont 2 constantes complexes.

On peut encore écrire que : $V(x)=V_1e^{-\gamma x}(1+\Gamma(x))$

Et que : $I(x)=(1/Z_c)V_1e^{-\gamma x}(1-\Gamma(x))$

Donc :

$$\overline{P}(x)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}V(x)I^*(x)\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}V_1e^{-\gamma x}(1+\Gamma(x))\frac{V_1^*e^{-\gamma^* x}}{Z_c}(1-\Gamma^*(x))\right]=\frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}\mathrm{Re}\left[e^{-(\gamma+\gamma^*)x}(1+\Gamma(x))(1-\Gamma^*(x))\right]$$

……….(3)

donc :

$$\overline{P}(x)=\frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}\mathrm{Re}\left[e^{-(\gamma+\gamma^*)x}(1+\Gamma(x))(1-\Gamma^*(x))\right] \qquad (4)$$

Or $\gamma=\alpha+j\beta$, donc $\gamma+\gamma^*=2\alpha$, donc $\overline{P}(x)=\frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}e^{-2\alpha x}\,\mathrm{Re}\left[1+\Gamma(x)-\Gamma^*(x)-\Gamma(x)\Gamma^*(x)\right]$

Qui donne $\overline{P}(x)=\frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}e^{-2\alpha x}\,\mathrm{Re}\left[1-\left|\Gamma(x)\right|^2\right]$ (5)

Le facteur $\frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}e^{-2\alpha x}$ représente la puissance moyenne consommée à droite de x qui n'a pu être transportée que par l'onde incidente. Ce facteur est donc la puissance moyenne transportée par l'onde incidente. On remarque que la tension et le courant s'atténuant en $e^{-\alpha x}$ et la puissance incidente s'atténue en $e^{-2\alpha x}$.

Revenons dans le cas général d'une ligne sur laquelle circulent une onde incidente et une onde réfléchie. La puissance consommée à droite de x $\overline{P}(x)$ est donc la somme de 2 termes. Le premier terme est la puissance transportée par l'onde incidente et le second ne peut être que la puissance transportée par l'onde réfléchie de façon à ce que la différence des 2 donne la puissance restant à droite de x :

$$\overline{P}(x) = \overline{P}_{inc}(x) - \overline{P}_{ref}(x) \qquad (6)$$

On remarque que l'onde réfléchie s'écrit en fonction de l'onde incidente comme :

$$\overline{P}_{ref}(x) = \frac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c} e^{-2\alpha x} \left|\Gamma(x)\right|^2 = \overline{P}_{inc}(x)\left|\Gamma(x)\right|^2 \qquad (7)$$

Et donc $\left|\Gamma(x)\right|^2 = \dfrac{\overline{P}_{ref}(x)}{\overline{P}_{inc}(x)}$ représente le coefficient de réflexion de puissance.

La puissance consommée à droite de x est finalement donnée par la relation :

$$\overline{P}(x) = \overline{P}_{inc}(x)\left[1 - \left|\Gamma(x)\right|^2\right] \qquad (8)$$

b. Lignes sans pertes

Dans le cas des lignes sans pertes, α est nul. On a alors : $\overline{P}(x) = \dfrac{\left|V_1^2\right|}{2Z_c}\left[1 - \left|\Gamma(x)\right|^2\right]$

Remarques :

- Dans le cas des lignes sans pertes, la puissance dissipée à droite de x, ne peut l'être dans la ligne (ligne sans pertes), l'est donc forcément dans la charge.
- Si la ligne est chargée par une impédance égale à l'impédance caractéristique (Z_l=Z_c), $\Gamma(x=l)=0$, alors la puissance dissipée est égale à la puissance incidente. La puissance incidente est alors totalement transmise à la charge.
- Au contraire si la ligne est chargée par une impédance nulle, infinie ou purement complexe, la puissance dissipée dans la charge est nulle puisque $\Gamma(x=l)=\Gamma_l=1$, ce qui est logique puisque de telles charges ne peuvent consommer d'énergie.