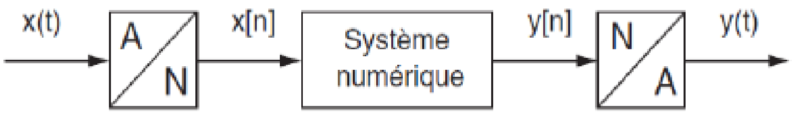
Chapitre 3

Echantillonnage des signaux

1. Introduction
2. Définition de l'opération d'échantillonnage
3. Echantillonneur idéal
4. Théorème d'échantillonnage de Shannon
5. Reconstitution du signal

1. Introduction

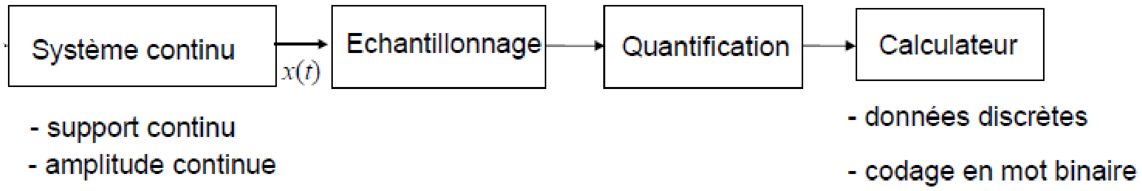
La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, le signal radar, les signaux sismiques…. sont analogiques par nature c'est-à-dire qu'ils varient d'une manière continue et dépendent d'une variable continue : le temps. Ces signaux peuvent être traités analogiquement (les signaux d'entrée et de sortie sont analogiques). Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information…, un traitement numérique est possible. On utilise alors des CAN et des CNA pour relier les signaux analogiques au processeur numérique.



La conversion A-N fait intervenir trois actions successives

- L'échantillonnage à période fixe Te.
- La quantification du signal.
- Son codage.

Ces trois opérations sont effectuées dans un même élément : le CAN qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié (numérique).



Chaine de numérisation

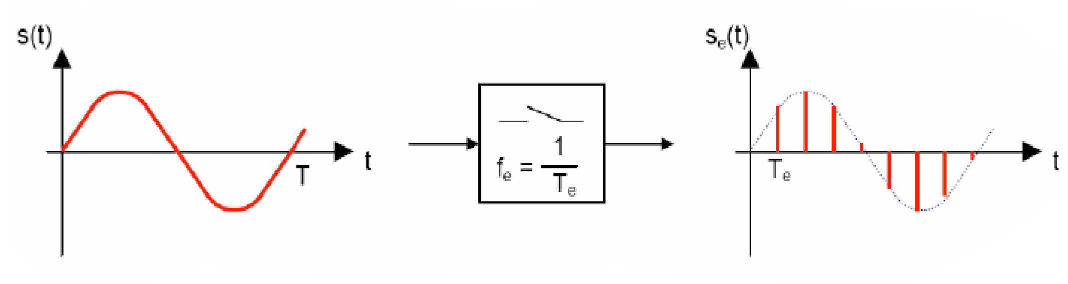
2. Définition

L'échantillonnage est l'opération qui permet le passage de l'analogique vers le discret. C'est une opération de base dans le domaine du traitement du signal numérique et elle est généralement décrite dans le domaine temporel. Elle permet, en effet, de convertir un signal analogique en une séquence d'échantillons uniformément espacés dans le temps.

Il s'agit de remplacer un signal continu dans le temps par un autre défini à certains instants seulement équidistants et suffisamment rapprochés pour qu'il contienne la même information.

En d'autres termes, l'opération d'échantillonnage consiste à remplacer un signal analogique x(t) par une suite de valeurs $x_k = x(t_k)$ périodique de période Te appelée « Période d'échantillonnage » c'est-à-dire qu'à chaque instant t espacé

de Te, on définit une valeur x(t) : $\begin{cases} \text{à } t_1 \rightarrow x(t_1) \\ \text{à } t_2 \rightarrow x(t_2) \ldots \\ \text{à } t_k \rightarrow x(t_k) \end{cases}$



- Un signal est dit échantillonné, s'il n'est transmis qu'à des instants privilégiés appelés « instants d'échantillonnage ».

- L'échantillonnage est effectué à des instants équidistants. L'espace entre ces instants est appelé « Période d'échantillonnage ».

- On appelle échantillonneur, l'organe effectuant le prélèvement des échantillons, il est représenté de la manière suivante

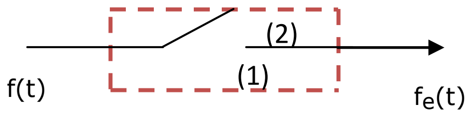
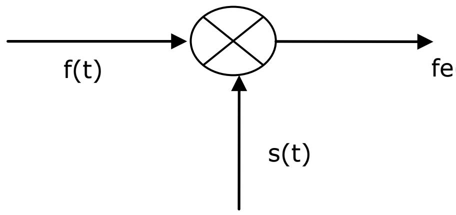


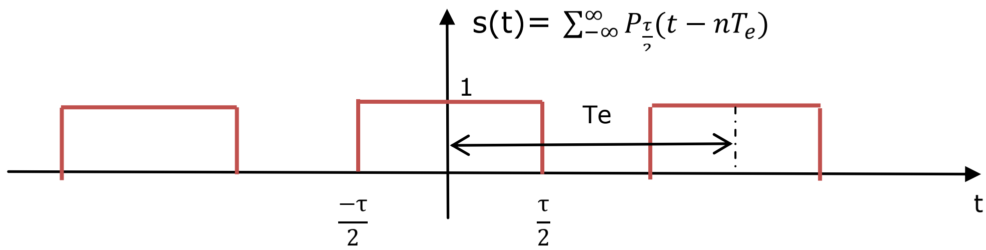
Schéma fonctionnel d'un échantillonneur

Le principe de base d'un échantillonneur est réalisé à l'aide d'un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. Le signal d'entrée f(t) apparait en sortie lorsque l'interrupteur est fermé (position (1)) pendant une durée τ et disparait quand l'interrupteur est ouvert (position (2)) pendant le reste de la période T_e.

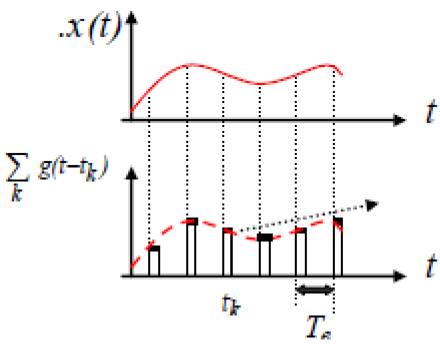
Le signal échantillonné $f_e(t)$ est donc une simple multiplication du signal analogique f(t) par une fonction d'échantillonnage s(t)



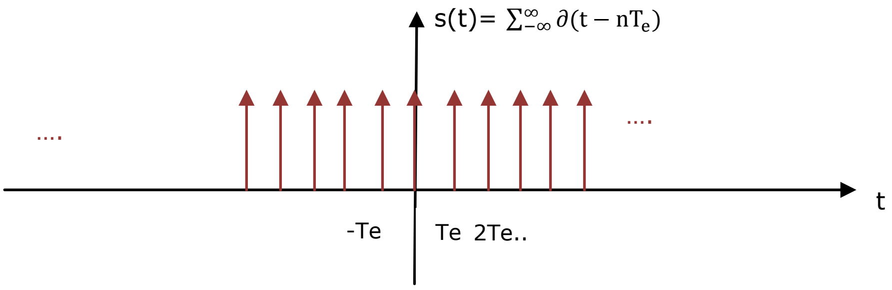
Cette fonction d'échantillonnage s(t) est soit une suite d'impulsions rectangulaires de période Te, de durée τ et d'amplitude unité.



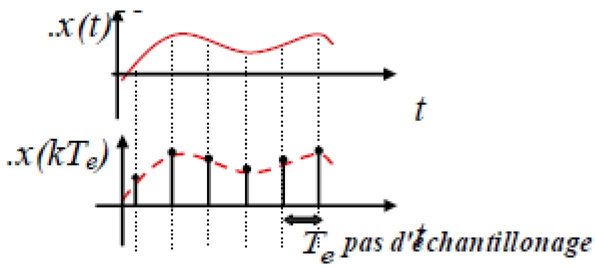
C'est le cas de l'échantillonnage réel (naturel)



Soit une suite d'impulsions de Dirac espacés de Te ; C'est le cas de l'échantillonnage idéal



C'est le cas de l'échantillonnage idéal.



3. Echantillonneur idéal

L'échantillonnage idéal effectue le prélèvement de manière instantanée. Dans ces conditions, l'échantillonnage de f(t) peut être modélisé par

$$f_e(t) = f(t).s(t) = f(t).Pgn_{Te}(t) = f(t).\sum_{-\infty}^{\infty} \partial(t - nT_e) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT_e).\partial(t - nT_e)$$

$s(t) = Pgn_{Te}(t)$ = peigne de Dirac.

Echantillonner un signal revient à le multiplier par une suite d'impulsions de Dirac de période Te.

3.1 Analyse fréquentielle

Il est important d'analyser le comportement de l'échantillonneur dans le domaine fréquentiel, pour cela, déterminons la TF du signal échantillonné

$$f_e(t) = f(t).Pgn_{Te}(t) \implies F_e(f) = F(f) \otimes TF\{Pgn_{Te}(t)\}$$

$$\mathrm{TF}\{\mathrm{Pgn}_{\mathrm{Te}}(\mathrm{t})\} = \frac{1}{\mathrm{Te}} \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e})$$

La TF d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac mais d'amplitude $\frac{1}{\mathrm{Te}}$ et de fréquence $\mathrm{f_e} = \frac{1}{\mathrm{Te}}$.

3.2 Spectre du signal échantillonné

la TF du signal échantillonné

$$\mathrm{F_e}(\mathrm{f}) = \mathrm{F}(\mathrm{f}) \otimes \frac{1}{\mathrm{Te}} \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e}) = \frac{1}{\mathrm{Te}} \mathrm{F}(\mathrm{f}) \otimes \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e})$$

L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution

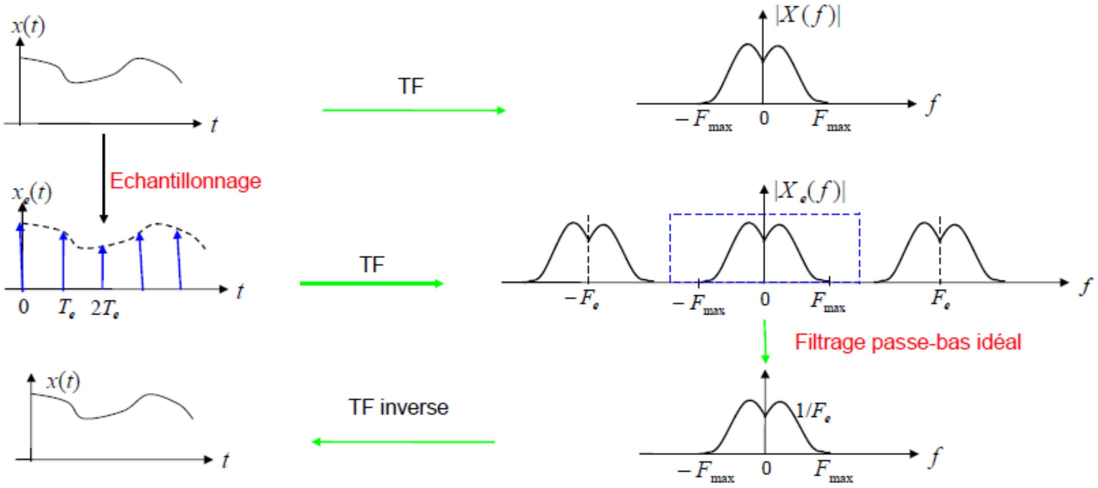
$$\mathrm{F}(\mathrm{f}) \otimes \partial(\mathrm{f}) = \mathrm{F}(\mathrm{f})$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{f}) \otimes \sum_{-\infty}^{\infty} \partial(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e}) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e})$$

Donc : $\mathrm{f_e}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{t}).\mathrm{Pgn}_{\mathrm{Te}}(\mathrm{t}) \overset{\mathrm{TF}}{\leftrightarrow} \mathrm{F_e}(\mathrm{f}) = \frac{1}{\mathrm{Te}} \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\mathrm{f} - \mathrm{nf_e})$

Le spectre de la TF d'un signal échantillonné est périodique de période $\frac{1}{\mathrm{Te}}$. Ce spectre est la répétition cyclique (périodique) de F(f), la TF du signal f(t) continu. On dit que l'échantillonnage a introduit une périodicité du spectre dans l'espace des fréquences.

Exemple



4. Théorème d'échantillonnage de Shannon

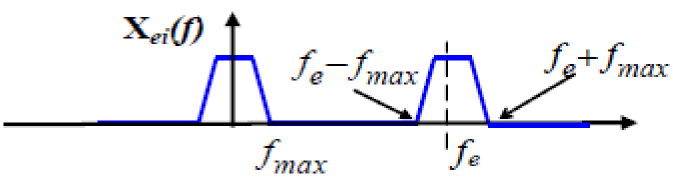
On lit aussi dans les références « Le **théorème de Nyquist-Shannon**, nommé d'après Harry Nyquist et Claude Shannon. Ce théorème énonce que la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal, afin de convertir ce signal d'une forme analogique à une forme numérique. Ce théorème est à la base de la conversion numérique des signaux.

Lorsqu'on veut échantillonner un signal continu, on ne perd pas l'information si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus grande fréquence contenue dans son spectre :

$$f_e - f_{max} \geq f_{max}$$

$f_e \geq 2f_{max} \rightarrow$ Condition de Shannon

$f_{max} < \frac{f_e}{2} \rightarrow$ Fréquence de Nyquist



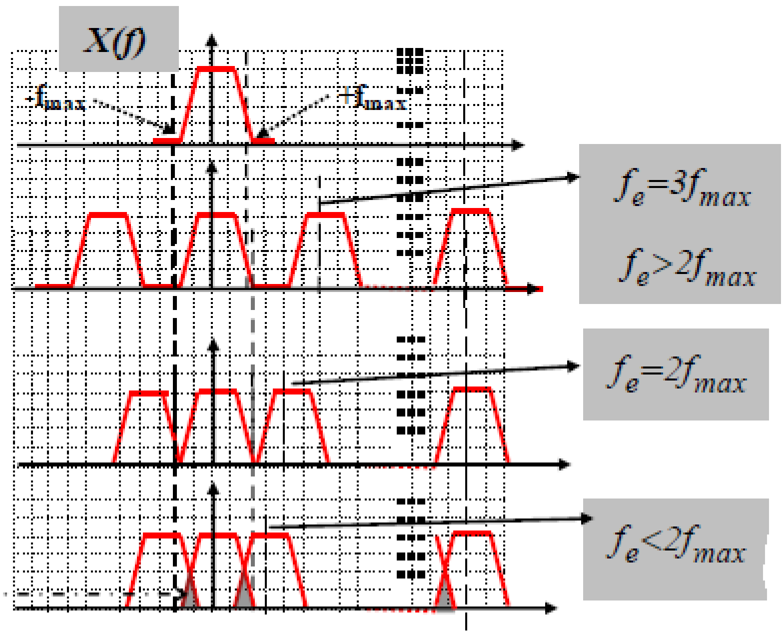
La fréquence 2fmax est la fréquence d'échantillonnage critique. Elle indique la fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal analogique nécessaire pour conserver l'information utile dans le signal échantillonné. La fréquence $\frac{f_e}{2}$ est souvent appelée *fréquence de Nyquist* ou *fréquence de Shannon*.

Si cette condition n'est pas respectée, il va se produire un phénomène de repliement (recouvrement spectral) c'est-à-dire que certaines fréquences vont se chevaucher. Pour remédier à ce problème, on impose un filtrage PB avant l'opération d'échantillonnage (Filtre anti-repliement ou anti-recouvrement) qui va limiter le spectre ensuite on applique la condition de Shannon.
Une condition nécessaire pour l'application du théorème de Shannon est que le signal soit à bande limitée : $|F(f)| < 0 \;\text{ pour } |f| \; < \; f_m$.

Trois cas sont à considérer

- $f_e \; < 2f_m \;\; \Longrightarrow$ Les motifs se recouvrent partiellement $\Longrightarrow$ il y aura chevauchement et donc perte d'informations.

- $f_e = 2f_m \; \Longrightarrow$ Pas de recouvrement $\Longrightarrow$ échantillonnage à la limite.
- $f_e > 2f_m \; \Longrightarrow$ Pas de recouvrement $\Longrightarrow$ conservation de l'information.



Remarque

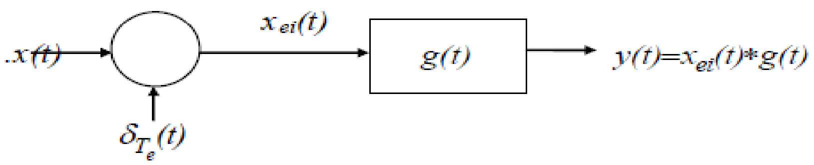
Pour les signaux dont le spectre n'est pas à bande limitée, il est impossible d'éviter l'apparition de l'effet de recouvrement et donc le théorème d'échantillonnage a été déterminé en supposant que le signal est à bande limitée.

Ainsi, il peut y avoir recouvrement ou non selon la largeur du spectre 2fmax et selon la fréquence d'échantillonnage fe, c'est un effet qui peut apparaitre aussi bien dans l'échantillonnage réel que dans l'échantillonnage idéal si la largeur spectrale n'est pas limitée. Cet effet a un inconvénient majeur dans la restitution du signal analogique à partir de celui échantillonné dans l'opération inverse.

5. Reconstitution du signal

Si l'on dispose de fe(t), peut-on retrouver le signal f(t) ?

Pour pouvoir restituer f(t) de fe(t), on doit isoler F(f) puisque Fe(f) est une répétition cyclique de la TF F(f) de f(t). Pour cela, on utilise un filtre PB (filtre d'interpolation ou de reconstruction ou de lissage) de fréquence de coupure $\frac{\mathrm{fc}}{2} > \mathrm{f_{max}}$, de fonction de transfert H(f) [TF de h(t)] qui permet de reconstituer le signal analogique f(t) à partir de ses échantillons

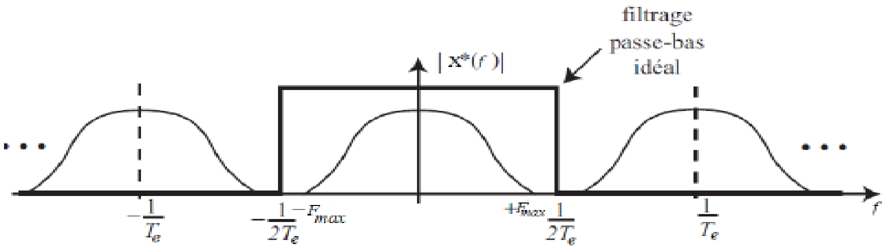


Remarques

- Il est nécessaire de choisir la fréquence de coupure du filtre d'interpolation de façon à éliminer tous les spectres répétitifs sauf le spectre correspondant à *X(f) :* $\boldsymbol{fmax \leq fc \leq fe{-}fmax}$

- Généralement, les filtres anti-recouvrement et de lissage sont les mêmes.

L'isolement de F(f) est possible à l'aide d'un filtre PB



$$f'(t) = h(t) \otimes f_e(t) = h(t) \otimes \sum f(nTe)\, \partial(t - nTe) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTe).h(t - nTe)$$

$$h(t) = \frac{fc}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{fc}{2} t \Rightarrow h(t - nTe) = \frac{fc}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{fc}{2} (t - nTe)$$

$$f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nTe) \frac{fc}{2} \operatorname{sinc} \frac{fc}{2} (t - nTe)$$

Cette équation est une formule d'interpolation qui permet la reconstruction du signal f(t) à partir de la séquence $f(nT_e)$ grâce à la fonction $\operatorname{sinc}\frac{fc}{2}(t - nTe)$ qui joue le rôle d'une fonction d'interpolation. Chaque échantillon est multiplié par une version retardée de la fonction d'interpolation et toutes les formes d'ondes résultantes sont additionnées pour obtenir f'(t).

Remarque

Le théorème de l'échantillonnage é été déterminé en supposant que le signal est à bande limitée (ceci est rarement le cas en pratique). En conséquence, le processus d'échantillonnage produit du repliement. Pour combattre les effets du repliement, on peut suivre les deux étapes :

1. Avant l'opération d'échantillonnage, on applique un filtrage PB au signal pour atténuer les composantes hautes fréquences qui ne sont pas essentielles à l'information contenue dans le signal ; on parle d'un filtre anti-repliement.

2. Le signal filtré est échantillonné à une fréquence $f_e \geq 2f_m$; f_m étant la plus haute fréquence significative contenue dans son spectre.