TP Maple : Algèbre linéaire

NB : La plupart des commandes de Maple qui permettent de faire de l'algèbre linéaire se trouvent dans la librairie *LinearAlgebra.*

1. Les vecteurs

Construction d'un vecteur

La commande *vector* permet de créer un vecteur. Voici quelques exemples :

with(LinearAlgebra);

> $vector([1, 4, 6]);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

> $Vector(5, i \rightarrow i\verb|^|2);$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}$$

> $Vector[column]([5, 6, 7]);$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

> $Vector[row]([5, 6, 7]);$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

> $whattype(\%);$

$$Vector_{row}$$

> $RandomVector(4);$

$$\begin{bmatrix} 44 \\ 92 \\ -31 \\ 67 \end{bmatrix}$$

> $whattype(\%);$

$$Vector_{column}$$

Afficher le contenu d'un vecteur :

> $v := Vector([7, 8, 9, 10]);$

$$v := \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

> $v;$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

> $v[2];$

$$8$$

> $v[1] := 0; v;$

$$v_1 := 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Copier un vecteur v dans une autre variable w et modifier v :

> $w := v; v[1] := 2; v; w;$

$$w := \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

On remarque que toute modification de *v* entraine une modification de sa copie *w*.

Pour y remédier, on utilise la commande *copy* :

> $w := Copy(v); v[1] := 3; v; w;$

$$w := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$v_1 := 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Quelques opérations sur les vecteurs

Somme de deux vecteurs :

> $u := Vector([-7, 4, 7, 3]);$

$$u := \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> $u + v;$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire (réel) :

> $v * \mathrm{Pi};$

$$\begin{bmatrix} 3\pi \\ 8\pi \\ 9\pi \\ 10\pi \end{bmatrix}$$

Taille d'un vecteur (nombre de composantes) :

> $Dimension(u);$

$$4$$

Tester une égalité de deux vecteurs :

> $Equal(u, v);$

$$\mathit{false}$$

Produit scalaire de deux vecteurs :

> $Vector([1, 1]).Vector([2, 1]);$

$$3$$

Ou bien :

> $DotProduct(Vector([1, 1]), Vector([2, 1]));$

$$3$$

2. Les Matrices

Construction d'une matrice

La commande *matrix* permet de créer une matrice. Voici quelques exemples :

> $matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

> $c := Matrix(3, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]);$

$$c := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

> $Matrix(5, 3, (i, j) \to i + j);$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

> $A := RandomMatrix(3, 3);$

$$A := \begin{bmatrix} -81 & 87 & -77 \\ -38 & 33 & 57 \\ -18 & -98 & 27 \end{bmatrix}$$

> $A^2;$

$$\begin{bmatrix} 4641 & 3370 & 9117 \\ 798 & -7803 & 6346 \\ 4696 & -7446 & -3471 \end{bmatrix}$$

> $A := DiagonalMatrix([3, 3, 3]);$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Afficher le contenu d'une matrice

> $c;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Deuxième ligne, troisième colonne

> $c[2, 3];$

$$6$$

Modifier une matrice

> $c[1, 1] := \mathrm{Pi}; c;$

$$c_{1,1} := \pi$$

$$\begin{bmatrix} \pi & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Copier une matrice :

> $B := c; c[1, 1] := 1; c; B;$

$$B := \begin{bmatrix} \pi & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{1,1} := 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

On remarque que toute modification de *c* entraine une modification de sa copie *B*.
Pour y remédier, on utilise la commande *Copy* :

> $B := Copy(c);\ c[1, 1] := 999;$ c; B;

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{1,1} := 999$$

$$\begin{bmatrix} 999 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Quelques opérations sur les matrices

Somme de deux matrices :

> $B := Matrix(2, 3, [1\$6]);$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> $A := matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> $C := A + B;$

$$C := A + B$$

> $evalm(C);$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire (réel) :

> d := A*x;

$$d := A\,x$$

> $evalm(d);$

$$\begin{bmatrix} x & 2x & 3x \\ 4x & 5x & 6x \end{bmatrix}$$

> $F := matrix([[3, 4, 5], [6, 7, 8], [4, 2, 7]]);$

$$F := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

> $p := A\&{*}F;$

$$p := A \&{*}\, F$$

> $evalm(p);$

$$\begin{bmatrix} 27 & 24 & 42 \\ 66 & 63 & 102 \end{bmatrix}$$

> $A := RandomMatrix(4, 4);\ DeleteRow(A, 1);$

$$A := \begin{bmatrix} -9 & -81 & 33 & 27 \\ -50 & -38 & -98 & -93 \\ -22 & -18 & -77 & -76 \\ 45 & 87 & 57 & -72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -50 & -38 & -98 & -93 \\ -22 & -18 & -77 & -76 \\ 45 & 87 & 57 & -72 \end{bmatrix}$$

> $DeleteColumn(A, 2\,..\,3);$

$$\begin{bmatrix} -9 & 27 \\ -50 & -93 \\ -22 & -76 \\ 45 & -72 \end{bmatrix}$$

<u>*Trouver une base du noyau de l'application linéaire associée à une matrice :*</u>

> $NullSpace(A);$

$$\{\ \}$$

> $B := Matrix(2, 2, [1, 2, 1/2, 1]);$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

> $NullSpace(B);$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>*Trouver une base de l'image de l'application linéaire associée à une matrice :*</u>
<u>*(= une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice)*</u>

> $ColumnSpace(B);$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right]$$

<u>*Rang de la matrice (= dimension de l'image)*</u>

> $Rank(B);$

$$1$$