

Université de Jijel  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

**Cours du module Méthodes spectrales**  
**Master 2, Spécialité : EDP et applications**  
**Par Yasmina Daikh**

L'objet de ce cours est l'introduction et la présentation des notions de base de résolution des équations aux dérivées partielles par une méthode spectrale. La technique pour calculer la solution approchée est basée sur une formulation variationnelle du problème continu et apparaît comme une méthode de Galerkin avec intégration numérique. Au terme de ce cours, l'étudiant saura effectuer l'analyse numérique de la méthode pour l'équation de Poisson lorsqu'elle est munie de conditions aux limites de Dirichlet.

Le cours est composé de 4 chapitres :

- Chapitre 1 : Préliminaires
- Chapitre 2 : Polynômes de Legendre et formules de quadrature
- Chapitre 3 : Erreurs d'approximation et d'interpolation polynomiale
- Chapitre 4 : Discrétisation spectrale du problème de Dirichlet pour le laplacien.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Polynômes de Legendre et formules de quadrature</b>	<b>6</b>
2.1	Polynômes de Legendre . . . . .	6
2.2	Formules de quadrature . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale</b>	<b>15</b>
3.1	Erreur d'approximation polynomiale sur l'intervalle . . . . .	15
3.1.1	Le projecteur $\pi_N$ . . . . .	15
3.1.2	Le projecteur $\pi_N^{1,0}$ . . . . .	18
3.2	Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale sur le carré . . . . .	20
3.2.1	Le projecteur $\Pi_N$ . . . . .	21
3.2.2	Le projecteur $\Pi_N^{1,0}$ . . . . .	22
3.2.3	L'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_N$ . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Discrétisation spectrale du problème de Dirichlet pour le laplacien</b>	<b>25</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# Chapitre 1

## Préliminaires

Les notations utilisées dans ce cours pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent dans les ouvrages de références, voir par exemple Adams [1], Dautray et Lions [5].

On note  $\Omega$  un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$ .

**Définitions 1.1.** On note  $L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions  $v$  mesurables telles que

$$\int_{\Omega} v^2(x) dx < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

On note  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  la norme

$$\|v\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

munie de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

L'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.1)

$$(u, v)_{m,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(x)(\partial^\alpha v)(x) dx \right).$$

$\mathcal{D}(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ .

-On note  $H_0^m(\Omega)$  l'adhérence de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans l'espace  $H^m(\Omega)$ .

-En particulier,  $H_0^1(\Omega)$  est l'espace de fonctions de  $H^1(\Omega)$  qui s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$

On rappelle également un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

**Proposition 1.2. (Inégalité de Poincaré-Friedrichs)** Il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de la géométrie de  $\Omega$  telle que toute fonction  $v$  de  $H_0^1(\Omega)$  vérifie

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une conséquence de cette inégalité est le résultat d'équivalence suivant :

**Corollaire 1.3.** La semi norme

$$|v|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

**Notation 1.4.** Soit  $E$  un espace de Banach séparable de norme  $\|\cdot\|_E$ . On notera  $L^2(\Omega, E)$  l'espace des fonctions définies de  $\Omega$  dans  $E$  telles que la fonction :  $v \mapsto \|v\|_E$  appartienne à  $L^2(\Omega)$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $H^m(\Omega, E)$  l'espace des fonctions de  $L^2(\Omega, E)$  dont toutes les dérivées partielles d'ordre  $\leq m$  sont dans  $L^2(\Omega, E)$ , on définit  $H_0^m(\Omega, E)$  comme l'adhérence dans  $H^m(\Omega, E)$  des fonctions indéfiniment différentiables de  $\Omega$  dans  $E$  à support compact dans  $\Omega$ . Les espaces  $H^m(\Omega, E)$  sont munis de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega, E)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

et de la semi norme

$$|v|_{H^m(\Omega, E)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Notations 1.5.**

-Pour tout intervalle ouvert borné  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathbb{P}_n(\Lambda)$  l'espace des restrictions à  $\Lambda$  des polynômes de degré  $\leq n$ .

-Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  égal au produit  $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$  d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathbb{P}_n(\Omega)$  l'espace des restrictions à  $\Omega$  des polynômes à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et de degré  $\leq n$  par rapport à chaque variable  $x_i, 1 \leq i \leq d$ .

-On note  $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$  l'espace des polynômes de  $\mathbb{P}_n(\Omega)$  qui s'annulent sur  $\partial\Omega$ .

-Dans ce cours, on notera par  $\Lambda$ , l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ .

# Chapitre 2

## Polynômes de Legendre et formules de quadrature

### 2.1 Polynômes de Legendre

**Définition 2.1.1.** On appelle famille des polynômes de Legendre la famille  $(L_n)_n$  de polynômes, deux à deux orthogonaux dans  $L^2(\Lambda)$  et tels que, pour tout entier  $n \geq 0$ , le polynôme  $L_n$  soit de degré  $n$  et vérifie :  $L_n(1) = 1$ .

**Remarque 2.1.2.** Les polynômes de Legendre sont construits à partir du procédé de Gram-Schmidt dans  $L^2(\Lambda, \cdot)$  appliqué à la base canonique  $x^n, n \in \mathbb{N}$ .

**Notation 2.1.3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $k_n$  le coefficient de  $x^n$  dans  $L_n(x)$ .

**Proposition 2.1.4. (Equation différentielle)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $L_n$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n) + n(n+1)L_n = 0. \quad (2.1)$$

**Preuve.** On remarque que le polynôme  $\frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n)$  est de degré  $\leq n$  et qu'il vérifie par une intégration par partie, pour tout polynôme  $\varphi$  de degré  $\leq n-1$  :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n)(x)\varphi(x)dx &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)L'_n(x)\varphi'(x)dx, \\ &= \int_{-1}^1 L_n(x) \frac{d}{dx}((1-x^2)\varphi')(x)dx. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{d}{dx}((1-x^2)\varphi')$  est un polynôme de degré  $\leq n-1$  et  $L_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $\leq n-1$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n)(x)\varphi(x)dx = 0,$$

on en déduit qu'il existe un nombre réel  $\lambda_n$  tel que

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)L'_n) + \lambda_n L_n = 0.$$

Pour calculer  $\lambda_n$ , on regarde le coefficient de  $x^n$  dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$-k_n n(n+1) + k_n \lambda_n = 0,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Remarque 2.1.5.** Une conséquence immédiate de l'équation (2.1) est que l'on obtient par intégration par parties, pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_{-1}^1 L'_m(x) L'_n(x) (1-x^2) dx = n(n+1) \int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx. \quad (2.2)$$

Ceci signifie que les  $L'_n$ ,  $n \geq 1$ , forment une famille de polynômes deux à deux orthogonaux pour la mesure  $(1-x^2)dx$  dans  $\Lambda$ . Une autre conséquence de l'équation (2.1), appliquée en 1, est l'égalité

$$L'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'opérateur  $A$  défini par

$$A\varphi = -\frac{d}{dx}((1-x^2)\varphi'), \quad (2.3)$$

est auto-adjoint dans  $L^2(\Lambda)$ . L'équation (2.3) se traduit par le fait que tous les polynômes de Legendre en sont des fonctions propres, ceci est à l'origine du qualificatif "spectral" qui caractérise la méthode étudiée dans ce cours.

**Proposition 2.1.6. (Formule de Rodrigues)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $L_n$  est donné par

$$L_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n). \quad (2.4)$$

**Preuve.** On remarque que la fonction  $(1-x^2)^n$  est un polynôme de degré  $2n$  qui s'annule en  $\pm 1$ , ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n-1$ . En intégrant  $n$  fois par parties, on vérifie que pour tout polynôme  $\varphi$  de degré  $\leq n-1$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n)(x) \varphi(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \left( \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right)(x) dx = 0,$$

donc  $\frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n)$  est égal à une constante que multiplie  $L_n$ . Pour déterminer la constante, on utilise la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^n (1+x)^n) &= \sum_{i=0}^n C_n^i ((1-x)^n)^{(i)} ((1+x)^n)^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i ((1-x)^n)^{(i)} ((1+x)^n)^{(n-i)} + C_n^n ((1-x)^n)^{(n)} (1+x)^n, \end{aligned}$$

il suffit maintenant d'évaluer cette expression en 1 pour conclure.  $\square$

**Corollaire 2.1.7.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $L_n$  vérifie*

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

**Preuve.** De la formule (2.4), on déduit en effectuant  $n$  intégrations par parties que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n) (x) L_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n k_n n! dx, \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx. \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $x = \cos \theta$ , on obtient l'intégrale de Wallis

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n+1} d\theta = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

□

De la formule (2.4), on peut également vérifier facilement le résultat suivant

**Corollaire 2.1.8.** *Les polynômes de Legendre ont la parité de leurs degrés.*

**Proposition 2.1.9. (*Equation intégrale*)** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la formule*

$$\int_{-1}^x L_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)). \quad (2.6)$$

Pour des raisons techniques, on aura besoin de polynômes de norme 1. On pose donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$L_n^* = \frac{L_n}{\|L_n\|_{0,\Lambda}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} L_n,$$

et on désigne par  $k_n^*$  le coefficient de  $x^n$  dans  $L_n^*(x)$ . On commence par démontrer une relation de récurrence vérifiée par ces polynômes.

**Proposition 2.1.10.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a la formule de récurrence :*

$$L_{n+1}^* = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} x L_n^* - \frac{k_{n-1}^* k_{n+1}^*}{k_n^{*2}} L_{n-1}^*. \quad (2.7)$$

**Preuve.** On voit que le polynôme  $L_{n+1}^* - \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} x L_n^*$  est de degré  $\leq n$  et orthogonal à tous les polynômes de degré  $\leq n-2$ . Il existe donc deux constantes  $\mu_n$  et  $\nu_n$  telles que l'on ait

$$L_{n+1}^* - \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} x L_n^* = \mu_n L_n^* - \nu_n L_{n-1}^*.$$



Du Corollaire 2.1.8, les polynômes  $L_{n+1}^*$ ,  $xL_n^*$  et  $L_{n-1}^*$  ont la même parité que  $n+1$ , tandis que le polynôme  $L_n^*$  a la parité de  $n$ . Ceci prouve que  $\mu_n$  est nul. Il reste à calculer  $\nu_n$  ce qui s'effectue en écrivant

$$0 = \int_{-1}^1 L_{n+1}^*(x) L_{n-1}^*(x) dx = \frac{k_{n+1}^*}{k_n^*} \int_{-1}^1 L_n^*(x) x L_{n-1}^*(x) dx - \nu_n \int_{-1}^1 L_{n-1}^{*2}(x) dx.$$

En notant que  $xL_{n-1}^*$  est la somme de  $\frac{k_{n-1}^*}{k_n^*} L_n^*$  et d'un polynôme de degré  $\leq n-1$ , on en déduit

$$0 = \frac{k_{n-1}^* k_{n+1}^*}{k_n^{*2}} - \nu_n,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

En remplaçant chaque  $L_n^*$  par  $\frac{L_n}{\|L_n\|_{0,\Lambda}}$  et chaque  $k_n^*$  par  $\frac{k_n}{\|L_n\|_{0,\Lambda}}$  et en utilisant le Corollaire 2.7, on en déduit la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre.

**Corollaire 2.1.11. (*Formule de récurrence*)** La famille  $(L_n)_n$  est donnée par les relations

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \text{ et } L_1(x) = x, \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.2 Formules de quadrature

Dans cette section, sont rappelés les caractéristiques des formules de Gauss et de Gauss-Lobatto qui seront utiles pour la suite. Dans tout ce qui suit  $N \in \mathbb{N}^*$ , et il sera fixé.

**Proposition 2.2.1.** *Il existe un unique ensemble de  $N$  points  $\xi_j$  de  $\Lambda$ ,  $1 \leq j \leq N$ , et un unique ensemble de  $N$  réels  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme  $\Phi$  de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$  :*

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^N \Phi(\xi_j) \omega_j. \quad (2.9)$$

*Les  $\xi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont les zéros du polynôme  $L_N$ . Les  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont positifs.*

**Preuve.** Soient  $\xi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , les zéros de  $L_N$ . Pour  $1 \leq k \leq N$ , on note  $h_k$  le polynôme de Lagrange associé à  $\xi_k$ , c'est-à-dire l'unique polynôme de  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$  qui vaut 1 en  $\xi_k$  et s'annule en  $\xi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $j \neq k$ . On pose  $\omega_k = \int_{-1}^1 h_k(x) dx$ . On vérifie facilement que, pour  $1 \leq j \leq N$ ,

$$\int_{-1}^1 h_k(x) dx = h_k(x_k) \omega_k = \sum_{j=1}^N h_k(\xi_j) \omega_j,$$

c'est-à-dire que l'égalité (2.9) est vraie lorsque  $\Phi$  appartient à l'ensemble  $\{h_1, \dots, h_N\}$ . Comme cet ensemble forme une base de  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ , l'égalité (2.9) est satisfaite pour tout

polynôme  $\Phi$  de  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ . Soit maintenant  $\Phi$  un polynôme quelconque de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ , on effectuant la division euclidienne par  $L_N$ , il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  nécessairement dans  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ , tels que  $\Phi$  soit égal à  $QL_N + R$ . On calcule alors

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) L_N(x) dx + \int_{-1}^1 R(x) dx.$$

Comme  $L_N$  est orthogonal à tous les polynômes de degré  $\leq N-1$ , donc à  $Q$ , et que l'égalité (2.9) est exacte pour le polynôme  $R$ , on en déduit

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{j=1}^N R(\xi_j) \omega_j.$$

Finalement, comme les nœuds de la formule de quadrature sont les zéros de  $L_N$ , on obtient

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^N (QL_N + R)(\xi_j) \omega_j = \sum_{j=1}^N \Phi(\xi_j) \omega_j.$$

Ce qui prouve l'exactitude de la formule de quadrature sur  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ . Comme les  $h_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , appartiennent à  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ , les  $h_j^2$  appartiennent à  $\mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$  et on a

$$\int_{-1}^1 h_j^2(x) dx = \sum_{i=1}^N h_j^2(\xi_i) \omega_i = \omega_j,$$

ce qui prouve que les  $\omega_j$  sont positifs.

Réciproquement, soient  $\xi_j$  et  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $2N$  nombres réels tels que la formule (2.9) soit vraie pour tout  $\Phi$  dans  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ . Comme précédemment, on note  $h_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , les polynômes de Lagrange associés aux  $\xi_j$  dans  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ . En appliquant la formule à  $h_j$ , on voit que l'on a nécessairement

$$\omega_j = \int_{-1}^1 h_j(x) dx,$$

donc les  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  sont déterminés de façon unique en fonction des  $\xi_j$ . En choisissant  $\Phi$  égal à  $L_N h_j$ , on obtient

$$0 = \int_{-1}^1 L_N(x) h_j(x) dx = \sum_{k=1}^N L_N(x_k) h_j(x_k) \omega_k = L_N(\xi_j) \omega_j.$$

Comme  $\omega_j$  est égal à  $\int_{-1}^1 h_j^2(x) dx$ , il est donc positif et  $L_N(\xi_j)$  est nul et les  $N$  points distincts  $\xi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont les zéros de  $L_N$ .  $\square$

La formule de quadrature (2.9) est appelée formule de **Gauss** de type Legendre à  $N$  points.

On introduit maintenant une autre formule de quadrature appelée formule de **Gauss-Lobatto**, qui diffère de la première essentiellement par le fait que les extrémités  $-1$  et  $1$  de l'intervalle  $\Lambda$  sont des nœuds de la formule.

**Proposition 2.2.2.** *On pose  $\eta_0 = -1$  et  $\eta_N = 1$ . Il existe un unique ensemble de  $N - 1$  points  $\eta_j$  de  $\Lambda$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ , et un unique ensemble de  $N + 1$  réels  $\rho_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme  $\Phi$  de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \sum_{j=0}^N \Phi(\eta_j) \rho_j. \quad (2.10)$$

*Les nœuds  $\eta_j$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ , sont les zéros du polynôme  $L'_N$ . Les poids  $\rho_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , sont positifs.*

**Preuve.** On note d'abord que, si  $F_{N-1}$  désigne le polynôme  $\prod_{j=1}^{N-1} (x - \eta_j)$ , tout polynôme  $\Phi$  de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$  s'écrit sous la forme

$$\Phi(x) = \Phi(-1) \frac{(1-x)F_{N-1}(x)}{2F_{N-1}(-1)} + \Phi(1) \frac{(1+x)F_{N-1}(x)}{2F_{N-1}(1)} + (1-x^2)\Psi(x),$$

où  $\Psi$  est un polynôme  $\mathbb{P}_{2N-3}(\Lambda)$ . En posant

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{2F_{N-1}(-1)} \int_{-1}^1 (1-x)F_{N-1}(x) dx, \\ \rho_N = \frac{1}{2F_{N-1}(1)} \int_{-1}^1 (1+x)F_{N-1}(x) dx. \end{cases}$$

La première partie de la proposition est équivalente à l'énoncé suivant : il existe un unique ensemble de  $N - 1$  points  $\eta_j$  de  $\Lambda$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ , et un unique ensemble de  $N - 1$  réels  $\rho_j$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ , tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme  $\Psi$  de  $\mathbb{P}_{2N-3}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^1 \Psi(x)(1-x^2) dx = \sum_{j=1}^N \Psi(\eta_j)(1-\eta_j^2)\rho_j.$$

Ceci est similaire à la Proposition 2.2.1, avec  $N$  remplacé par  $N - 1$  et la mesure  $dx$  remplacée par la mesure  $(1-x^2) dx$ . On termine donc la démonstration de la Proposition 2.2.2 exactement par les mêmes arguments que pour la Proposition 2.2.1 en rappelant que, d'après la formule (2.2), les polynômes  $L'_n$ ,  $n \geq 1$ , forment une famille orthogonale pour le produit scalaire :  $(\varphi, \psi) \mapsto \int_{-1}^1 \varphi(x)\psi(x) (1-x^2) dx$ .  $\square$

Le mode de calcul des poids  $\rho_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 2.2.3.** *Les poids  $\rho_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , sont donnés par*

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\eta_j)}. \quad (2.11)$$

**Preuve.** En appliquant la formule (2.10) au polynôme  $\frac{L'_N(x)}{x-\eta_j}(1-x^2)$ , on voit que

$$\int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x-\eta_j}(1-x^2) dx = \frac{d}{dx}((1-x^2)L'_N)(\eta_j)\rho_j,$$

d'où, d'après l'équation différentielle (2.1) :

$$\rho_j = -\frac{1}{N(N+1)L_N(\eta_j)} \int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x - \eta_j} (1 - x^2) dx. \quad (2.12)$$

Pour évaluer l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x - \xi_j} (1 - x^2) dx$ , on calcule par récurrence sur  $n$  la quantité

$$S_n(x, \eta) = \frac{L'_{n+1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n+1}(\eta)L'_n(x)}{x - \eta}.$$

En dérivant la formule (2.8), on établit une formule de récurrence sur les  $L'_n$ ,  $n \geq 1$ , :

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n+1)xL'_n(x) + (2n+1)L_n(x) - nL'_{n-1}(x),$$

puis en remplaçant  $(2n+1)L_n$  par  $L'_{n+1} - L'_{n-1}$  d'après la formule (2.6), on obtient

$$nL'_{n+1}(x) = (2n+1)xL'_n(x) - (n+1)L'_{n-1}(x). \quad (2.13)$$

En utilisant cette formule, on a

$$S_n(x, \eta) = \frac{(2n+1)(x - \eta)L'_n(x)L'_n(\eta) - (n+1)(L'_{n-1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n-1}(\eta)L'_n(x))}{n(x - \eta)},$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{S_n(x, \eta)}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}L'_n(x)L'_n(\eta) + \frac{S_{n-1}(x, \eta)}{n}.$$

Puisque  $S_0$  est identiquement nul, on obtient

$$\frac{L'_{n+1}(x)L'_n(\eta) - L'_{n+1}(\eta)L'_n(x)}{x - \eta} = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)} L'_k(x)L'_k(\eta).$$

On utilise maintenant cette formule avec  $n = N-1$  et  $\eta = \eta_j$  : on la multiplie par  $(1 - x^2)$  et on intègre sur  $\Lambda$  par rapport à la variable  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned} L'_{N-1}(\xi_j) \int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x - \xi_j} (1 - x^2) dx + L'_N(\eta_j) \int_{-1}^1 \frac{L'_{N-1}(x)}{x - \eta_j} (1 - x^2) dx = \\ N \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} L'_k(\eta_j) \int_{-1}^1 L'_k(x) (1 - x^2) dx. \end{aligned}$$

Comme les  $\eta_j$  sont les zéros de  $L'_N$ , le deuxième terme du membre de gauche s'annule. En rappelant que les  $L'_k$  sont deux à deux orthogonaux pour la mesure  $(1 - x^2)dx$ , donc d'intégrale nulle pour cette mesure lorsque  $k$  est  $\geq 2$ , on en déduit

$$L'_{N-1}(\xi_j) \int_{-1}^1 \frac{L'_N(x)}{x - \xi_j} (1 - x^2) dx = \frac{3N}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2N.$$

En combinant ce résultat avec (2.12), on arrive à la formule

$$\rho_j = -\frac{2}{(N+1)L_N(\xi_j)L'_{N-1}(\eta_j)}.$$

La formule (2.13) et la formule (2.6) dérivée, appliquées en  $\eta_j$ , s'écrivent

$$NL'_{N+1}(\eta_j) = -(N+1)L'_{N-1}(\eta_j) \quad \text{et} \quad (2N+1)L_N(\xi_j) = L'_{N+1}(\eta_j) - L'_{N-1}(\eta_j),$$

donc  $L'_{N-1}(\eta_j)$  est égal à  $-NL_N(\eta_j)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

La formule de quadrature de Gauss-Lobatto (2.10) est exacte sur  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ . Comme le produit de deux polynômes de  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  appartient à  $\mathbb{P}_{2N}(\Lambda)$ , on va démontrer une propriété de stabilité de cette formule sur les fonctions égales au carré d'un polynôme de  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ , qui appartiennent à  $\mathbb{P}_{2N}(\Lambda)$  mais non nécessairement à  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ . Ce résultat intervient à plusieurs reprises dans l'analyse numérique des méthodes spectrales.

**Proposition 2.2.4.** *On a l'égalité*

$$\sum_{j=0}^N L_N^2(\eta_j) \rho_j = (2 + \frac{1}{N}) \|L_N\|_{0,\Lambda}^2. \quad (2.14)$$

**Preuve.** En remplaçant les poids  $\rho_j$  par leurs expressions (2.11) on obtient

$$\sum_{j=0}^N L_N^2(\eta_j) \rho_j = \sum_{j=0}^N L_N^2(\eta_j) \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\eta_j)} = \frac{2}{N},$$

et l'expression (2.5) donne le résultat cherché.  $\square$

**Corollaire 2.2.5.** *Tout polynôme  $\varphi_N$  de  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  vérifie les inégalités*

$$\|\varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 \leq \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\eta_j) \rho_j \leq 3 \|\varphi_N\|_{0,\Lambda}^2. \quad (2.15)$$

**Preuve.** On écrit le polynôme  $\varphi_N$  de  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  sous la forme  $\sum_{n=0}^N \alpha_n L_n$ ,  $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ . D'une part, grâce à l'orthogonalité des  $L_n$  dans  $L^2(\Lambda)$  et l'égalité (2.5), on a

$$\|\varphi_N\|_{0,\Lambda}^2 = \left( \sum_{n=0}^N \alpha_n L_n, \sum_{n=0}^N \alpha_n L_n \right)_{0,\Lambda} = \sum_{n=0}^N \alpha_n^2 \|L_n\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=0}^N \frac{2\alpha_n^2}{2n+1}.$$

D'autre part

$$\sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\eta_j) \rho_j = \sum_{j=0}^N \left( \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n L_n(\eta_j) \right)^2 \rho_j + 2 \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \alpha_N L_n(\eta_j) L_N(\eta_j) \rho_j + \alpha_N^2 \sum_{j=0}^N L_N^2(\eta_j) \rho_j.$$

En calculant le premier terme de droite, on obtient des polynômes  $L_n L_m$ ,  $n, m = 0, \dots, N-1$ , de degré inférieur à  $2N-1$ . On applique alors la propriété d'exactitude (2.10), on trouve que la première somme est égale à  $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ . Pour le deuxième terme, les polynômes  $L_N L_n$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  sont de degré  $\leq 2N-1$ . On utilise une autre fois la formule (2.10) on voit que ce terme est nul grâce à l'orthogonalité des  $L_n$ . Par conséquent,

$$\sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\eta_j) \rho_j = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^2 \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \alpha_N^2 \sum_{j=0}^N L_N^2(\eta_j) \rho_j.$$

De la Proposition 2.2.4, on déduit les inégalités

$$\|L_N\|_{0,\Lambda}^2 \leq \sum_{j=0}^N L_N^2(\xi_j) \rho_j \leq 3 \|L_N\|_{0,\Lambda}^2,$$

d'où les mêmes inégalités sur le polynôme  $\varphi_N$ .  $\square$

**Proposition 2.2.6.** (*Formule de quadrature de Gauss-Lobatto sur le carré  $\Lambda^2$* )

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , fixé. Pour tout polynôme  $\varphi$  de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$ , on ait

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j. \quad (2.16)$$

**Preuve.** Soit  $\varphi$  un polynôme de  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$ , c'est-à-dire qu'il est de degré  $\leq 2N-1$  par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$ . On utilise la formule (2.10) par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^N \varphi(\eta_i, y) \rho_i dy, \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j. \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 2.2.7.** *Tout polynôme  $\varphi_N$  de  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$  vérifie*

$$\|\varphi_N\|_{0,\Lambda^2}^2 \leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j \leq 9 \|\varphi_N\|_{0,\Lambda^2}^2. \quad (2.17)$$

**Preuve.** Soit  $\varphi_N$  un polynôme de  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ . Utilisant l'inégalité (2.15) par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ , on voit que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(x, \eta_j) \rho_j dx &\leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j \leq 3 \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(x, \eta_j) \rho_j dx, \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi_N^2(x, y) dx dy &\leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j \leq 9 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi_N^2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

$\square$

# Chapitre 3

## Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Ce chapitre a pour but de majorer la distance de fonctions de régularité donnée à un espace de polynôme, pour les normes de Sobolev. Comme les espaces de Sobolev que l'on considère sont des espaces de Hilbert, cette distance sera calculée entre autre au moyen d'opérateurs de projection orthogonale sur l'espace de polynômes.

### 3.1 Erreur d'approximation polynomiale sur l'intervalle

#### 3.1.1 Le projecteur $\pi_N$

On étudie tout d'abord la distance à l'espace  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ , pour la norme de  $L^2(\Lambda)$ .

**Notation 3.1.1.** On note  $\pi_N$  l'opérateur de projection orthogonale de  $L^2(\Lambda)$  sur  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ . Ceci signifie que pour toute fonction  $\varphi$  de  $L^2(\Lambda)$ ,  $\pi_N \varphi$  appartient à  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  et vérifie

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N \varphi)(x) \psi_N(x) dx = 0. \quad (3.1)$$

Une autre façon de caractériser cet opérateur consiste à remarquer que les polynômes sur  $\Lambda$  forment un sous-espace dense dans l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Lambda}$  et donc dans  $L^2(\Lambda)$  (voir [2, exercice 4]). Par conséquent, la famille  $(L_n)_n$  des polynômes de Legendre est une famille totale de l'espace  $L^2(\Lambda)$ . Comme ces polynômes sont deux à deux

orthogonaux dans  $L^2(\Lambda)$ , toute fonction  $\varphi$  de l'espace  $L^2(\Lambda)$  admet le développement

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n L_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \int_{-1}^1 \varphi(x) L_n(x) dx, \quad (3.2)$$

et l'on a

$$\pi_N \varphi = \sum_{n=0}^N \alpha_n L_n.$$

**Théorème 3.1.2.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c$  ne dépendant que de  $m$  telle que, pour toute  $\varphi$  de  $H^m(\Lambda)$ , on ait*

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda} \leq c N^{-m} \|\varphi\|_{m,\Lambda}. \quad (3.3)$$

On commence par prouver un résultat auxiliaire concernant l'opérateur auto-adjoint  $A$  défini en (2.3), qui intervient de façon essentielle dans la démonstration du théorème.

**Lemme 3.1.3.** *Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $A$  est continu de  $H^{\ell+2}(\Lambda)$  dans  $H^\ell(\Lambda)$ . Pour tous  $\ell, k \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $A^k$  est continu de  $H^{\ell+2k}(\Lambda)$  dans  $H^\ell(\Lambda)$ .*

**Preuve.** On vérifie facilement par récurrence sur  $r$  que, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^r(A\varphi)}{dx^r} = -(1-x^2) \frac{d^{r+2}\varphi}{dx^{r+2}} + 2(r+1)x \frac{d^{r+1}\varphi}{dx^{r+1}} + r(r+1) \frac{d^r\varphi}{dx^r}.$$

En appliquant cette formule, on voit que, pour tout  $r$ ,  $0 \leq r \leq \ell$ ,

$$\left\| \frac{d^r(A\varphi)}{dx^r} \right\|_{0,\Lambda} \leq c \left( \left\| \frac{d^{r+2}\varphi}{dx^{r+2}} \right\|_{0,\Lambda} + \left\| \frac{d^{r+1}\varphi}{dx^{r+1}} \right\|_{0,\Lambda} + \left\| \frac{d^r\varphi}{dx^r} \right\|_{0,\Lambda} \right),$$

d'où la première affirmation du lemme. On déduit alors la seconde en itérant  $k$  fois ce résultat.  $\square$

**Preuve du Théorème 3.1.2.** Etant donnée une fonction  $\varphi$  de  $H^m(\Lambda)$  pour laquelle on écrit la décomposition (3.2), il faut estimer

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n^2 \|L_n\|_{0,\Lambda}^2.$$

On va distinguer deux cas, suivant que  $m$  est pair ou impair.

- Lorsque  $m$  est pair :  $m = 2r$ , d'après l'équation différentielle (2.1) vérifiée par les polynômes  $L_n$ , on a

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \int_{-1}^1 \varphi(x) L_n(x) dx = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 \varphi(x) (AL_n)(x) dx.$$

Comme l'opérateur  $A$  est auto-adjoint dans  $L^2(\Lambda)$ , on obtient

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 (A\varphi)(x) L_n(x) dx.$$



En itérant  $r$  fois ce résultat, on en déduit

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{(n(n+1))^r} \int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx.$$

On constate que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2r}} \left( \frac{\int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \right)^2 \|L_n\|_{0,\Lambda}^2.$$

On minore alors les  $n(n+1)$  par  $N^2$ , ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq N^{-4r} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left( \frac{\int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \right)^2 \|L_n\|_{0,\Lambda}^2.$$

Comme les  $\frac{\int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2}$  sont les coefficients de  $A^r \varphi$  dans la base des polynômes de Legendre, on a

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq N^{-4r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \right)^2 \|L_n\|_{0,\Lambda}^2 = N^{-2m} \|A^r \varphi\|_{0,\Lambda}^2.$$

En utilisant le Lemme 3.1.3, on conclut

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq c N^{-2m} \|\varphi\|_{m,\Lambda}^2.$$

- Lorsque  $m$  est impair :  $m = 2r + 1$ , on obtient comme précédemment

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{(n(n+1))^r} \int_{-1}^1 (A^r \varphi)(x) L_n(x) dx,$$

puis on utilise une fois de plus l'équation différentielle (2.1) et on intègre par parties.

On en déduit

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{(n(n+1))^{r+1}} \int_{-1}^1 (A^r \varphi)'(x) L_n'(x) (1-x^2) dx.$$

On voit alors que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2(r+1)}} \frac{\left( \int_{-1}^1 (A^r \varphi)'(x) L_n'(x) (1-x^2) dx \right)^2}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2}.$$

Soit maintenant  $\psi$  une fonction de  $H^1(\Lambda)$ , elle admet le développement (3.2). On

a alors

$$\psi_n = \frac{1}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 \psi(x) (A L_n)(x) dx,$$

on utilise (2.1) et on intègre par parties, on trouve,

$$\psi_n = \frac{\int_{-1}^1 \psi'(x) L_n'(x) (1-x^2) dx}{\int_{-1}^1 L_n'^2(x) (1-x^2) dx}.$$

De la formule (2.2), on déduit alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi'^2(x)(1-x^2)dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\psi_n)^2 \int_{-1}^1 L_n'^2(x)(1-x^2)dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(\int_{-1}^1 \psi'(x)L_n'(x)(1-x^2)dx)^2}{\|L_n\|_{0,\Lambda}^2}. \end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour la fonction  $\psi = A^r \varphi$  et en minorant  $(n(n+1))^{2r+1}$  par  $N^{2(2r+1)}$ , on voit que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq N^{-2(2r+1)} \int_{-1}^1 (A^r \varphi')^2(x)(1-x^2)dx.$$

Et on conclut

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq cN^{-2m} \|(A^r \varphi)'\|_{0,\Lambda}^2 \leq cN^{-2m} \|A^r \varphi\|_{1,\Lambda}^2,$$

d'où, d'après le Lemme 3.1.3,

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{0,\Lambda}^2 \leq cN^{-2m} \|\varphi\|_{m,\Lambda}^2.$$

□

### 3.1.2 Le projecteur $\pi_N^{1,0}$

On s'intéresse dans cette section à l'approximation de fonctions de  $H_0^1(\Lambda)$  dans l'espace  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ .

**Notation 3.1.4.** On note  $\pi_N^{1,0}$  l'opérateur de projection orthogonale de  $H_0^1(\Lambda)$  sur  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$  pour le produit scalaire associé à la norme  $|\cdot|_{1,\Lambda}$ . Ceci équivaut à dire que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $H_0^1(\Lambda)$ ,  $\pi_N^{1,0} \varphi$  appartient à  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$  et vérifie

$$\forall \psi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0} \varphi)')(x) \psi_N'(x) dx = 0. \quad (3.4)$$

**Théorème 3.1.5.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $m$  telle que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ , on ait

$$|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi|_{1,\Lambda} \leq c N^{1-m} \|\varphi\|_{m,\Lambda}, \quad (3.5)$$

et

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0} \varphi\|_{0,\Lambda} \leq c N^{-m} \|\varphi\|_{m,\Lambda}. \quad (3.6)$$

**Preuve.** L'estimation (3.5) est évidente pour  $N = 1$ . On suppose que  $N$  est supérieur ou égal à 2. On va d'abord établir l'identité

$$(\pi_N^{1,0}\varphi)' = \pi_{N-1}\varphi', \quad (3.7)$$

pour toute fonction  $\varphi$  de  $H_0^1(\Lambda)$ . Pour cela, on considère un polynôme quelconque  $\phi_{N-1}$  de  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$  et en posant

$$\psi_N(x) = \int_{-1}^x \left( \phi_{N-1}(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{N-1}(\eta) d\eta \right) d\xi,$$

on s'aperçoit qu'il s'écrit comme la somme d'une constante  $\lambda$  et la dérivée  $\psi_N'$  d'un polynôme de  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ . On a alors

$$\int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x) \phi_{N-1}(x) dx = \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x) \psi_N'(x) dx + \lambda \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x) dx.$$

En utilisant d'une part la définition (3.4) de l'opérateur  $\pi_N^{1,0}$  et d'autre part le fait que  $\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi$  s'annule en  $\pm 1$ , on obtient

$$\int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x) \phi_{N-1}(x) dx = 0.$$

Comme  $(\pi_N^{1,0}\varphi)'$  appartient bien à  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ , on en déduit l'identité (3.7). On a alors

$$|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda} = \|\varphi' - \pi_{N-1}(\varphi')\|_{0,\Lambda},$$

et en utilisant le Théorème ??, on voit que

$$|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda} \leq c(N-1)^{-(m-1)} \|\varphi'\|_{m-1,\Lambda}.$$

Comme le rapport  $\frac{N-1}{N}$  est borné, ceci entraîne pour une autre constante  $c$

$$|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda} \leq cN^{-(m-1)} \|\varphi\|_{m,\Lambda},$$

ce qui est la majoration (3.5).

La majoration de  $\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{0,\Lambda}$  s'obtient grâce à la méthode de dualité d'Aubin-Nietche, qui consiste à remarquer que

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{0,\Lambda} = \sup_{g \in L^2(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(x) g(x) dx}{\|g\|_{0,\Lambda}}. \quad (3.8)$$

Pour toute fonction  $g$  dans  $L^2(\Lambda)$ , on définit le problème : trouver  $\chi$  dans  $H_0^1(\Lambda)$  telle que,

$$\forall \psi \in H_0^1(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \chi'(x) \psi'(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) \psi(x) dx.$$

En vertu du lemme de Poincaré-Friedrichs et de Lax-Milgram, on peut facilement prouver que le problème ci-dessus est uniquement résoluble. Encore grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, en prenant  $\psi$  égal à  $\chi$ , on a tout de suite la majoration

$$\|\chi\|_{1,\Lambda} \leq c\|g\|_{0,\Lambda}.$$

Puis en prenant  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\Lambda)$ , on voit que  $\chi''$  est égal à  $-g$  et on obtient

$$\|\chi\|_{2,\Lambda} \leq c\|g\|_{0,\Lambda}. \quad (3.9)$$

L'argument clé de la méthode est le calcul de

$$\int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x)\chi'(x)dx.$$

D'après la définition (3.4) de l'opérateur  $\pi_N^{1,0}$ , ceci implique pour tout  $\chi_N$  dans  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(x)g(x)dx &= \int_{-1}^1 (\varphi' - (\pi_N^{1,0}\varphi)')(x)(\chi' - \chi'_N)(x)dx \\ &\leq |\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda} |\chi - \chi_N|_{1,\Lambda}. \end{aligned}$$

On choisit  $\chi_N$  égal à  $\pi_N^{1,0}\chi$  et on applique la majoration (3.5) à la fonction  $\chi$  avec  $m = 2$ , ce qui donne

$$\int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(x)g(x)dx \leq cN^{-1}|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda}\|\chi\|_{2,\Lambda}.$$

Puis, grâce à (3.9), on en déduit

$$\int_{-1}^1 (\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi)(x)g(x)dx \leq cN^{-1}|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda}\|g\|_{0,\Lambda},$$

ceci combiné avec (3.8), entraîne

$$\|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi\|_{0,\Lambda} \leq cN^{-1}|\varphi - \pi_N^{1,0}\varphi|_{1,\Lambda}.$$

Il suffit d'appliquer la majoration (3.5) pour conclure. □

## 3.2 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale sur le carré

Le but de cette section est d'établir des majorations analogues à celles de la section 3.1, de la distance d'une fonction de régularité connue à un certain espace de polynômes dans l'espace  $H^m(\Lambda^2)$ . Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la

section 3.1, utilisés sur chaque variable avec un argument de “tensorisation”. Ceci signifie que l’on va faire appel à la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
L^2(\Lambda^2) &= \{v : \Lambda^2 \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Lambda^2} v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty\} \\
&= \{v : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 v^2(x, y) dy) dx < +\infty\} \\
&= \{v : \Lambda \rightarrow L^2(\Lambda), \int_{-1}^1 \|v(x, \cdot)\|_{0, \Lambda}^2 dx < +\infty\} \\
&= L^2(\Lambda, L^2(\Lambda)).
\end{aligned}$$

De la même façon, on voit que

$$H^1(\Lambda^2) = L^2(\Lambda, H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda, L^2(\Lambda)).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
H^1(\Lambda^2) &= \{v \in L^2(\Lambda, L^2(\Lambda)), \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Lambda, L^2(\Lambda)), \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))\} \\
&= \{v \in L^2(\Lambda, L^2(\Lambda)), \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))\} \cap \\
&\quad \{v : \Lambda \rightarrow H^1(\Lambda), \int_{-1}^1 \|v(x, \cdot)\|_{0, \Lambda}^2 + \|\frac{\partial v}{\partial y}(x, \cdot)\|_{0, \Lambda}^2 dx \leq \infty\}.
\end{aligned}$$

On donne un résultat qui sera de grande importance dans ce qui suit.

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout  $m, r \in \mathbb{N}$  tels que,  $0 \leq r \leq m$ , l’espace  $H^m(\Lambda^2)$  est inclus avec injection continue dans l’espace  $H^r(\Lambda, H^{m-r}(\Lambda))$ .*

**Preuve.** C’est une conséquence immédiate de l’inégalité

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^r(\Lambda, H^{m-r}(\Lambda))}^2 &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^r \|(\frac{\partial^k v}{\partial x^k})(x, \cdot)\|_{m-r, \Lambda}^2 dx \\
&= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^r (\int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^{m-r} (\frac{\partial^{k+\ell} v}{\partial x^k \partial y^\ell})^2(x, y) dy) dx \\
&\leq \int_{\Lambda^2} \sum_{k+\ell=0}^m (\frac{\partial^{k+\ell} v}{\partial x^k \partial y^\ell})^2(x) dx = \|v\|_{m, \Lambda^2}^2.
\end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, le symbole  $^{(x)}$  ou  $^{(y)}$  après un opérateur monodimensionnel indiquera que l’on fait agir cet opérateur par rapport à la variable  $x$  ou  $y$  respectivement.

### 3.2.1 Le projecteur $\Pi_N$

**Notation 3.2.2.** *On note  $\Pi_N$  l’opérateur de projection orthogonale de  $L^2(\Lambda^2)$  sur  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ .*

Etant donnée une fonction  $v$  de  $L^2(\Lambda^2)$ , on a par exemple pour presque tout  $y$  dans  $\Lambda$  :

$$\int_{-1}^1 (v(x, y) - \pi_N^{(x)} v(x, y)) L_k(x) dx = 0, \quad 0 \leq k \leq N.$$

**Proposition 3.2.3.** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on ait*

$$\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}. \quad (3.10)$$

*De plus, les opérateurs  $\pi_N^{(x)}$  et  $\pi_N^{(y)}$  commutent.*

**Preuve.** Voir TD.

**Théorème 3.2.4.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $m$  telle que, pour toute fonction  $v$  de  $H^m(\Lambda^2)$ , on ait*

$$\|v - \Pi_N v\|_{0, \Lambda^2} \leq c N^{-m} \|v\|_{m, \Lambda^2}. \quad (3.11)$$

**Preuve.** Utilisant l'identité (3.10), on voit que

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_N v\|_{0, \Lambda^2} &= \|v - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)} v\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))} \\ &\leq \|v - \pi_N^{(x)} v\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))} + \|\pi_N^{(x)}(v - \pi_N^{(y)} v)\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))}. \end{aligned}$$

Pour majorer le premier terme de droite, on applique le Théorème 3.1.2 par rapport à la variable  $x$

$$\|v - \pi_N^{(x)} v\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))} \leq c N^{-m} \|v\|_{H^m(\Lambda, L^2(\Lambda))}.$$

Pour majorer le second terme, on utilise la continuité de l'opérateur  $\pi_N$  de l'espace  $L^2(\Lambda)$  dans lui-même, puis on applique le Théorème 3.1.2 par rapport à la variable  $y$

$$\|\pi_N^{(x)}(v - \pi_N^{(y)} v)\|_{L^2(\Lambda; L^2(\Lambda))} \leq \|v - \pi_N^{(y)} v\|_{L^2(\Lambda; L^2(\Lambda))} \leq c N^{-m} \|v\|_{L^2(\Lambda; H^m(\Lambda))}.$$

On conclut en regroupant ces deux estimations et en utilisant le Lemme 3.2.1 pour  $r = m$  et pour  $r = 0$ .  $\square$

### 3.2.2 Le projecteur $\Pi_N^{1,0}$

Comme précédemment, on s'intéresse à l'approximation de fonctions de  $H_0^1(\Lambda^2)$  par des polynômes de l'espace  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ .

**Notation 3.2.5.** *On note  $\Pi_N^{1,0}$  l'opérateur de projection orthogonale de  $H_0^1(\Lambda^2)$  sur  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$  pour le produit scalaire associé à la norme  $|\cdot|_{1, \Lambda^2}$ .*

**Théorème 3.2.6.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $m$  telle que  $\forall v \in H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$ , on ait*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{1,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \quad (3.12)$$

**Preuve.** Le résultat étant évident pour  $m = 1$ . Pour  $m \geq 2$  on a

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{1,\Lambda^2} = \inf_{v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} |v - v_N|_{1,\Lambda^2},$$

il suffit de trouver un polynôme  $v_N$  de  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$  tel que

$$|v - v_N|_{1,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \quad (3.13)$$

D'après le Lemme 3.2.1, la fonction  $v$  appartient à  $H^1(\Lambda, H^1(\Lambda))$  et même puisqu'elle s'annule sur  $\partial\Lambda^2$ , à  $H_0^1(\Lambda, H_0^1(\Lambda))$ . On choisit alors  $v_N$  égal à  $(\pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)})v$ , qui appartient à  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ . Comme on a

$$|v - v_N|_{1,\Lambda^2}^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial y}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2}^2,$$

et puisque la définition de  $v_N$  est symétrique en  $x$  et en  $y$  il suffit de majorer par exemple  $\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2}$ . On utilise pour cela l'inégalité triangulaire,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - \pi_N^{1,0(x)} v) \right\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \pi_N^{1,0(x)} (v - \pi_N^{1,0(y)} v) \right\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))}.$$

On utilise la majoration (3.6) par rapport à la variable  $x$  dans le premier terme, et la continuité de l'opérateur  $\pi_N^{1,0}$  de  $H_0^1(\Lambda)$  dans lui-même dans le second terme, on obtient

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{H^m(\Lambda, L^2(\Lambda))} + \left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - \pi_N^{1,0(y)} v) \right\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))}.$$

Comme l'opérateur  $\pi_N^{1,0(y)}$  commute avec la dérivation en  $x$ , ceci s'écrit

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{H^m(\Lambda, L^2(\Lambda))} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} - \pi_N^{1,0(y)} \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Lambda, L^2(\Lambda))},$$

on utilise la majoration (3.5) par rapport à la variable  $y$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{H^m(\Lambda, L^2(\Lambda))} + cN^{1-m} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Lambda, H^{m-1}(\Lambda))}.$$

Le Lemme 3.2.1 donne alors

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - v_N) \right\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}.$$

□

### 3.2.3 L'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_N$

**Notation 3.2.7.** On note  $\mathcal{I}_N$  l'opérateur d'interpolation aux nœuds de Gauss-Lobatto  $(\eta_i, \eta_j), 0 \leq i, j \leq N$ .  $\mathcal{I}_N$  est caractérisé par

i) pour toute fonction  $v$  continue sur  $\overline{\Lambda^2}$ ,  $\mathcal{I}_N v$  appartient à  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ .

ii)

$$(\mathcal{I}_N v)(\eta_i, \eta_j) = v(\eta_i, \eta_j), \quad 0 \leq i, j \leq N. \quad (3.14)$$

On admet le résultat suivant. On réfère à [2] pour la démonstration.

**Théorème 3.2.8.** Pour tout entier  $m \geq 2$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $m$  telle que, pour toute fonction  $v$  de  $H^m(\Lambda^2)$ , on ait

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{0, \Lambda^2} \leq cN^{-m} \|v\|_{m, \Lambda^2}. \quad (3.15)$$



# Chapitre 4

## Discrétisation spectrale du problème de Dirichlet pour le laplacien

Le but de ce chapitre est d'effectuer l'analyse numérique d'une méthode spectrale pour l'équation  $-\Delta u = f$ , lorsqu'elle est muni de conditions aux limites de Dirichlet. On écrit le problème discret associé à la formulation variationnelle et on prouve qu'il admet une solution unique. Puis on établit des estimations d'erreur a priori entre les solutions des problèmes exact et discret.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$ . On considère le problème de Dirichlet homogène pour le laplacien

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ . On s'intéresse à l'étude de la discrétisation par une méthode spectrale de la solution du problème variationnel associé à (4.1)

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \end{cases} \quad (4.2)$$

où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est donnée par

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Par le théorème de Lax-Milgram, on vérifie que (4.2) est uniquement résoluble.

On suppose maintenant que le domaine  $\Omega$  est le carré  $] -1, 1[^2$  que l'on note  $\Lambda^2$ . On

introduit une approximation du produit scalaire de  $L^2(\Lambda^2)$ . La formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto, puisque le fait que cette formule possède des nœuds aux extrémités de l'intervalle  $] -1, 1[$ , permet de traiter facilement les conditions aux limites. Le paramètre de discrétisation est un entier  $N \geq 2$ , et  $c$  désigne une constante positive indépendante de  $N$ .

On définit la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_N$  sur les fonctions continues sur  $\overline{\Lambda^2}$  par

$$(u, v)_N = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(\eta_i, \xi_j) v(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j, \quad (4.3)$$

où les nœuds  $\eta_j$  et les poids  $\rho_j$  sont introduits dans la Proposition 2.2.2. Une des conséquences de la propriété d'exactitude (2.16), est que la forme  $(\cdot, \cdot)_N$  coïncide avec le produit scalaire de  $L^2(\Lambda^2)$  lorsqu'elle est appliquée à des fonctions  $u$  et  $v$  telles que le produit  $uv$  soit un polynôme de degré  $\leq 2N - 1$ . En outre, on déduit du Corollaire 2.2.7 que l'application  $v \mapsto (v, v)_N^{\frac{1}{2}}$  est une norme sur  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{0, \Lambda^2}$ . Le produit discret  $(\cdot, \cdot)_N$  est le produit scalaire associé à cette norme sur  $\mathbb{P}_N(\Lambda^2) \times \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ .

La fonction  $f$  est ici supposée continue sur  $\overline{\Lambda^2}$ .

On propose le problème discret suivant, construit en remplaçant l'espace  $H_0^1(\Lambda^2)$  par son sous-espace  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$  et l'intégrale par la formule de quadrature de Gauss-Lobatto (2.16) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) \text{ tel que :} \\ \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N, \end{cases} \quad (4.4)$$

où la forme bilinéaire  $a_N(\cdot, \cdot)$  est donnée par

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) : a_N(u_N, v_N) = (\nabla u_N, \nabla v_N)_N. \quad (4.5)$$

L'analyse numérique de ce problème repose sur les propriétés de la forme bilinéaire  $a_N(\cdot, \cdot)$ , énoncées dans la proposition suivante

**Proposition 4.1.** *Pour tout entier  $N \geq 2$ , la forme  $a_N(\cdot, \cdot)$  satisfait les propriétés de continuité*

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) : a_N(u_N, v_N) \leq 3|u_N|_{1, \Lambda^2} \cdot |v_N|_{1, \Lambda^2}, \quad (4.6)$$

*et d'ellipticité :*

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) : a_N(v_N, v_N) \geq |v_N|_{1, \Lambda^2}^2. \quad (4.7)$$

**Preuve.** En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz dans la relation (4.3), on voit que :

$$(u, v)_N \leq \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N v^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

et par suite,

$$(u, v)_N \leq (u, u)_N^{\frac{1}{2}} \cdot (v, v)_N^{\frac{1}{2}}.$$

On est donc ramené à prouver que

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), |u_N|_{1, \Lambda^2}^2 \leq a_N(u_N, u_N) \leq 3|u_N|_{1, \Lambda^2}^2. \quad (4.8)$$

Pour tout  $u_N$  dans  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ , on a

$$a_N(u_N, u_N) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \frac{\partial u_N}{\partial x} \right)^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \frac{\partial u_N}{\partial y} \right)^2(\eta_i, \eta_j) \rho_i \rho_j.$$

On remarque que  $\frac{\partial u_N}{\partial x}$  est un polynôme de degré  $\leq N - 1$  par rapport à  $x$ , de sorte que la propriété d'exactitude (2.10) permet de remplacer la formule de quadrature appliquée à  $\left( \frac{\partial u_N}{\partial x} \right)^2$  par l'intégrale (mais uniquement par rapport à la variable  $x$ ). En tenant un raisonnement symétrique pour  $\left( \frac{\partial u_N}{\partial y} \right)^2$ , on obtient :

$$a_N(u_N, u_N) = \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \left( \frac{\partial u_N}{\partial x} \right)^2(x, \eta_j) \rho_j dx + \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial u_N}{\partial y} \right)^2(\eta_i, y) \rho_i dy.$$

Ensuite, on applique (2.15) par rapport à la variable  $y$  dans le premier terme et par rapport à  $x$  dans le second, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\| \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, \cdot) \right\|_{0, \Lambda}^2 dx + \int_{-1}^1 \left\| \frac{\partial u_N}{\partial y}(\cdot, y) \right\|_{0, \Lambda}^2 dy &\leq a_N(u_N, u_N) \leq \\ &3 \int_{-1}^1 \left\| \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, \cdot) \right\|_{0, \Lambda}^2 dx + 3 \int_{-1}^1 \left\| \frac{\partial u_N}{\partial y}(\cdot, y) \right\|_{0, \Lambda}^2 dy. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (4.8). □

**Proposition 4.2.** *Pour toute fonction  $f$  continue sur  $\overline{\Lambda^2}$ , le problème (4.4) admet une solution unique. De plus, cette solution vérifie*

$$\|u_N\|_{1, \Lambda^2} \leq c \|\mathcal{I}_N f\|_{0, \Lambda^2}. \quad (4.9)$$

**Preuve.** La continuité et l'ellipticité de la forme  $a_N(\cdot, \cdot)$  ont été démontrées dans la proposition précédente. La forme linéaire  $v_N \mapsto (f, v_N)_N$  est nécessairement continue sur  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$  puisqu'elle est définie sur un espace de dimension finie. Pour obtenir l'inégalité

de stabilité (4.9) on choisit  $v_N$  égal à  $u_N$  dans l'énoncé du problème (4.4) et on utilise la Proposition 4.1 et la définition de l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_N$ ,

$$|u_N|_{1,\Lambda^2} \leq a_N(u_N, u_N) = (f, u_N)_N = (\mathcal{I}_N f, u_N)_N,$$

puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Corollaire 2.2.7, on en déduit

$$|u_N|_{1,\Lambda^2}^2 \leq (\mathcal{I}_N f, \mathcal{I}_N f)_N^{\frac{1}{2}} (u_N, u_N)_N^{\frac{1}{2}} \leq 9 \|\mathcal{I}_N f\|_{0,\Lambda^2} \|u_N\|_{0,\Lambda^2}.$$

On conclut en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.2).  $\square$

Le résultat fondamental pour l'estimation de l'erreur est le suivant

**Théorème 4.3.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour toute fonction  $f$  continue sur  $\overline{\Lambda^2}$  et tout  $N \in \mathbb{N}^*$  on ait l'estimation d'erreur entre la solution  $u$  du problème (4.2) sur le carré  $\Lambda^2$  et la solution  $u_N$  du problème discret (4.4)*

$$|u - u_N|_{1,\Lambda^2} \leq c \left( \inf_{v_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}^0(\Lambda^2)} |u - v_{N-1}|_{1,\Lambda^2} + \|f - \mathcal{I}_N f\|_{0,\Lambda^2} + \inf_{f_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)} \|f - f_{N-1}\|_{0,\Lambda^2} \right). \quad (4.10)$$

La démonstration est basée sur le théorème suivant

**Théorème 4.4. (type C  a).** *Pour toute fonction  $f$  continue sur  $\overline{\Lambda^2}$ , on a l'estimation d'erreur entre la solution  $u$  du problème (4.2) et la solution  $u_N$  du problème (4.4)*

$$|u - u_N|_{1,\Lambda^2} \leq 2 \left( \inf_{v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \left( |u - v_N|_{1,\Lambda^2} + \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}} \right) + \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}} \right). \quad (4.11)$$

**Preuve.** Pour tout  $v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ , on a

$$|u - u_N|_{1,\Lambda^2} \leq |u - v_N|_{1,\Lambda^2} + |u_N - v_N|_{1,\Lambda^2}, \quad (4.12)$$

en utilisant l'ellipticité de la forme  $a_N(\cdot, \cdot)$ ,

$$|u_N - v_N|_{1,\Lambda^2}^2 \leq a_N(u_N - v_N, u_N - v_N). \quad (4.13)$$

Comme  $u_N$  est solution du problème (4.4), on a

$$a_N(u_N - v_N, u_N - v_N) = (f, u_N - v_N)_N - a_N(v_N, u_N - v_N).$$

Similairement, comme  $u$  est solution du problème (4.2), on a

$$a(u - v_N, u_N - v_N) = (f, u_N - v_N)_{0,\Lambda^2} - a(v_N, u_N - v_N).$$

Mettant bout à bout les deux dernières identités, on obtient :

$$\begin{aligned} a_N(u_N - v_N, u_N - v_N) &= a(u - v_N, u_N - v_N) - (f, u_N - v_N)_{0,\Lambda^2} + (f, u_N - v_N)_N \\ &\quad + a(v_N, u_N - v_N) - a_N(v_N, u_N - v_N), \end{aligned}$$

combinant avec (4.13), grâce à la continuité de la forme  $a(\cdot, \cdot)$  et la continuité des formes  $z_N \mapsto (f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}$  et  $z_N \mapsto a_N(v_N, z_N) - a(v_N, z_N)$  sur l'espace  $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$  pour la semi-norme  $|\cdot|_{1,\Lambda^2}$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} |u_N - v_N|_{1,\Lambda^2}^2 &\leq |u - v_N|_{1,\Lambda^2} |u_N - v_N|_{1,\Lambda^2} + \left( \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}} \right) |u_N - v_N|_{1,\Lambda^2} \\ &\quad + \left( \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}} \right) |u_N - v_N|_{1,\Lambda^2}. \end{aligned}$$

Divisant les deux membres par  $|u_N - v_N|_{1,\Lambda^2}$  et réutilisant l'inégalité triangulaire (4.12), on en déduit : pour tout  $v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ ,

$$|u - u_N|_{1,\Lambda^2} \leq 2|u - v_N|_{1,\Lambda^2} + \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}} + \sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{|z_N|_{1,\Lambda^2}}.$$

□

Revenons à la **démonstration** du Théorème 4.3.

On prend l'estimation d'erreur (4.11). Pour se débarrasser du troisième terme du membre de droite de cette estimation, on prend  $v_N$  de degré  $N - 1$ . Pour tout  $z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ , le polynôme  $\nabla v_N \cdot \nabla z_N$  est dans  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$ , donc la propriété d'exactitude (2.16) entraîne

$$a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N) = 0. \quad (4.14)$$

Il nous reste à majorer  $|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}|$  pour tout  $z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ . On introduit un polynôme quelconque  $f_{N-1}$  de  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)$ . L'exactitude de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto donne

$$(f_{N-1}, z_N)_{0,\Lambda^2} - (f_{N-1}, z_N)_N = 0.$$

On voit que :

$$\begin{aligned} |(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}| &= |(f - f_{N-1}, z_N)_N - (f - f_{N-1}, z_N)_{0,\Lambda^2}|, \\ &\leq |(f - f_{N-1}, z_N)_N| + |(f - f_{N-1}, z_N)_{0,\Lambda^2}|. \end{aligned}$$

Comme  $(f, z_N)_N = (\mathcal{I}_N f, z_N)_N$  on obtient :

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}| \leq |(\mathcal{I}_N f - f_{N-1}, z_N)_N| + |(f - f_{N-1}, z_N)_{0,\Lambda^2}|.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0,\Lambda^2}| \leq |(\mathcal{I}_N f - f_{N-1}, \mathcal{I}_N f - f_{N-1})_N^{\frac{1}{2}} (z_N, z_N)_N^{\frac{1}{2}}| + \|f - f_{N-1}\|_{0,\Lambda^2} \|z_N\|_{0,\Lambda^2}.$$

Du Corollaire 2.2.7, on en déduit :

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0, \Lambda^2}| \leq (9\|\mathcal{I}_N f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2} + \|f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2})\|z_N\|_{0, \Lambda^2}.$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on obtient

$$\sup_{z_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0, \Lambda^2}|}{|z_N|_{1, \Lambda^2}} \leq c(9\|\mathcal{I}_N f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2} + \|f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2}).$$

De l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathcal{I}_N f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2} \leq \|f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2} + \|f - \mathcal{I}_N f\|_{0, \Lambda^2},$$

on en déduit

$$\sup_{z_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)_{0, \Lambda^2}|}{|z_N|_{1, \Lambda^2}} \leq c(\|f - \mathcal{I}_N f\|_{0, \Lambda^2} + \|f - f_{N-1}\|_{0, \Lambda^2}). \quad (4.15)$$

Ce résultat combiné avec (4.11) et (4.14), donne l'estimation cherchée.  $\square$

Dans l'inégalité du Théorème 4.3, on choisit  $v_{N-1}$  égal à  $\Pi_{N-1}^{1,0} u$  et  $f_{N-1}$  égal à  $\Pi_{N-1} f$ .

On déduit la majoration d'erreur à priori.

**Corollaire 4.5.** *On suppose que la solution  $u$  du problème (4.2) est dans  $H^m(\Lambda^2)$  pour tout entier  $m \geq 1$ , et la donnée  $f$  est dans  $H^r(\Lambda^2)$  pour tout entier  $r \geq 2$ . Alors, pour le problème discret (4.4) on a la majoration d'erreur*

$$|u - u_N|_{1, \Lambda^2} \leq c(N^{1-m}\|u\|_{m, \Lambda^2} + N^{-r}\|f\|_{r, \Lambda^2}). \quad (4.16)$$

**Preuve.** On a

$$|u - u_N|_{1, \Lambda^2} \leq c(|u - \Pi_{N-1}^{1,0} u|_{1, \Lambda^2} + \|f - \mathcal{I}_N f\|_{0, \Lambda^2} + \|f - \Pi_{N-1} f\|_{0, \Lambda^2}).$$

En utilisant les Théorèmes 3.2.6, 3.2.8 et 3.2.4 sur les trois termes du membre de droite respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} |u - u_N|_{1, \Lambda^2} &\leq c((N-1)^{1-m}\|u\|_{m, \Lambda^2} + N^{-r}\|f\|_{r, \Lambda^2} + (N-1)^{-r}\|f\|_{r, \Lambda^2}), \\ &\leq c\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^{1-m} N^{1-m}\|u\|_{m, \Lambda^2} + N^{-r}\|f\|_{r, \Lambda^2} + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-r} N^{-r}\|f\|_{r, \Lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Comme la quantité  $(\frac{N-1}{N})$  est bornée, on obtient l'inégalité cherchée.  $\square$

# Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] C. BERNARDI, V.GIRAULT, Y. MADAY, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'éléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.
- [3] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Specral, Spectral Element and Mortar Element Methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre, 1998.
- [4] C. BERNARDI, Y. MADAY, F. RAPETTI, *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, 2004.
- [5] R. DAULTRAY, J.-L. LIONS, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Licences et les Techniques*, Masson, Paris, 1987.