

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de génie mécanique



Polycopié de cours

# Résistance Des Matériaux

Elaboré par

Younès SAADALLAH

Mars 2020

## TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos .....	1
CHAPITRE I Introduction et généralités .....	
1.1 Buts et hypothèses de la résistance des matériaux .....	3
1.1.1 Hypothèses de la résistance des matériaux .....	3
1.1.2 Hypothèses de la résistance des matériaux .....	3
1.2 Classification des solides .....	4
1.2.1 Les poutres .....	4
1.2.2 Les plaques .....	5
1.2.3 Les coques .....	5
1.3 Différents types de chargements .....	5
1.4 Liaisons .....	6
1.5 Principe général d'équilibre .....	7
1.6 Principes de la coupe .....	8
1.7 Définition des efforts et conventions de signes .....	8
1.7.1 Définition des efforts .....	8
1.7.2 Convention des signes .....	10
Exercices .....	11
CHAPITRE II Traction et compression .....	
2.1 Définitions .....	15
2.2 Contrainte normale de traction et compression .....	15
2.3 Déformation élastique en traction/compression .....	16
II.3.1. Déformation longitudinale et déformation transversale .....	16
II.3.2. Loi de Hooke .....	17
2.4 Condition de résistance à la traction/compression .....	18
Exercices .....	20
CHAPITRE III Cisaillement .....	
3.1 Définitions .....	26
3.2 Cisaillement simple – cisaillement pur .....	26
3.3 Contrainte de cisaillement .....	27
3.4 Déformation élastique en cisaillement .....	27

3.5 Condition de résistance au cisaillement .....	28
Exercices .....	29
CHAPITRE IV Caractéristiques géométriques des sections droites.....	
4.1. Moments statiques d'une section droite .....	35
4.2. Moments d'inertie d'une section droite .....	36
4.3. Formules de transformation des moments d'inertie .....	38
4.3.1 Théorème de Huygens.....	38
4.3.2 Changement des directions des axes .....	39
Exercices .....	41
CHAPITRE V Torsion.....	
5.1 Définitions .....	46
5.2 Contrainte tangentielle ou de glissement .....	47
5.2.1 Angle de torsion .....	47
5.2.2 Contrainte tangentielle .....	48
5.3 Déformation élastique en torsion .....	49
5.4 Condition de résistance à la torsion.....	49
Exercices .....	51
CHAPITRE V Flexion plane simple.....	
6.1 Définitions et hypothèses .....	55
6.1.1 Définitions .....	55
6.1.2 Hypothèses .....	55
6.2 Efforts tranchants et moments fléchissants .....	57
6.3 Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants .....	58
6.4 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant .....	60
6.5 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche) .....	61
6.6 Calcul des contraintes et dimensionnement .....	64
6.6.1 Contraintes .....	64
6.6.2 Dimensionnement .....	65
Exercices .....	67
RÉFÉRENCES.....	
	75

## AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage constitue un cours de Résistance Des Matériaux destiné principalement aux étudiants de 2<sup>ème</sup> année de Licence en Génie Mécanique et en Electromécanique mais aussi à toute personne intéressée par la matière. Il fait, en effet, l'objet d'un support qui permet l'assimilation des fondements de base de la matière et qui offre la possibilité de se perfectionner par la suite à partir des ouvrages de résistance des matériaux traitant des problèmes plus avancés.

La résistance des matériaux est une discipline étroitement associée à la statique. Cette dernière traite de l'équilibre des corps solides supposés indéformables tandis que la résistance des matériaux prend en compte les déformations des solides, supposés homogènes, isotropes et élastiques, sous l'effet des forces externes. L'étude s'intéresse principalement, par le biais de certaines hypothèses simplificatrices, à évaluer les efforts internes, les contraintes, les déplacements et les déformations générés par les charges externes. Le but étant de dimensionner les structures afin qu'elles remplissent leurs fonctions en toute sécurité.

Le manuscrit s'organise en six chapitres. Partant d'une introduction et des généralités permettant de cerner la matière, on passe à l'étude des sollicitations de traction, de compression et de cisaillement. Ensuite les caractéristiques géométriques des sections droites sont assimilées afin de les investir lors de l'étude des sollicitations de torsion et de flexion plane simple. Le cours permet ainsi de maîtriser les méthodes de calcul à la résistance mécanique des matériaux soumis à tout type de sollicitation.

La démarche adoptée est la même pour l'étude des sollicitations auxquelles les solides sont soumis. La sollicitation est d'abord définie. Ensuite, les contraintes et les déformations sont analysées. Enfin les critères de résistance sont explicités dans un souci de dimensionner les éléments de structures. Le tout est couronné par des exercices corrigés servant d'exemples d'illustration. D'autres exercices sont proposés sans correction.

## **CHAPITRE I**

### **INTRODUCTION ET GENERALITES**

## **1.1 Buts et hypothèses de la résistance des matériaux**

### **1.1.1 But de la résistance des matériaux**

La résistance des matériaux fait appel aux notions d'équilibre de la mécanique statique, aux notions de déplacements étudiées en cinématique et aux propriétés des matériaux, auxquelles on a recours pour évaluer les dimensions de pièces structurales ou d'éléments de machines. L'objet de cet enseignement est l'étude statique des milieux continus déformables.

La résistance des matériaux est une partie de la mécanique qui a pour objectif le développement de modèles permettant de dimensionner les structures. Ces modèles sont élaborés dans le cadre d'hypothèses simplificatrices. Ils constituent le premier niveau des méthodes de calcul des structures.

L'étude de la résistance des matériaux a pour but d'assurer qu'on utilise dans une pièce donnée, une quantité minimale de matériau, tout en satisfaisant aux exigences suivantes :

Résistance : la pièce doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées ;

Rigidité : la pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée ;

Stabilité : la pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement, déversement) ;

Endurance : la pièce, si elle est soumise à un chargement cyclique (répété), doit pouvoir, sans rupture, supporter un certain nombre de cycles (fatigue).

### **1.1.2 Hypothèses de la résistance des matériaux**

#### **1.1.1.1 Hypothèses sur le matériau**

Le matériau constitutif du solide étudié est supposé être :

- homogène : tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique à l'échelle considérée ;
- isotrope : en tout point, les propriétés mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions ;
- continu : les propriétés mécaniques varient de manière continue d'un point à l'autre ;
- utilisé dans le domaine élastique linéaire : les relations entre contraintes et déformations sont réversibles et linéaires (la loi de comportement est de type loi de Hooke)

### 1.1.1.2 Hypothèse de petites déformations

L'hypothèse des petites déformations permet de linéariser la relation entre contraintes et déformations. Ces dernières sont alors supposées réversibles et linéaires.

## 1.2 Classification des solides

La résistance des matériaux s'intéresse en général à des corps géométriquement simples qui constituent les éléments de base de la construction mécanique et du génie civil.

### 1.2.1 Les poutres

Une poutre est un solide engendré par une surface plane  $A$  qui peut être variable et dont le centre de gravité  $G$  décrit un segment  $[CD]$ , le plan de  $A$  restant perpendiculaire à cette courbe. Il faut également que la longueur  $CD$  soit grande devant les dimensions des sections transverses.

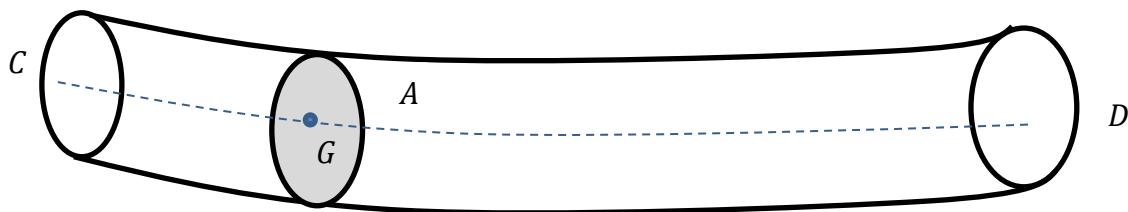


Figure 1.1. Élément poutre

### 1.2.2 Les plaques

Ce sont des structures pour lesquelles une dimension, l'épaisseur, est beaucoup plus petite que les deux autres. Ce sont donc des structures planes qui peuvent être identifiées avec leur plan moyen.

### 1.2.3 Les coques

Ce sont des structures qui, comme les plaques, ont une dimension, l'épaisseur, plus petite que les deux autres mais qui n'est pas plane.

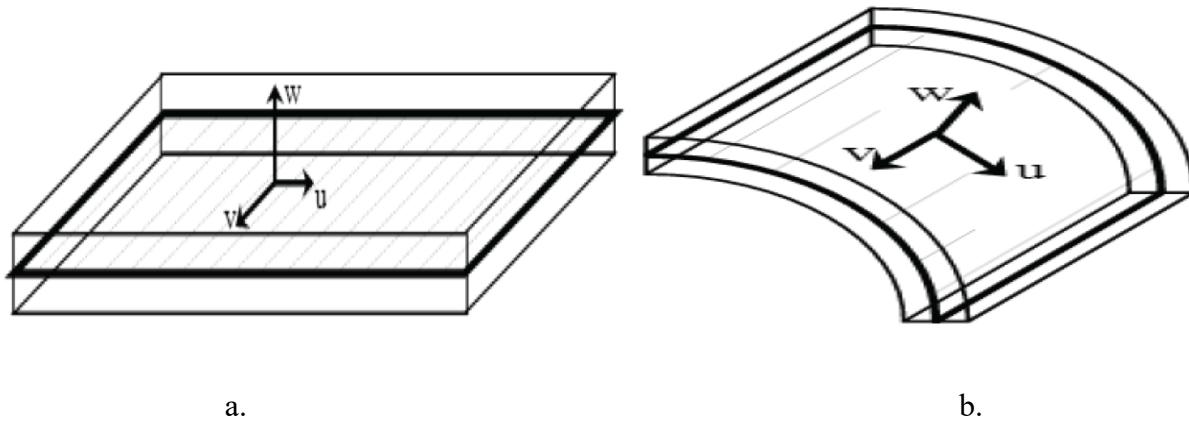


Figure 1.2. a. Plaque ; b. Coque

### 1.3 Différents types de chargements

En résistance des matériaux, on distingue généralement deux types de charges :

- les charges concentrées (ou ponctuelles) qui s'appliquent en un point de l'élément étudié.
- les charges réparties qui sont distribuées continûment le long d'un segment de l'élément étudié.

Les efforts extérieurs se décomposent ainsi en forces concentrées, forces réparties et moments concentrés, moments répartis. Les efforts répartis peuvent être écrits comme des densités linéiques d'efforts.

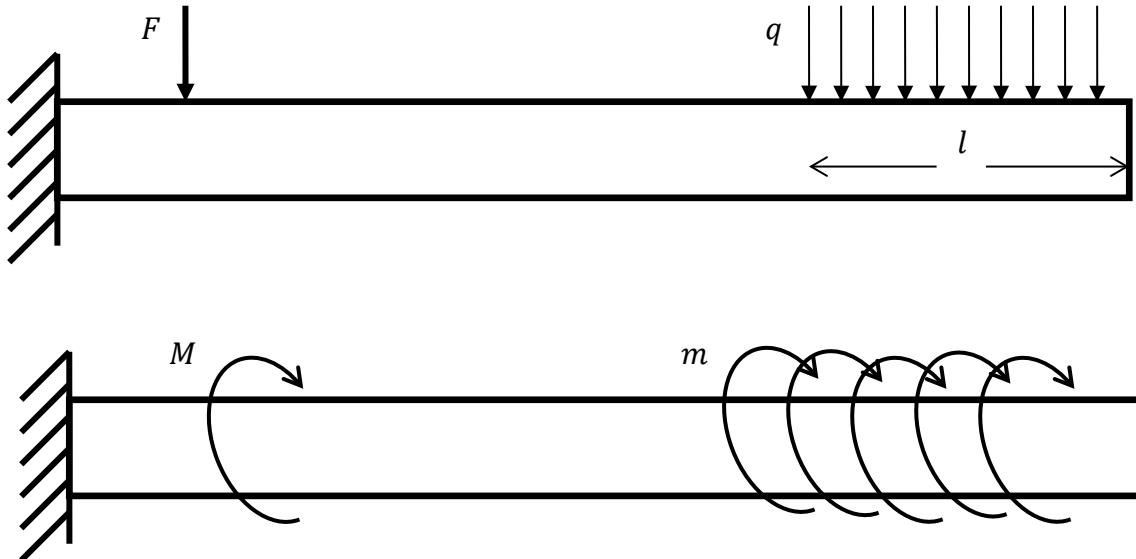


Figure 1.3. Efforts externes

La charge  $q$  est répartie le long du segment de longueur  $l$ . C'est donc une charge linéaire qui se mesure en unité de force par unité de longueur. Sa résultante  $Q$  est égale à l'aire de son diagramme et s'applique à son centre de gravité.

$$Q = ql$$

## 1.4 Liaisons

Pour un problème spatial, les liaisons réelles de la structure avec l'extérieur sont modélisées par les liaisons normalisées induites en mécanique du solide. Bien souvent, les configurations étudiées conduisent à un problème plan.

I.4.1. Appui simple : Il a une seule composante de réaction  $R_y$  dirigée dans la direction de l'axe  $y$ .

I.4.2. Articulation : Il admet deux composantes de réactions qui sont la réaction verticale  $R_y$  et la réaction horizontale  $R_x$ .

I.4.3. Encastrement : Trois composantes de réactions : la réaction verticale  $R_y$  ; horizontale  $R_x$  et le moment d'appui ou moment d'encastrement  $M$ .

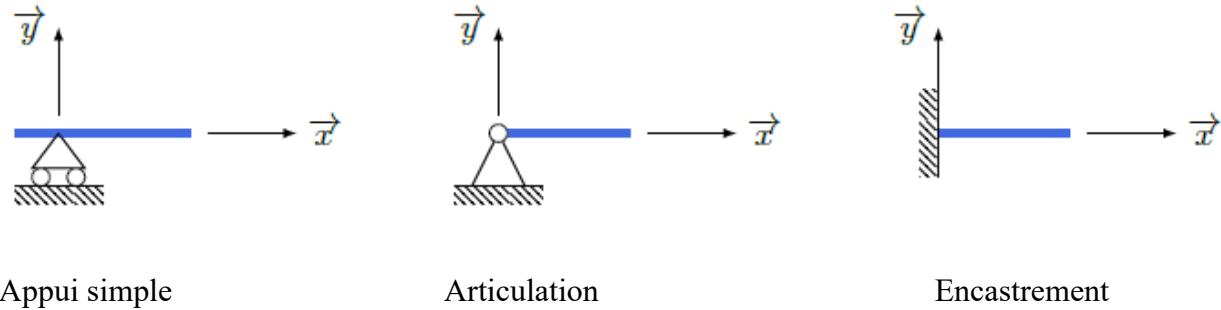


Figure 1.4. Liaisons

## 1.5 Principe général d'équilibre

En considérant un solide soumis à un système de forces extérieures modélisé par le torseur  $\{\vec{R}_{ext}\}$ .

Ce solide est en équilibre si et seulement si :

$$\{\vec{R}_{ext}\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ext} = 0 \\ \vec{M}_{ext} = 0 \end{cases}$$

Où  $\vec{F}_{ext}$  et  $\vec{M}_{ext}$  représentent respectivement les vecteurs de forces et de moments extérieurs.

Les équations vectorielles ci-dessus permettent d'écrire donnent 6 équations scalaires en l'espace.

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma M/x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad \Sigma M/y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad \Sigma M/z = 0$$

Dans le cas particulier de forces situées dans un même plan, les équations d'équilibre se réduisent en trois :

- la somme des projections des forces sur un axe horizontal  $Ox$  du plan est nulle.
- la somme des projections des forces sur axe vertical  $Oy$  du plan est nulle.
- la somme des moments pris par rapport à un point quelconque du plan est nulle.

## 1.6 Principes de la coupe

La résistance d'un solide étant liée aux efforts de cohésion de la matière, on réalise des coupures afin de déterminer le torseur de ces efforts. Ainsi en réalisant une coupure fictive dans un solide soumis à des efforts externes, l'action globale de B sur C est remplacée par le torseur des efforts internes.

$$\{\vec{R}_{int}\} = \begin{vmatrix} \vec{F}_{int} \\ \vec{M}_{int} \end{vmatrix}$$

La partie C est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

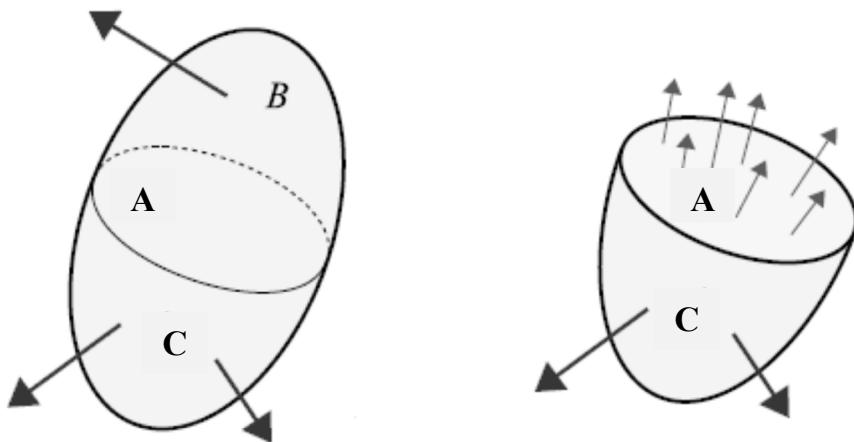


Figure 1.5. Principe de coupe

## 1.7 Définition des efforts et conventions de signes

### 1.7.1 Définition des efforts

Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs qui prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_t \\ T_z & M_t \end{Bmatrix}$$

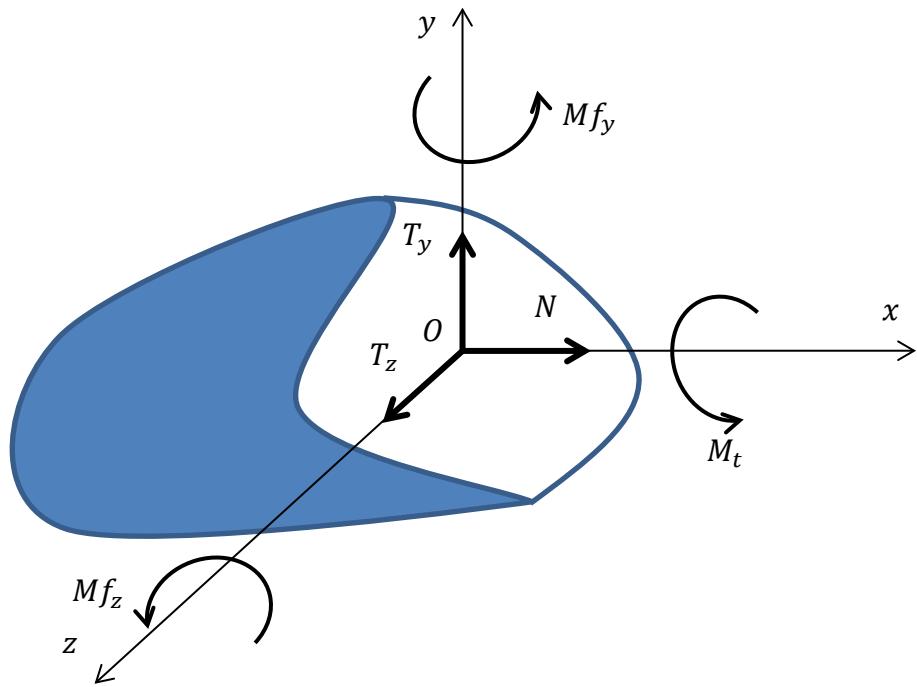


Figure 1.6. Efforts internes

Ces efforts intérieurs sont définis comme suit :

$N$  est l'effort normal (dans la direction  $\vec{x}$ )

$T_y$  est l'effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$

$T_z$  est l'effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$

$\vec{T} = T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$  est l'effort tranchant

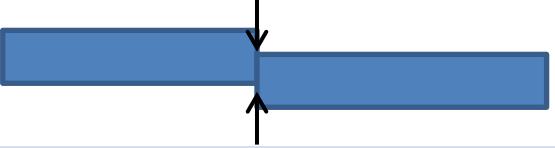
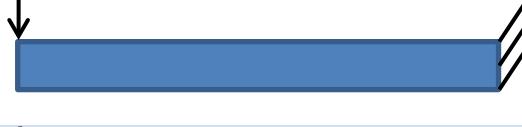
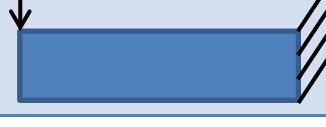
$M_t$  est le moment de torsion (autour de l'axe  $\vec{x}$ )

$M_{f_y}$  est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe  $\vec{y}$ )

$M_{f_z}$  est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe  $\vec{z}$ )

$\overrightarrow{M_f} = M_{f_y} \vec{y} + M_{f_z} \vec{z}$  est le moment de flexion

Tableau 1.1. Schématisation de différents types de sollicitations

Torseur	Sollicitation	Schématisation
$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Traction	
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Cisaillement	
$\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Torsion	
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}$	Flexion pure	
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}$	Flexion simple	

### 1.7.2 Convention des signes

Considérons une poutre en équilibre statique. La convention des signes pour l'effort normal  $N$ , l'effort tranchant  $T$  et le moment de flexion  $M$  est illustrée sur la figure ci-dessous.

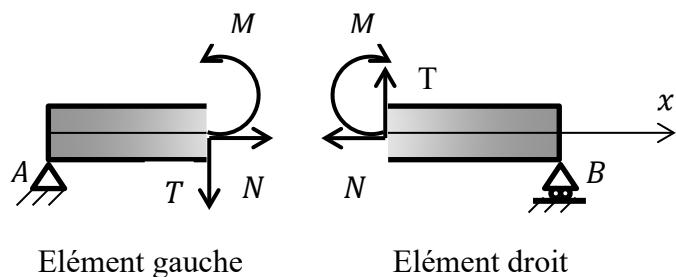
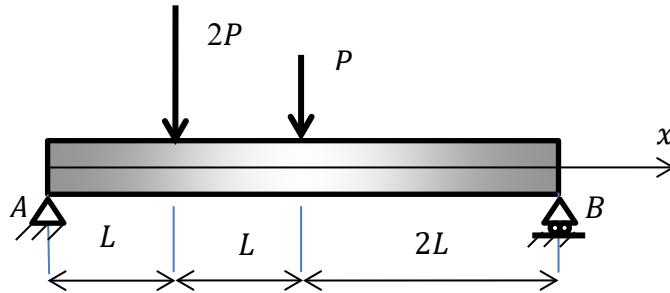


Figure 1.1. Convention de signes

## Exercices

**Exercice 1.** Une poutre  $AB$  de longueur  $4L$  est chargée comme l'indique la figure ci-dessous.

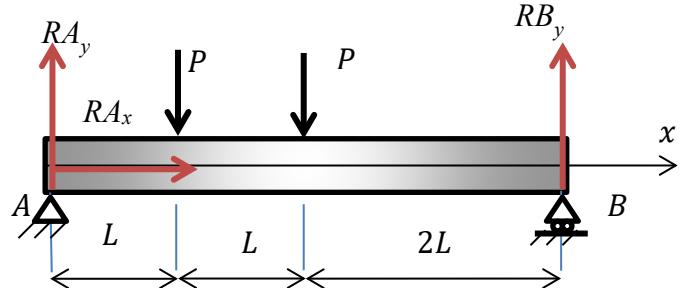
Calculer les réactions aux appuis  $A$  et  $B$ .



### Solution de l'exercice 01

Les réactions aux appuis se déterminent à partir de l'équilibre des efforts externes.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow RA_x = 0$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA_y + RB_y - P - P = 0$$

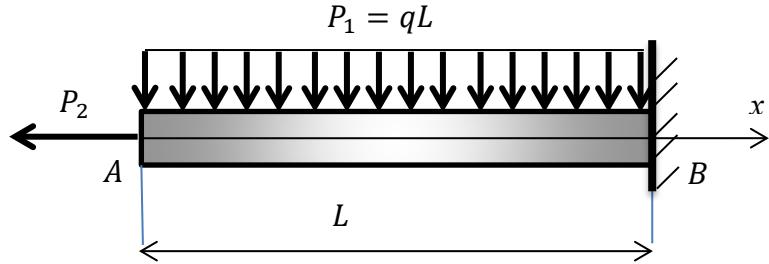
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4RB_y L - 2PL - PL = 0 \Rightarrow RB_y = \frac{3}{4}P$$

$$RA_y = 2P - RB_y = \frac{5}{4}P$$

**Exercice 02.** Une poutre encastrée en  $B$  est chargée comme l'indique la figure ci-dessous.

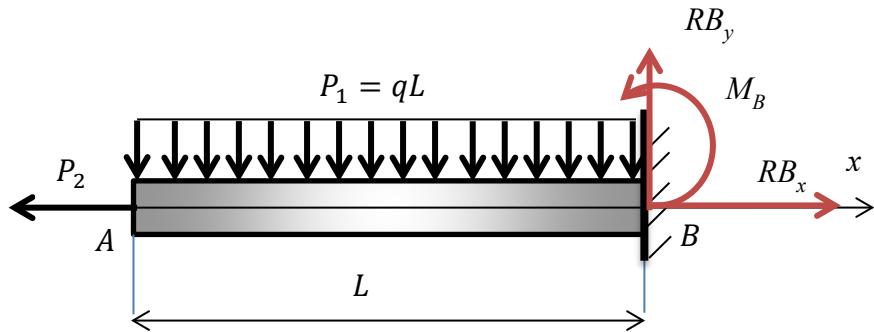
1. Calculer les réactions à l'enca斯特rement.

2. Sous l'effet des efforts externes, à quels types de sollicitation est soumise cette poutre ?



### Solution de l'exercice 02

1. L'encastrement  $B$  a trois composantes de réaction qui se déterminent à partir de l'équilibre des efforts externes.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow RB_x = P_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RB_y = P_1 = qL$$

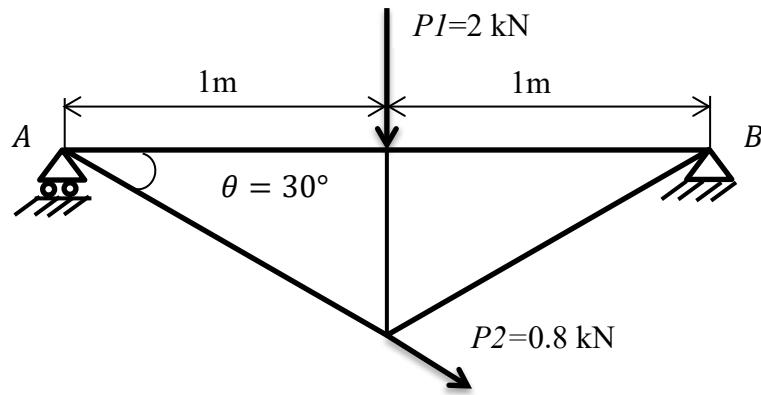
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_B = \frac{P_1 L}{2} - RB_y L = -\frac{1}{2} q L^2$$

2. Sou l'effet des efforts externes, la poutre est soumise à la traction, à la flexion et au cisaillement.

**Exercice 03.** La poutre triangulaire  $AB$  repose sur un appui simple en  $A$  et sur un appui double en  $B$ . Les charges sont indiquées sur la figure ci-contre. Le poids propre de la poutre est négligé.

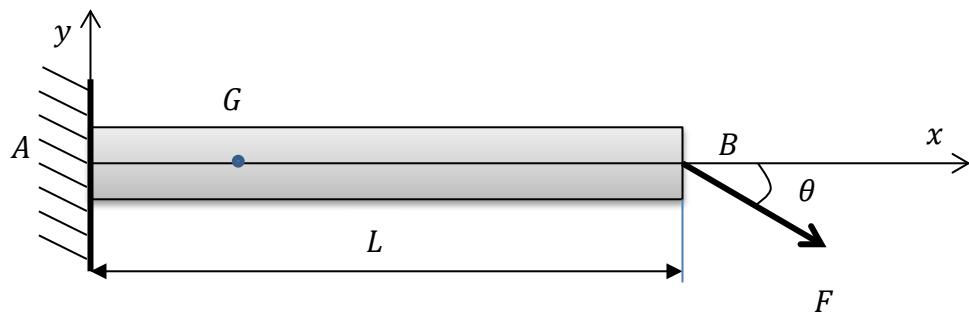
1. Déterminer les réactions des appuis sur la poutre.

2. A quelle distance du point A agit la force pour que la réaction au point A soit le double de la réaction au point B ?



**Exercice 04.** Soit la poutre encastrée en A et supportant en B un effort incliné  $F$ .

1. Calculer la réaction de l'encastrement.
2. En faisant une coupe au niveau du point G, représenter les efforts de cohésion.



## **CHAPITRE II**

### **TRACTION ET COMPRESSION**

## 2.1 Définitions

La section d'une poutre travaille en traction simple quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à une composante  $N$ , appelée effort normal.

Si  $N$  est positif alors on parle de contrainte de traction (la poutre s'allonge).

Si  $N$  est négatif alors on parle de contrainte de compression (la poutre se raccourcit).

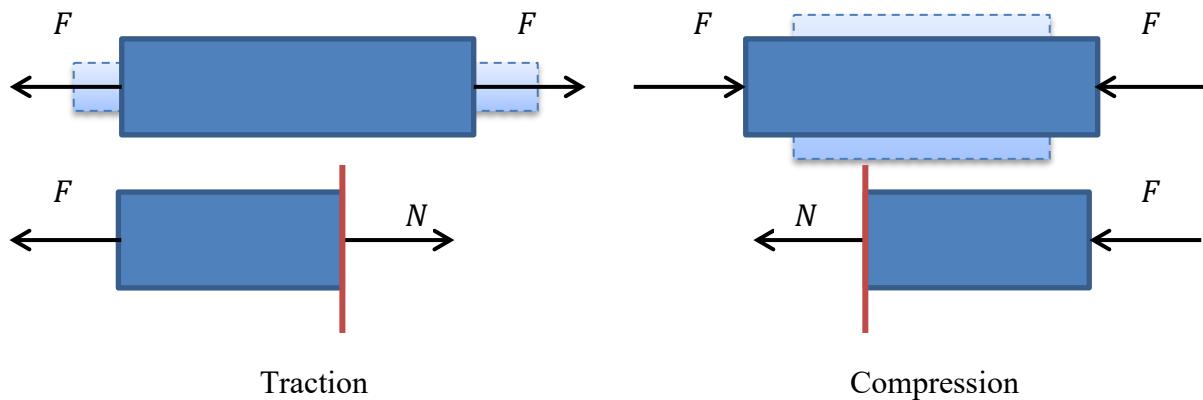


Figure 2.1. Schématisation de la traction/compression

**Exemples :** Le câble qui soulève la charge d'un ascenseur, la courroie qui transmet le mouvement d'une poulie à une autre, les boulons qui fixent le fond d'un cylindre contenant de la vapeur sous pression sont des corps soumis à des efforts de traction. Un pilier en béton armé, les supports des machines sont des corps soumis à des efforts de compression.

## 2.2 Contrainte normale de traction et compression

En considérant une barre rectiligne, de section  $A$  encastrée à son extrémité droite et soumise à l'autre extrémité à l'action d'une force  $F$  suivant son axe.

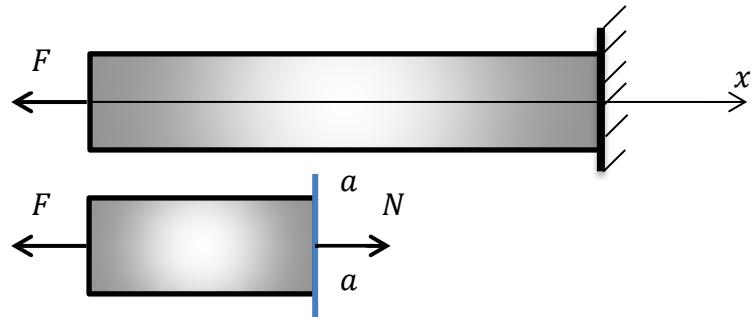


Figure 2.2. Effort normal

En réalisant une coupe suivant  $a - a$ , l'équilibre de la partie découpée s'exprime par :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = F$$

La contrainte normale  $\sigma$  représente l'intensité de l'effort normal  $N$  par unité de surface  $A$ . Elle se mesure en (N/m<sup>2</sup>) ou en Pascal (Pa). Elle s'exprime par :

$$\sigma = N/A$$

## 2.3 Déformation élastique en traction/compression

### II.3.1. Déformation longitudinale et déformation transversale

En soumettant une éprouvette soumise à une contrainte de traction ou de compression, cette dernière induit des déformations axiales et des déformations transversales. Les déformations élastiques sont des déformations réversibles : lorsque la contrainte s'annule, le matériau reprend sa forme initiale.

En considérant une barre de longueur initiale  $L_0$  soumise à un effort normal de traction  $F$ , la barre subit une variation de longueur  $\Delta L$ . La déformation longitudinale est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

$\nu$  étant un coefficient de contraction, dit de Poisson, la déformation transversale est alors

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$$

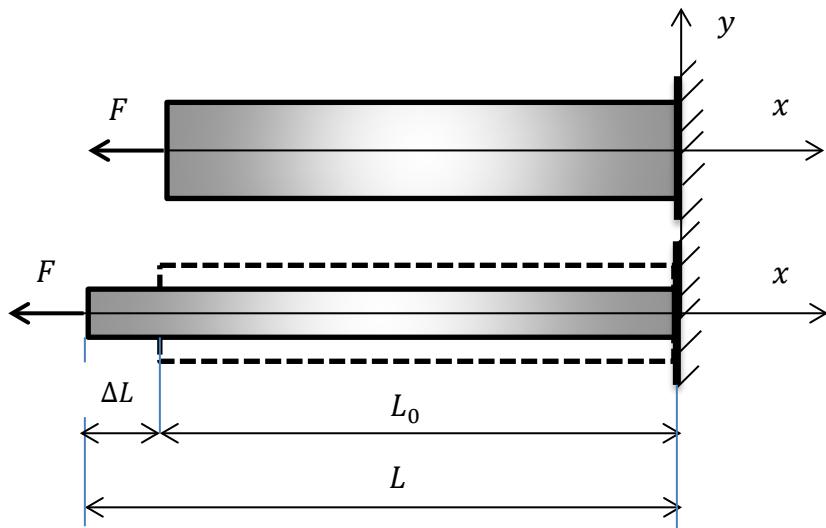


Figure 2.3. Déformation normale

### II.3.2. Loi de Hooke

L'essai de traction consiste à soumettre une éprouvette normalisée à un effort de traction progressivement croissant, jusqu'à la rupture de l'éprouvette. La machine mesure les efforts appliqués et les déformations de l'éprouvette. Les courbes ci-dessous représentent le résultat d'un essai de traction sur une éprouvette en acier.

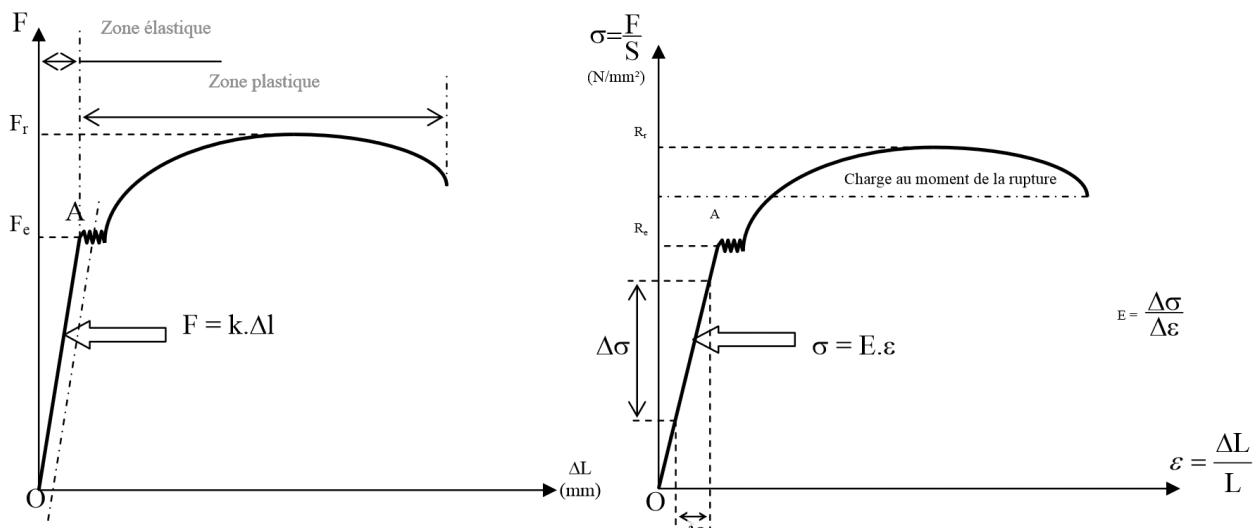


Figure 2.4. Essai de traction. A gauche : courbes forces-déplacements; à droite : courbes contraintes-déformations

Dans le domaine élastique, on constate que la déformation est proportionnelle à la contrainte. Cette relation de proportionnalité est illustrée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \varepsilon_x$$

$$\frac{N}{EA} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$E$  est le module d'élasticité longitudinal du matériau en (GPa). Il correspond à la pente de la droite du domaine élastique. On l'appelle couramment module de Young. Ci-dessous le module de Young de certains matériaux.

Tableau 2.1. Module de Young de quelques matériaux

Matériau	<b><math>E</math> (GPa)</b>
Diamant	1000
Aciers	200
Cuivre	120
Aluminium	70
Nylon	3

## 2.4 Condition de résistance à la traction/compression.

Pour qu'une pièce résiste aux efforts de traction /compression sans subir de déformation permanente, il faut que la contrainte générée ne dépasse pas la limite élastique  $\sigma_e$  du matériau.

$$\sigma_{max} \leq \sigma_e$$

Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses simplificatrices faites avec les modélisations, la contrainte normale  $\sigma$  doit rester inférieure à une valeur limite appelée

limite pratique  $\sigma_p$ . On considère que c'est la contrainte maximale admissible. La condition de sécurité s'écrit alors :

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_e}{s} = \sigma_p$$

$s$  : coefficient de sécurité

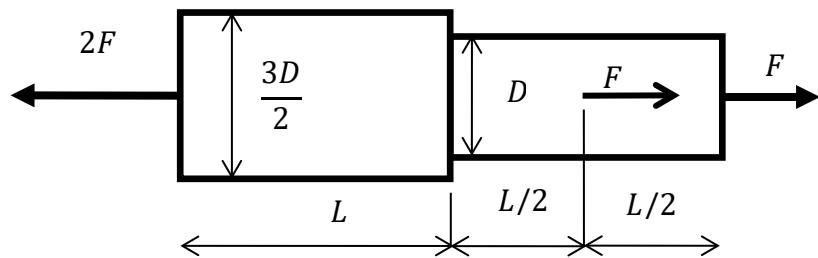
$\sigma_e$  : résistance élastique du matériau (en MPa)

$\sigma_p$  : résistance pratique du matériau (en MPa)

## Exercices

**Exercice 01.** Soit une barre de module de Young  $E$ , de section circulaire et dont la géométrie est illustrée sur la figure ci-dessous. La barre est en équilibre sous l'action des forces externes auxquelles elle est soumise.

Données :  $F = 20 \text{ kN}$  ;  $D = 12 \text{ mm}$  ;  $L = 200 \text{ mm}$  ;  $E = 200 \text{ GPa}$ .

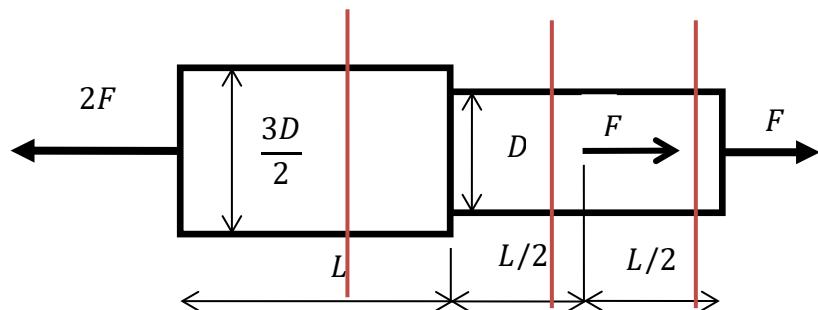


1) Évaluer les efforts normaux dans la barre et les contraintes et en tracer leur diagramme.

2) Calculer la longueur totale de la barre après déformation.

### Solution de l'exercice 01

1) Les efforts internes peuvent être évalués en effectuant des coupes. Selon la géométrie de la poutre et les efforts externes qui lui sont appliqués, trois coupes sont nécessaires.

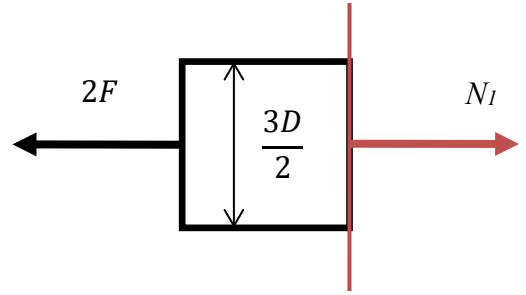


Coupe 1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 = 2F = 40 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2F}{\pi \left( \frac{3D}{4} \right)^2} = \frac{40000}{\pi(9)^2}$$

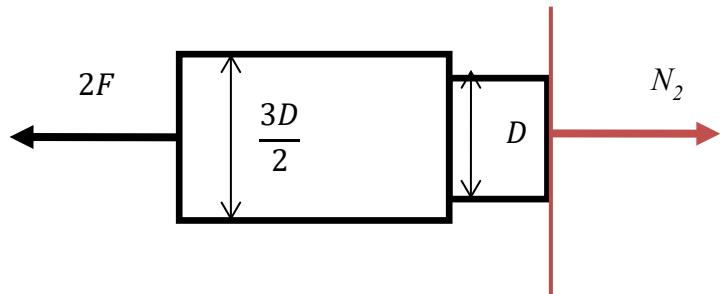
$$\sigma_1 = 157.26 \text{ MPa}$$



Coupe 2

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 = 2F = 40 \text{ kN}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{2F}{\pi \left( \frac{D}{2} \right)^2} = \frac{40000}{\pi(6)^2}$$



$$\sigma_2 = 353.85 \text{ MPa}$$

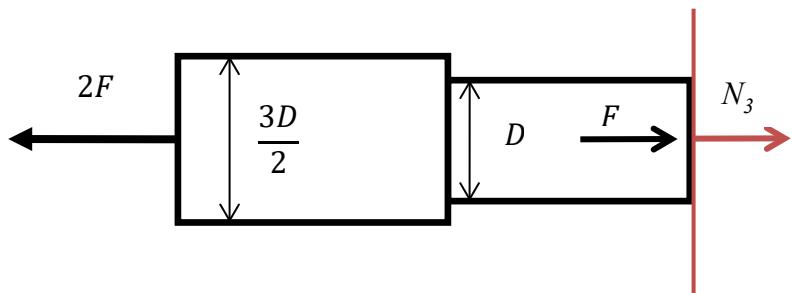
Coupe 3

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 = 2F - F$$

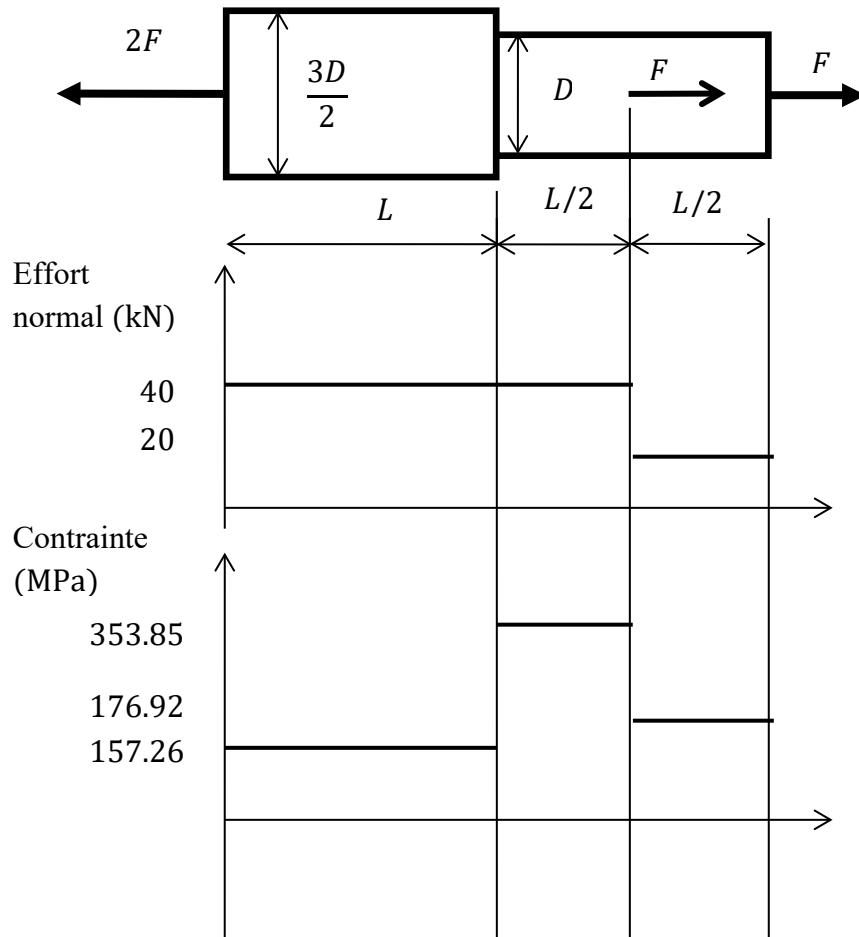
$$N_3 = F = 20 \text{ kN}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{F}{\pi(3D/4)^2} = \frac{20000}{\pi(6)^2}$$

$$\sigma_3 = 176.92 \text{ MPa}$$



Les diagrammes des efforts normaux et des contraintes normales générés dans la poutre sont tracés ci-dessous :



2) La longueur de la poutre après déformation peut être calculée en appliquant la loi de Hooke.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \Delta L = \frac{L\sigma}{E}$$

Ayant trois coupes, on peut calculer l'allongement de chaque tronçon.

$$\Delta L_1 = \frac{L_1 \sigma_1}{E} = 200 \times \frac{157.26}{2 \times 10^5} = 0.15 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{L_2 \sigma_2}{E} = 100 \times \frac{353.85}{2 \times 10^5} = 0.17 \text{ mm}$$

$$\Delta L_3 = \frac{L_3 \sigma_3}{E} = 100 \times \frac{176.92}{2 \times 10^5} = 0.08 \text{ mm}$$

$$L_{tot} = 2L + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = 400 + 0.15 + 0.17 + 0.08 = 400.4 \text{ mm}$$

**Exercice 02.** Un pivot d'arbre vertical supporte une charge  $F$  de 15 kN. Le pivot est en acier de résistance pratique  $\sigma_p = 80 \text{ N/mm}^2$ .

Déterminer le diamètre du pivot de manière la condition de résistance pratique.

### Solution de l'exercice 02

Le critère de résistance pratique s'écrit comme suit :

$$\sigma \leq \sigma_p$$

En désignant par  $d$  le diamètre du pivot, on peut écrire :

$$\sigma = \frac{F}{\pi d^2/4} < \sigma_{adm}$$

Ainsi, le diamètre du pivot s'exprime par :

$$d > \sqrt{\frac{4F}{\pi \sigma_p}} = \sqrt{\frac{4 \times 15000}{\pi \times 80}} = 15.45 \text{ mm}$$

**Exercice 03.** Une courroie en cuir de section rectangulaire supporte en service un effort de traction maximal  $F$  de 4800 N. Elle est formée de deux épaisseurs de cuir collées ensemble. Chaque épaisseur est de 8 mm. Déterminer la largeur de la courroie pour que la contrainte de traction soit inférieure à la contrainte admissible  $\sigma_{adm}$  qui vaut 200 N/cm<sup>2</sup>.

**Exercice 04.** Une poutre de longueur  $L = 100 \text{ mm}$  et de section rectangulaire de  $(15 \times 10) \text{ mm}^2$  soumise à une force axiale de traction de 2 kN. Les paramètres du matériau constitutif sont :  $E = 60 \text{ GPa}$  ;  $\nu = 0.3$

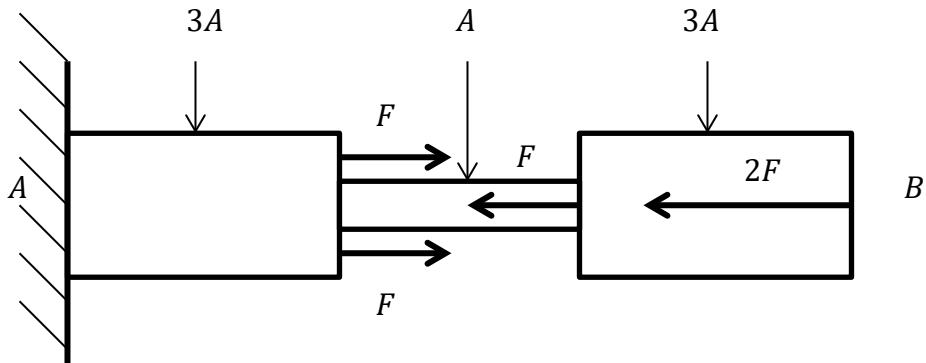
1. Calculer la déformation longitudinale et les déformations transversales.

2. Calculer le volume de la poutre après la déformation.

3. Le volume de la poutre a-t-il augmenté ? Commenter le résultat.

**Exercice 05.** Soit une barre en acier dont la géométrie est illustrée sur la figure ci-dessous.

Données :  $F = 20 \text{ kN}$ ;  $A = 2 \text{ cm}^2$



1. Déterminer la réaction à l'encastrement  $B$ .

2. Évaluer les efforts normaux dans la poutre et en tracer le diagramme.

3. Déterminer les contraintes et en tracer le diagramme.

4. La contrainte admissible étant  $\sigma_p = 25 \text{ kN/cm}^2$ , vérifier la résistance de la barre.

**CHAPITRE III**

**CISAILLEMENT**

### 3.1 Définitions

Une poutre droite d'axe  $x$  est en cisaillement si son torseur des efforts intérieurs exprimé au point  $G$  se réduit à une composante  $T$ .  $T$  est appelé effort tranchant.

La poutre subit une sollicitation de cisaillement pur lorsqu'elle est soumise à deux forces de liaison égales et directement opposées dont le support est contenu dans un plan perpendiculaire à la ligne moyenne. Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux morceaux  $E1$  et  $E2$  glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite.

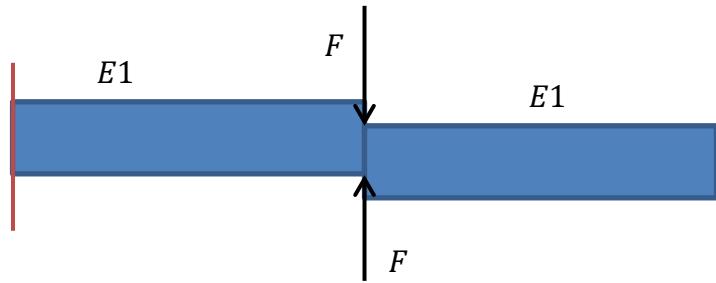


Figure 3.1. Cisaillement d'une poutre

**Exemples :** Une tôle en équilibre sur le tranchant de la lame fixe d'une cisaille, un rivet cisaillé suivant sa section droite, une poutre console, ...

### 3.2 Cisaillement simple – cisaillement pur

Il y a du cisaillement simple lorsque l'on applique deux forces  $T$  et  $-T$  perpendiculairement à l'axe d'une poutre, par exemple. Les points d'application des forces sont légèrement décalés d'une quantité notée  $d$ . Il y a du pincement si les forces sont à la même abscisse tandis qu'il y a de la flexion si elles sont très éloignées. Il en résulte ainsi un moment de couple d'intensité de  $(T \times d)$  qui crée de la flexion. Si  $d$  est trop faible, il y a un cisaillement pur (cisaillement théorique dont le torseur de cohésion ne contient qu'un effort tranchant) ; si  $d$  est important, il y a un cisaillement simple (qui contient un moment de flexion, donc une contrainte normale).

### 3.3 Contrainte de cisaillement

Dans le cas du cisaillement, chaque élément de surface  $\Delta A$  supporte un effort de cisaillement  $\Delta T$  contenu dans le plan  $A$ . Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. La contrainte tangentielle s'écrit :

$$\tau = \frac{T}{A}$$

$\tau$  est la contrainte tangentielle ou de cisaillement (en MPa)

$T$  est l'effort tranchant (en N)

$A$  est l'aire de la section de la pièce (en  $\text{mm}^2$ ).

### 3.4 Déformation élastique en cisaillement

Dans le cas du cisaillement, les déformations sont caractérisées par un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres.

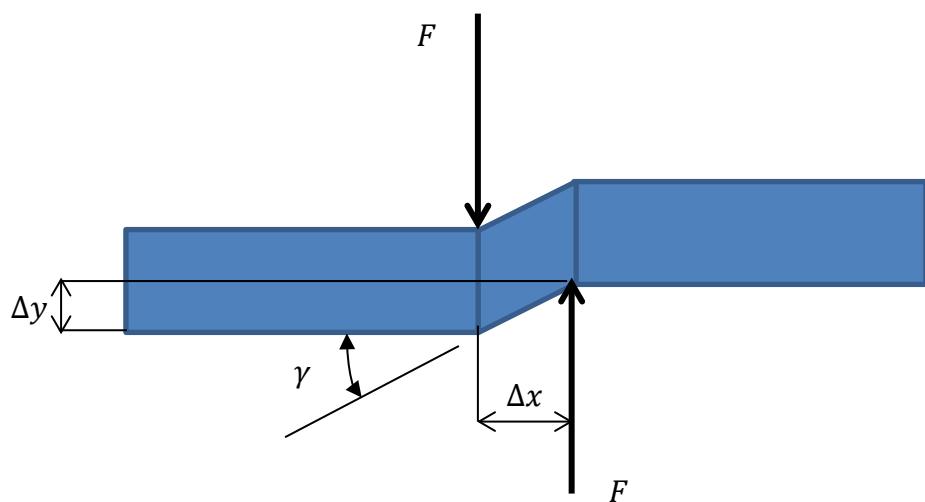


Figure 3.2. Déformation de cisaillement

Le glissement est mesuré par l'angle  $\gamma$  appelé angle de glissement.

$$\tan\gamma = \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle à l'angle de glissement  $\gamma$ . Autrement dit d'après la loi de Hooke :

$$\tau = G\gamma$$

$\tau$  : contrainte tangentielle (en MPa)

$G$  : module d'élasticité transversal (en MPa)

$\gamma$  : angle de glissement (en rd)

### 3.5 Condition de résistance au cisaillement.

Pour qu'une pièce sollicitée en cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement  $\tau_p$ .

$$\frac{T_y}{A} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

$A$  : section de la poutre

$s$  : coefficient de sécurité

$\tau_e$  : limite élastique au cisaillement (pour les aciers,  $\tau_e = 0,5\sigma_e$ ).

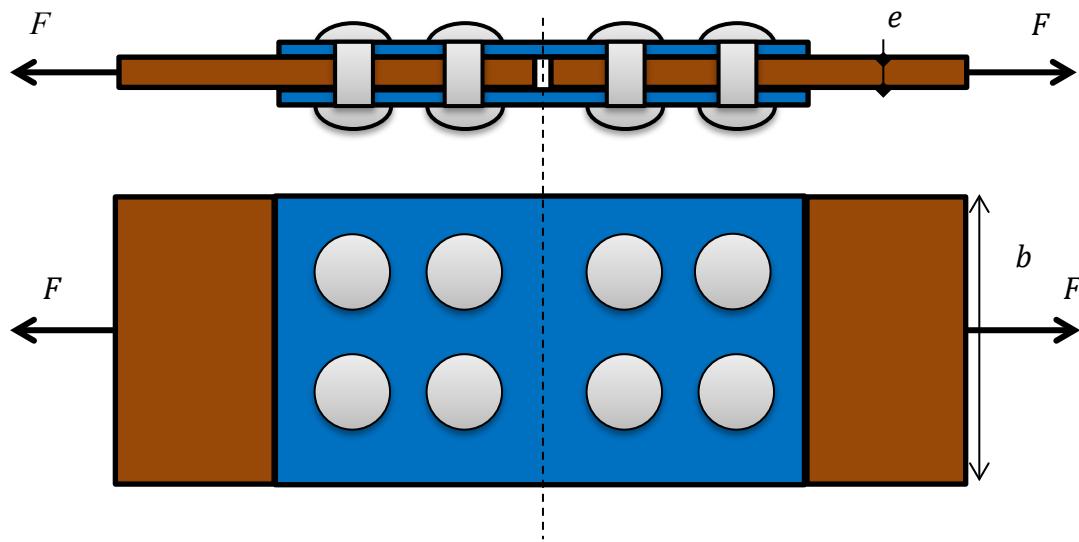
## Exercices

**Exercice 01.** Deux tôles de largeur  $b$  et d'épaisseur égale  $e$  sont réunies par un double couvre joints assemblé par rivets tel qu'il illustré par la figure. L'ensemble est soumis à un effort de traction  $F$ . Les limites élastiques en traction et au cisaillement du matériau constitutif sont respectivement  $\sigma_e$  et  $\tau_e$ .

Données :  $b = 150 \text{ mm}$  ;  $F = 130 \text{ kN}$  ;  $\sigma_e = 240 \text{ N/mm}^2$  ;  $\tau_e = 160 \text{ N/mm}^2$

Pour que les contraintes de traction et de cisaillement soient inférieures à la limite élastique, calculer :

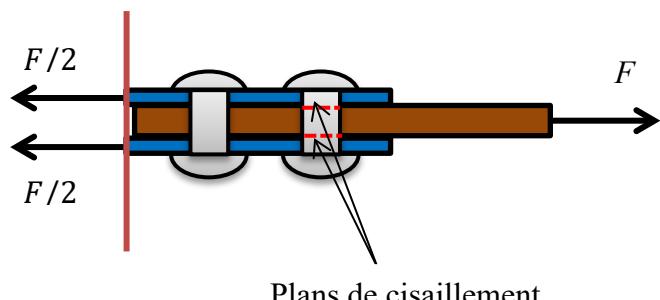
1. le diamètre de rivets.
2. l'épaisseur  $e$  des tôles.



### Solution de l'exercice 01

1. Détermination du diamètre des rivets.

Le critère de limite élastique au cisaillement s'écrit comme suit :



$$\tau = \frac{F}{A_c} \leq \tau_e$$

Où  $A_c$  est l'ensemble des sections cisaiillées des quatre rivets.

Chacun des quatre rivets ayant deux plans de cisaillement, la section totale cisaiillée est :

$$A_c = 4 \times 2 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

On en déduit le diamètre  $d$ .

$$d \geq \sqrt{\frac{F}{2\pi\tau_e}} = \sqrt{\frac{130000}{2\pi \times 160}} = 11.37 \text{ mm}$$

2. Détermination de l'épaisseur des tôles.

Le critère de limite élastique en traction s'exprime par :

$$\sigma = \frac{F}{A_t} \leq \sigma_e$$

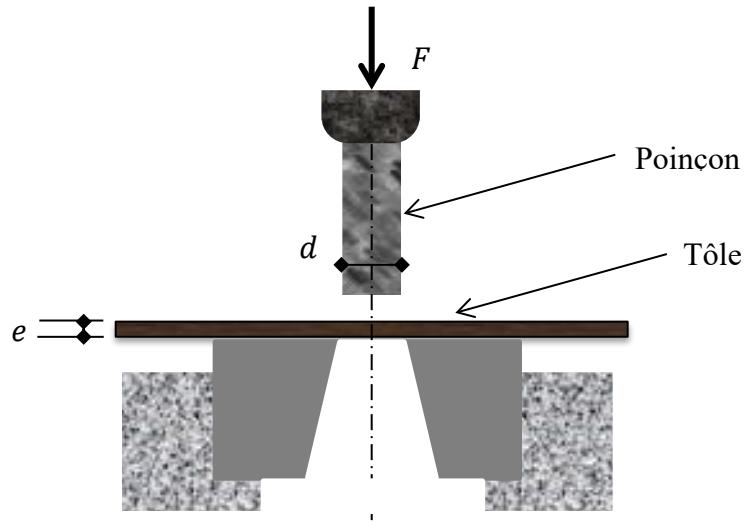
Où  $A_t$  est la section soumise à la traction. Le perçage des trous pour le passage des rivets diminue la section. Ainsi, elle est donnée par :

$$A_t = (150 - 2d)e$$

On en déduit l'épaisseur de la tôle.

$$e = \frac{F}{(150 - 2d)\sigma_e} = \frac{130000}{(150 - 2 \times 11.37) \times 240} = 4.25 \text{ mm}$$

**Exercice 02.** On veut poinçonner une tôle d'épaisseur  $e$ , de résistance à la rupture du cisaillement  $\tau_r$  à l'aide d'un poinçon de diamètre  $d$  et de résistance pratique à la compression  $\sigma_p$ . Le poinçon exerce alors un effort  $F$  sur la tôle.



Chercher la relation qui doit exister entre  $d$  et  $e$  pour que l'opération soit possible.

### Solution

Pour que le poinçonnage puisse s'effectuer, et que le poinçon reste en service,

- la contrainte sur la tôle doit être supérieure à la résistance à la rupture au cisaillement de la tôle.

$$\frac{F}{\text{Section cisaillée}} > \tau_r \Rightarrow \frac{F}{\pi de} > \tau_r$$

- la contrainte sur le poinçon soit inférieure à la résistance pratique à la compression.

$$\frac{F}{\text{Section comprimée}} < \sigma_p \Rightarrow \frac{F}{\pi d^2/4} < \sigma_p$$

En éliminant  $F$ , on obtient :

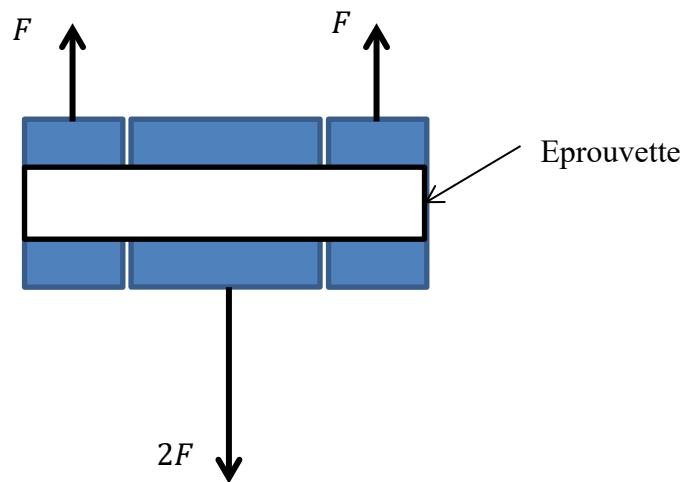
$$\pi de \tau_r = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_p$$

Ainsi la relation devant être entre  $d$  et  $e$  est la suivante :

$$d > 4e \frac{\tau_r}{\sigma_p}$$

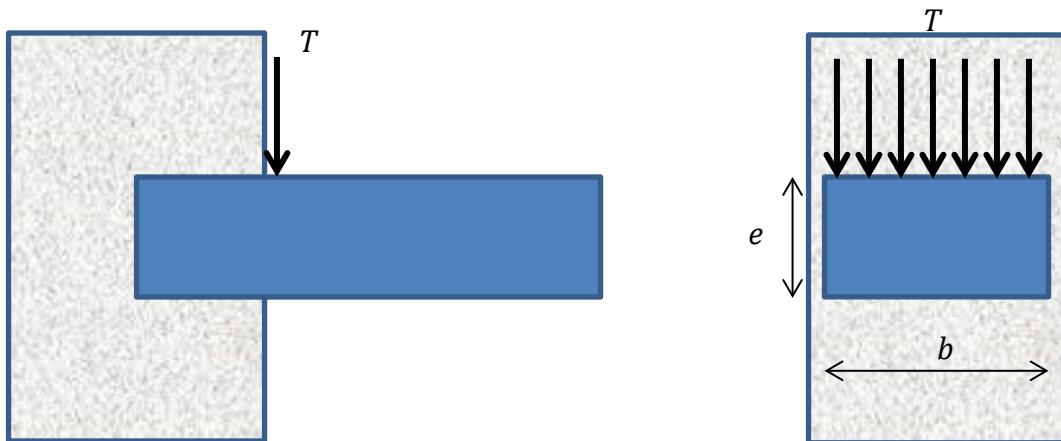
**Exercice 03.** Un essai de cisaillement est réalisé avec le montage de la figure ci-dessous. L'éprouvette en acier a la forme d'un cylindre de diamètre 5.64 mm. La limite élastique est atteinte pour une charge  $F_e = 585$  daN, et la charge maximale avant rupture est  $F_m = 1310$  daN.

Calculer la résistance limite élastique et la résistance à la rupture du matériau testé.



**Exercice 04.**

On considère un solide d'épaisseur  $e$  de 10 mm et de largeur  $b$  de 40 mm, encastrée dans un massif rigide fixe. Une force linéaire  $T = 20$  daN/mm est appliquée verticalement tel qu'il est illustré sur la figure.



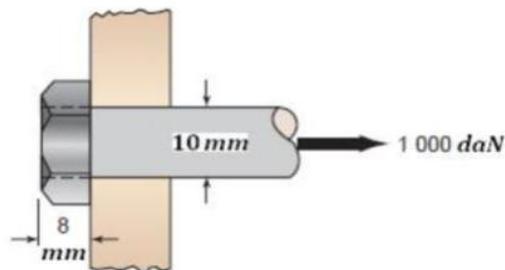
1. Calculer la contrainte de cisaillement  $\tau$  et la déformation de cisaillement  $\gamma$  si le module de cisaillement  $G = 8400 \text{ kN/cm}^2$ .

2. Si la contrainte admissible de cisaillement valait  $\tau_p = 15 \text{ MPa}$ ,

a. vérifier la résistance du solide.

b. quel serait l'épaisseur minimale pour assurer la résistance du solide ?

**Exercice 05.** Soit une vis, de 15 mm de diamètre, sollicitée par une charge axiale de 1000 daN, comme le montre la figure.



1. Calculer la contrainte de cisaillement dans la tête de la vis en supposant que le cisaillement agit sur une surface cylindrique de même diamètre que la vis, comme le montrent les lignes pointillées.

2) Quel serait le diamètre minimal de la vis si la contrainte de cisaillement admissible valait  $\tau_p = 40 \text{ MPa}$  ?

## **CHAPITRE IV**

# **CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES**

#### 4.1. Moments statiques d'une section droite

Le moment statique  $W_x$  de la surface plane  $A$  par rapport à l'axe  $x$  de son plan est défini par la relation :

$$W_x = \int_A y \, dA$$

Le moment statique  $W_y$  de la surface plane  $A$  par rapport à l'axe  $y$  de son plan est défini par la relation :

$$W_y = \int_A x \, dA$$

En intégrant, on obtient :

$$W_x = Y_G \, A \quad ; \quad W_y = X_G \, A$$

$X_G$  et  $Y_G$  représentent respectivement les distances entre le centre de gravité de la section et les axes  $x$  et  $y$ .

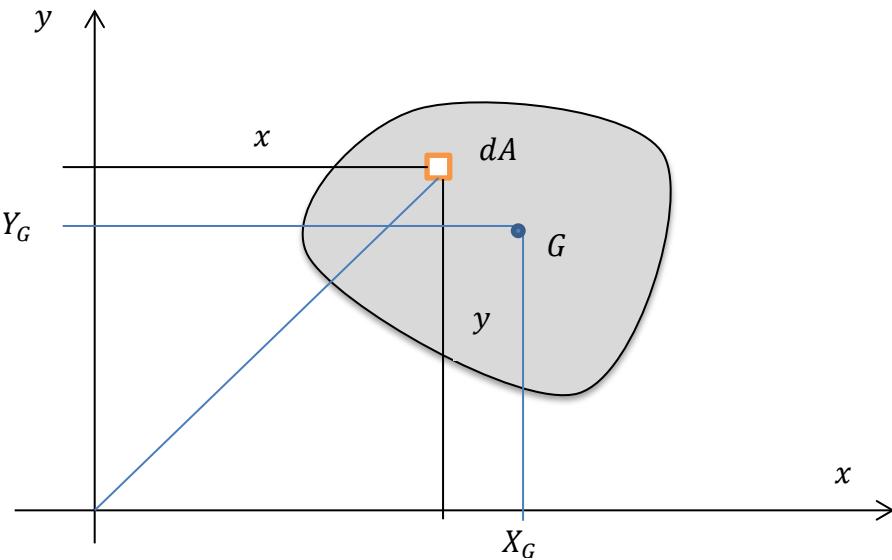


Figure 4.1. Coordonnées de centre de gravité

Le moment statique est en unité de longueur à la puissance 3 (mm<sup>3</sup>).

Le moment statique peut être positif, négatif ou nul.

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe de symétrie est nul parce que cet axe passe par le centre de gravité  $G$ .

#### 4.2. Moments d'inertie d'une section droite

Le moment d'inertie  $I_x$  de la surface plane  $A$  par rapport à l'axe  $x$  de son plan est défini par la relation :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Le moment d'inertie  $I_y$  de la surface plane  $A$  par rapport à l'axe  $y$  de son plan est défini par la relation :

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une surface plane  $A$  par rapport à un point  $O$  de son plan est défini par la relation :

$$I_o = \int_A \rho^2 dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une surface plane  $A$  par rapport à un point  $O$  de son plan est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes rectangulaires de son plan passant par ce point.

$$I_o = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

Les moments d'inertie et d'inertie polaire sont toujours positifs.

Le moment d'inertie est en unité de longueur à la puissance 4 (mm<sup>4</sup>).

Le moment d'inertie centrifuge d'une surface plane  $A$  par rapport aux axes ( $x, y$ ) de son plan est défini par la relation

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

Le moment d'inertie centrifuge peut être positif, négatif ou dans un cas particulier nul (quand il est calculé par rapport à un axe de symétrie).

Le moment d'inertie centrifuge est en unité de longueur à la puissance 4 (mm<sup>4</sup>).

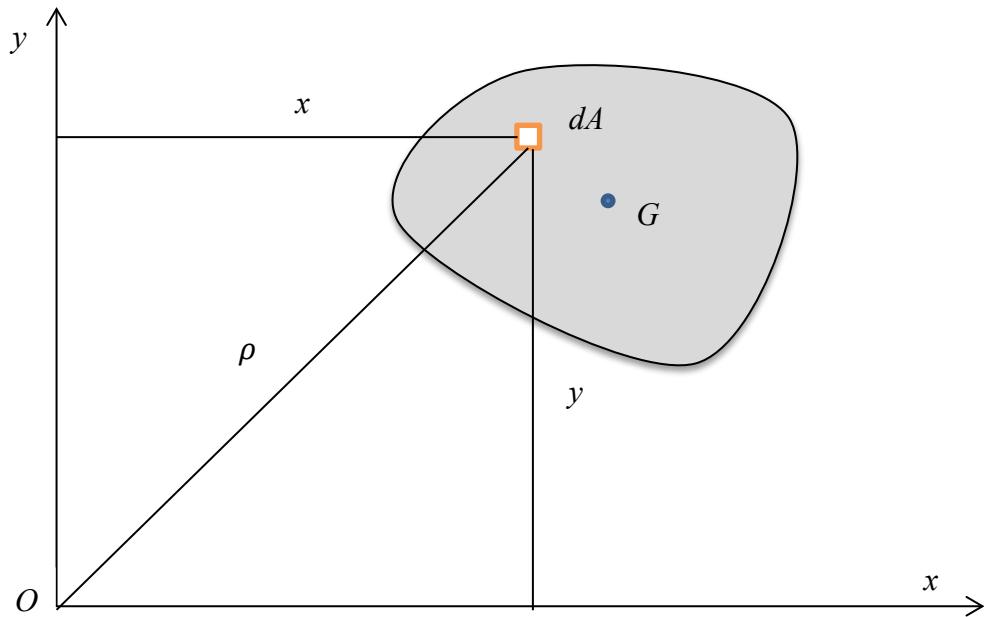
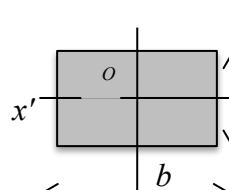
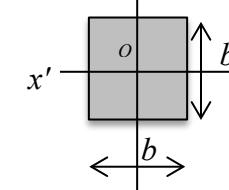
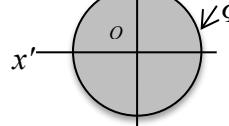
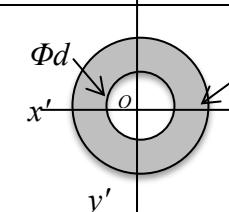


Figure 4.2. Moment d'inertie

Tableau 4.1. Moments d'inertie de quelques figures simples

Surfaces	Moment d'inertie par rapport		
	à l'axe $x'x$	à l'axe $y'y$	Au point $O$
	$I_{x'x} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y'y} = \frac{hb^3}{12}$	$I_0 = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$I_{x'x} = \frac{b^4}{12}$	$I_{y'y} = \frac{b^4}{12}$	$I_0 = \frac{b^4}{6}$
	$I_{x'x} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{y'y} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$
	$I_{x'x} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$I_{y'y} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$I_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

### 4.3. Formules de transformation des moments d'inertie

#### 4.3.1 Théorème de Huygens

Le moment d'inertie  $I_x$  de la surface  $A$  par rapport à l'axe  $x$  de son plan est égal au moment d'inertie  $I_{Gx}$  de  $A$  par rapport à l'axe  $Gx$  augmenté du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_y = I_{Gy} + A(d_x)^2$$

$$I_x = I_{Gx} + A(d_y)^2$$

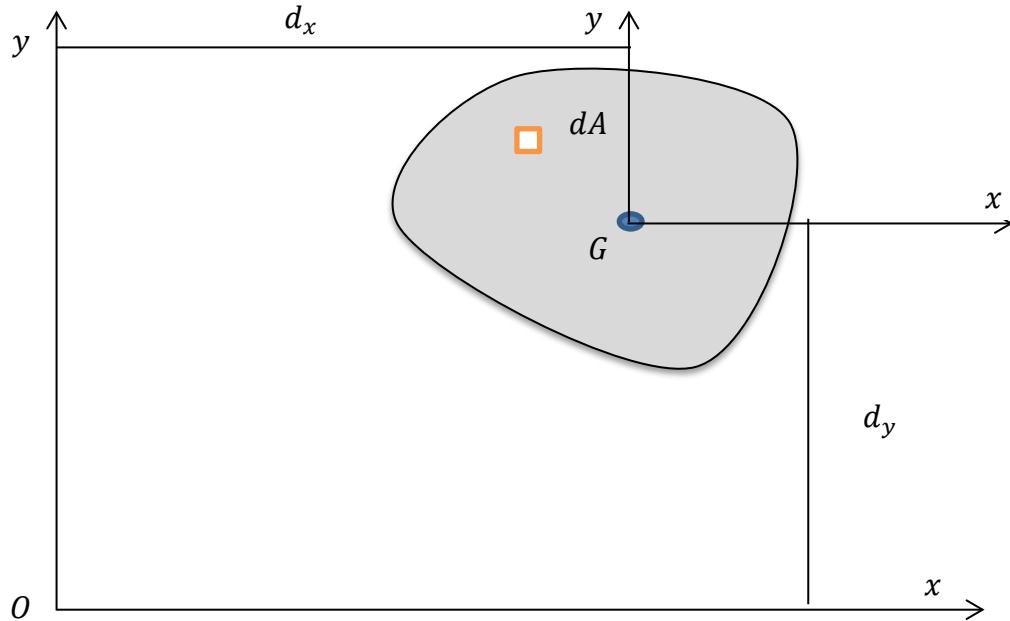


Figure 4.3. Théorème de Huygens

#### 4.3.2 Changement des directions des axes

Considérons une surface plane  $A$  et deux systèmes d'axes  $(Oxy)$  et  $(OXY)$  de son plan tel que l'angle compris entre  $x$  et  $X$  est  $\alpha$ . Supposons que les moments d'inertie  $I_x$  et  $I_y$  soient connus.

Nous nous proposons de déterminer  $I_X$  et  $I_Y$ . Par définition, on peut écrire :

$$I_X = \int_A Y^2 dA \quad ; \quad I_Y = \int_A X^2 dA$$

Ecrivons les relations de changement de base :

$$x = \cos \alpha X - \sin \alpha Y \quad ; \quad y = \sin \alpha X + \cos \alpha Y$$

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad ; \quad Y = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Ainsi le moment d'inertie  $I_X$  s'écrit :

$$I_X = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

En développant, on obtient :

$$I_X = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha$$

Par analogie, le moment d'inertie  $I_Y$  s'écrit :

$$I_Y = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha$$

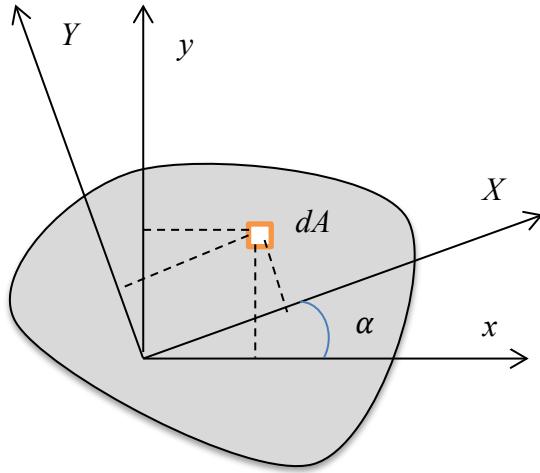
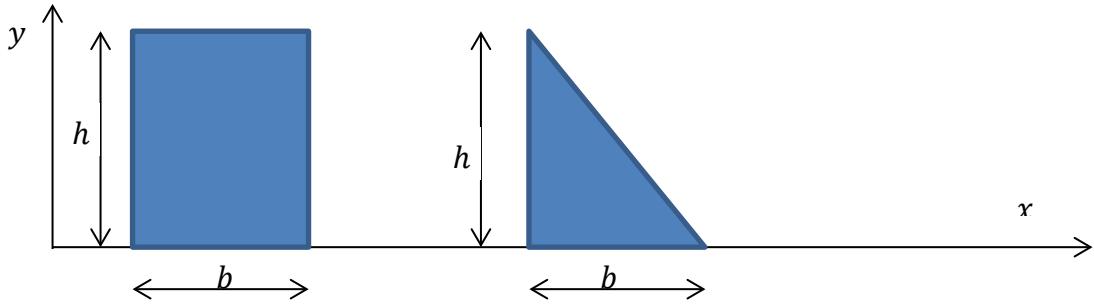


Figure 4.4. Changement des directions des axes

## Exercices

**Exercice 01.** Déterminer le moment statique et le moment d'inertie des géométries suivantes par rapport à l'axe  $x$ .

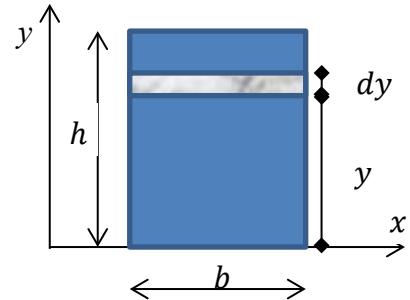


### Solution de l'exercice 01

Moments statiques  $W_x$  et d'inertie  $I_x$  du rectangle par rapport à l'axe  $x$

$$W_x = \int_A y \, dA = b \int_0^h y \, dy = \frac{bh^2}{2}$$

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = b \int_0^h y^2 \, dy = \frac{bh^3}{3}$$



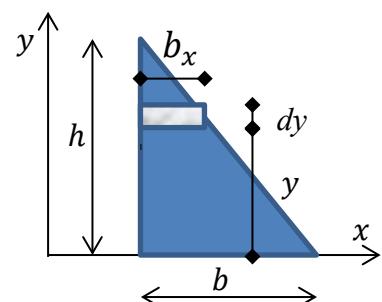
Moments statiques  $W_x$  et d'inertie  $I_x$  du triangle par rapport à l'axe  $x$

L'aire  $dA$  infiniment petite est égale à celle d'un rectangle.

La similitude des triangles permet d'écrire :

$$\frac{b_x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow b_x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

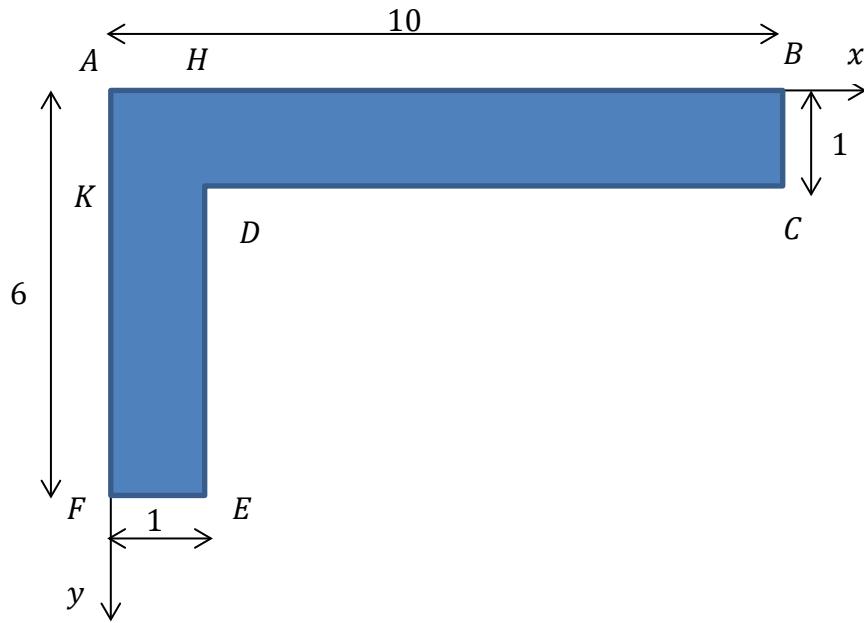
$$dA = b_x dy = b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy$$



$$W_x = \int_A y \, dA = \int_0^h y b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = b \int_0^h y - \frac{y^2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_0^h y^2 b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = b \int_0^h y^2 - \frac{y^3}{h} = \frac{bh^3}{12}$$

**Exercice 02.** Considérons la section donnée par la figure ci-dessous (cotes en cm).



1. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes  $Ax$  et  $Ay$ .
2. Calculer la position du centre de gravité  $G$ .
3. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes  $Gx$  et  $Gy$ .

### Solution de l'exercice 02

1. Détermination des moments d'inertie par rapport aux axes  $Ax$  et  $Ay$ .

Décomposons la figure en deux rectangles  $AHEF$  et  $HBCD$

$$I_x \text{ du rectangle } AHEF = \frac{1 \times 6^3}{3} = \frac{216}{3}$$

$$I_x \text{ du rectangle } HBCD = \frac{9 \times 1^3}{3} = \frac{9}{3}$$

$$I_x \text{ de la section totale} = \frac{216}{3} + \frac{9}{3} = 75 \text{ cm}^4$$

$$I_y \text{ du rectangle } ABCK = \frac{1 \times 10^3}{3} = \frac{1000}{3}$$

$$I_y \text{ du rectangle } KDEF = \frac{5 \times 1^3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$I_y \text{ de la section totale} = \frac{1000}{3} + \frac{5}{3} = 335 \text{ cm}^4$$

2. Position du centre de gravité

Elément	Surface	Abscisse du centre de gravité	Moment statique par rapport à $Ay$	Ordonnée du centre de gravité	Moment statique par rapport à $Ax$
$ABC K$	$10 \times 1 = 10$	5	$10 \times 5 = 50$	0.5	$10 \times 0.5 = 5$
$KDEF$	$5 \times 1 = 5$	0.5	$5 \times 0.5 = 2.5$	3.5	$5 \times 3.5 = 17.5$
Surface totale	$10 + 5 = 15$	$X_G = 3.5$	$15X_G = 52.5$	$Y_G = 1.5$	$15Y_G = 22.5$

3. Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes  $Gx$  et  $Gy$ .

Par application du théorème de Huygens

$$I_x = I_{Gx} + A(d_y)^2 \Rightarrow I_{Gx} = I_x - A(d_y)^2$$

$$I_{Gx} = 75 - (15 \times 1.5^2) = 41.25 \text{ cm}^4$$

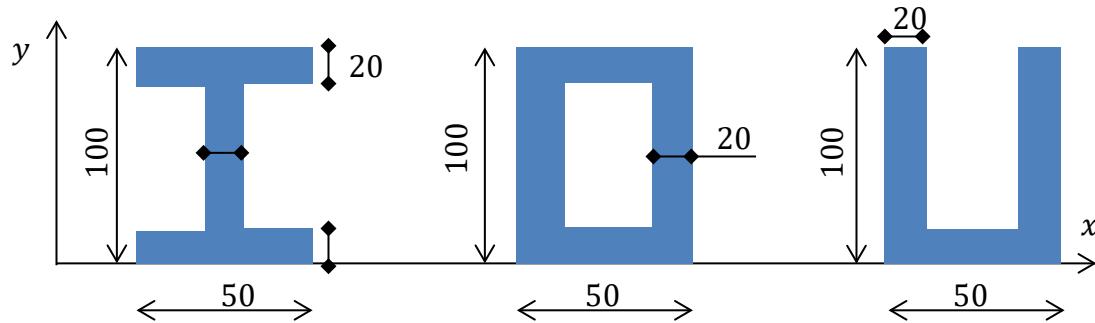
$$I_y = I_{Gy} + A(d_x)^2 \Rightarrow I_{Gy} = I_y - A(d_x)^2$$

$$I_{Gy} = 335 - (15 \times 3.5^2) = 151.25 \text{ cm}^4$$

**Exercice 03.** Soient les surfaces définies par les figures ci-dessous.

1. Déterminer leurs centres de gravité  $G$ .

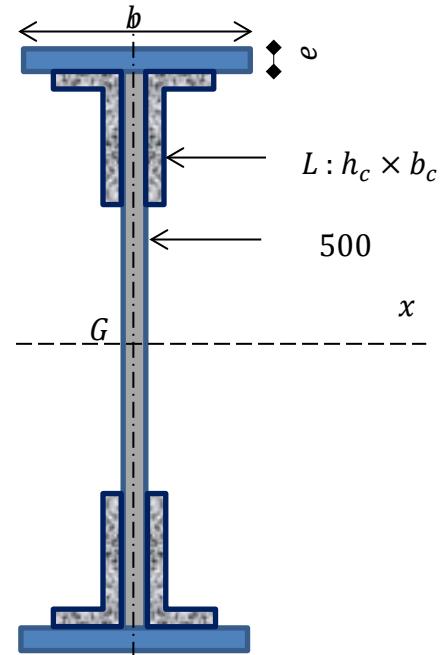
2. Calculer leurs moments d'inertie par rapport aux axes  $Gx$  et  $Gy$ .



**Exercice 04.** Une poutre est construite ainsi qu'il est illustré sur la figure ci-contre, par une âme, deux semelles identiques et quatre cornières identiques.

Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe de symétrie  $Gx$  doit être au moins égal à  $50000 \text{ cm}^4$ . La hauteur de l'âme devant être égale à  $500 \text{ mm}$ .

Déterminer les dimensions des différents éléments : l'âme, les semelles et les ailes des cornières devant avoir la même épaisseur.



**Exercice 05.** Soit une surface circulaire de diamètre  $d$ .

1. Écrire les expressions du moment statique et du moment d'inertie par rapport à ses axes de symétrie.
2. En déduire le moment d'inertie polaire par rapport à son centre de gravité.

## **CHAPITRE V**

### **TORSION**

## 5.1 Définitions

Une poutre droite d'axe  $x$  est en torsion si son torseur des efforts intérieurs exprimé au point  $G$  est réduit à une composante  $M_t$ .  $M_t$  est appelé moment de torsion.

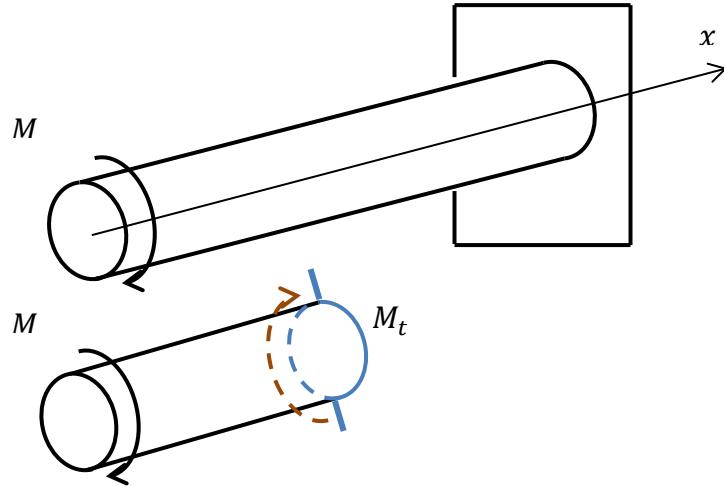


Figure 5.1. Schématisation de la torsion

**Exemples :** Les tarauds, certaines clefs employées pour le serrage des écrous, les arbres de transmission sont des corps sollicités à la torsion.

L'étude de la torsion présentée ici se limitera au cadre des poutres droites à sections circulaires. Ainsi, les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire. Cette restriction est liée au fait que pour toute section qui n'est pas circulaire, les résultats qui seront présentés sont erronés car :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,
- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

## 5.2 Contrainte tangentielle ou de glissement

### 5.2.1 Angle de torsion

Considérons un arbre de section circulaire soumis à un moment de torsion constant. Coupons un élément infiniment petit de longueur ( $dx$ ). Sa section avant est soumise à une rotation par rapport à sa section arrière d'angle  $d\varphi$ .  $\varphi$  est appelé angle de torsion.  $r$  étant le rayon de la section droite, l'angle de torsion est lié à l'angle de cisaillement  $\gamma$  par la relation suivante :

$$r d\varphi = \gamma dx$$

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

Le rapport  $\frac{d\varphi}{dx}$  représente l'angle de torsion par unité de longueur de l'arbre et se désigne par  $\theta$ .

Ainsi, on écrit :

$$\gamma = r \theta$$

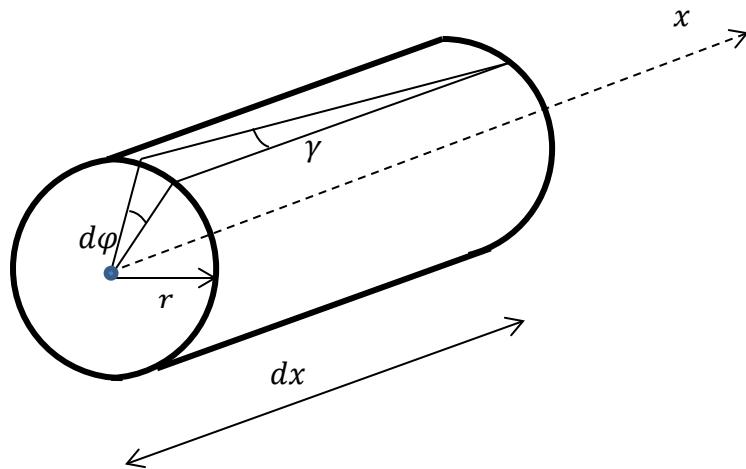


Figure 5.2. Angle de torsion

### 5.2.2 Contrainte tangentielle

D'après la loi de Hooke, en désignant par  $G$  le module de cisaillement, on peut déduire que la contrainte tangentielle  $\tau$  est égale à :

$$\tau = G\gamma = Gr\theta$$

sur une section, les contraintes tangentielles sont orthoradielles : la contrainte est nulle au centre et maximale pour  $r = R$ .

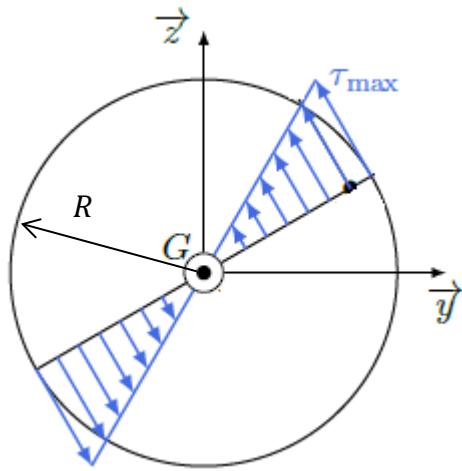


Figure 5.3. Contraintes tangentielles

D'après les conditions d'équilibre de la partie de l'arbre isolée, on conclut que les contraintes de cisaillement réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion  $M_t$ . Pour chaque élément d'aire  $dA$ , l'effort tranchant est

$$T = \tau dA.$$

Le moment de cet effort par rapport à l'axe de l'arbre est donc :

$$M_t = \int r\tau dA = G\theta r^2 dA$$

En intégrant, on obtient :

$$M_t = G\theta I_0$$

Où  $I_0$  est le moment d'inertie polaire de la section droite  $A$ .

Ainsi la contrainte tangentielle s'écrit en fonction du moment de torsion comme suit :

$$\tau = \frac{M_t r}{I_0}$$

### 5.3 Déformation élastique en torsion

A partir de la définition de  $\theta$  et de la loi de Hooke,

$$\tau = Gr \theta = \frac{M_t r}{I_0}$$

on peut écrire :

$$\frac{\tau}{r} = \frac{M_t}{I_0} = G\theta = G \frac{d\varphi}{dx}$$

Soit  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , on aura :

$$\Delta\varphi = \int_{x1}^{x2} \frac{M_t}{GI_0} dx$$

Pour un arbre de longueur  $l$ , on en déduit que la torsion totale est :

$$\varphi = \theta l \quad ; \quad \theta = \frac{M_t}{GI_0}$$

### 5.4 Condition de résistance à la torsion.

Un matériau en torsion reste dans son domaine élastique si la contrainte tangentielle reste inférieure à la limite élastique  $\tau_e$ .

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

Pour qu'une pièce sollicitée en torsion résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement  $\tau_p$ .  $s$  étant un coefficient de sécurité, on écrit :

$$\tau_{max} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

## Exercices

**Exercice 01.** Les sections extrêmes d'un arbre de diamètre  $d = 30$  mm, de longueur  $L = 3$  m, ont tourné l'une par rapport à l'autre d'un angle de 4 degrés.

L'arbre est en acier de module  $G = 8 \times 10^4$  N/mm<sup>2</sup>.

1. Déterminer la contrainte tangentielle générée dans cet arbre.
2. Quelle est la valeur du moment de torsion qui le sollicite ?

### Solution de l'exercice 01

1. La contrainte tangentielle générée dans l'arbre

$$\theta = \frac{4\pi \times 10^{-3}}{3 \times 180} \text{ rd/mm}$$

$$\tau = Gr \theta = 8 \times 10^4 \times 15 \times \frac{4\pi \times 10^{-3}}{3 \times 180} = 28 \text{ N/mm}^2$$

2. La valeur du moment de torsion qui sollicite l'arbre

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$M_t = G\theta I_0 = 8 \times 10^4 \times \frac{4\pi \times 10^{-3}}{3 \times 180} \times \frac{\pi \times 30^4}{32} = 147.89 \text{ N.m}$$

**Exercice 02.** Un arbre plein commandant la rotation d'une hélice de navire doit transmettre une puissance de 9200 kW à la vitesse de 80 tr/mn. La résistance pratique vaut 7 daN/mm<sup>2</sup>, le module de cisaillement  $G = 8 \times 10^4$  N/mm<sup>2</sup>, et l'angle de torsion unitaire maximum est de 0.1 degré/m.

Calculer le diamètre minimum de cet arbre.

**Solution de l'exercice 02**

Détermination du couple de torsion

$$M_t = \frac{9200 \times 10^3}{2\pi \times 80/60} = 112 \times 10^7 \text{ N.mm}$$

Angle de torsion unitaire maximal

$$\theta_{max} = \frac{0.1 \times \pi}{180} = 174 \times 10^{-8} \text{ rd/mm}$$

Condition de résistance

$$\tau_{max} \leq \tau_p \Rightarrow \frac{M_t r}{I_0} \leq \tau_p$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \quad ; \quad \tau_p = 70 \text{ N/mm}^2$$

Ainsi, on obtient :

$$d \geq 430 \text{ mm}$$

Condition de déformation

$$\theta \leq \theta_{max} \Rightarrow \frac{M_t}{G I_0} \leq \theta_{max}$$

$$d \geq 535 \text{ mm}$$

On adopte donc  $d \geq 535 \text{ mm}$ .

**Exercice 03.** Soient deux arbres de même longueur en acier dont l'un est plein de diamètre  $d$  ; l'autre est creux de diamètres  $D$  et  $0.8 D$ . Les deux arbres transmettent le même couple.

Calculer le rapport de leur volume dans les cas suivants :

- si la contrainte maximale est la même pour chacun d'eux.
- si l'angle de torsion est le même.

**Exercice 04.** Un essai statique de torsion effectué sur un cylindre en acier de diamètre 10 mm a donné les résultats suivants :

Sous l'action d'un couple de torsion à 37 N. m, l'angle de torsion de deux sections distantes de 200 mm est de 5 degrés. La limite élastique est atteinte sous un couple de 39.5 N. mm.

1. Déterminer le module de cisaillement du matériau constitutif.
2. Évaluer la résistance limite élastique et l'angle de torsion correspondant à la limite élastique.

## **CHAPITRE V**

### **FLEXION PLANE SIMPLE**

## 6.1 Définitions et hypothèses

### 6.1.1 Définitions

Une poutre droite d'axe  $x$  est en flexion simple autour de  $z$  au point si son torseur des efforts intérieurs est égal à :

$$\{\vec{R}_{int}\} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & \mathbf{0} \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}$$

$T_y$  est l'effort tranchant.

$M_{fz}$  est le moment fléchissant.

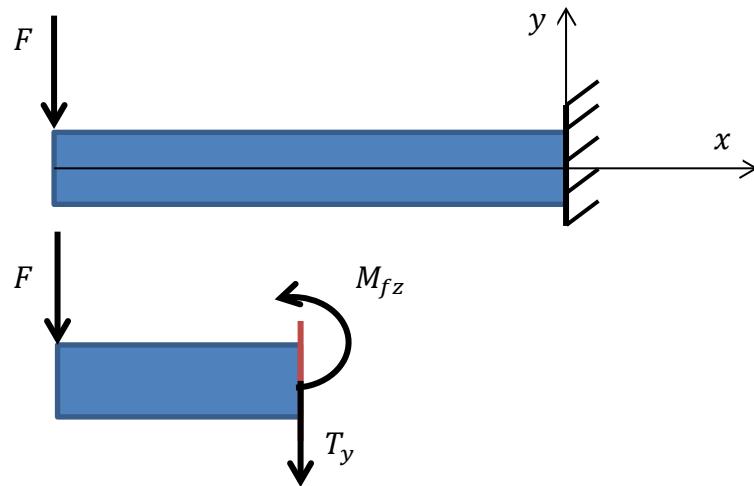


Figure 6.1. Effort tranchant et moment fléchissant

**Exemples :** Une poutre à son extrémité ou à son milieu, un arbre qui supporte un lourd volant au repos, un pont ou une canne à pêche sont des corps sollicités en flexion.

### 6.1.2 Hypothèses

L'établissement des formules de la flexion repose sur certaines hypothèses énumérées ci-dessous :

- L'élément poutre est décrit par une surface plane  $A$  appelée section droite de centre de gravité  $G$ . La ligne moyenne de la poutre est formée par les différentes positions du centre de gravité  $G$  de la poutre lorsque l'on parcourt cette dernière selon toute sa longueur  $l$ . La poutre admet un plan de symétrie et est formée de fibres jointives parallèles à l'axe  $x$ .

- Les déplacements, rotations et déformations sont supposés petits. C'est l'Hypothèse des Petites Perturbations. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli suppose que, pour toutes transformations géométriques, les sections droites d'une poutre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne.

- L'hypothèse de Barré de Saint Venant suppose que pour une section droite quelconque, suffisamment éloignée du point d'application des efforts extérieurs sur une poutre, les effets de ce même chargement peuvent être remplacés par un torseur équivalent s'appliquant à cette section droite.

Si l'effort tranchant  $T_y$  est nul, la flexion est dite pure. Sinon, la flexion est dite simple.

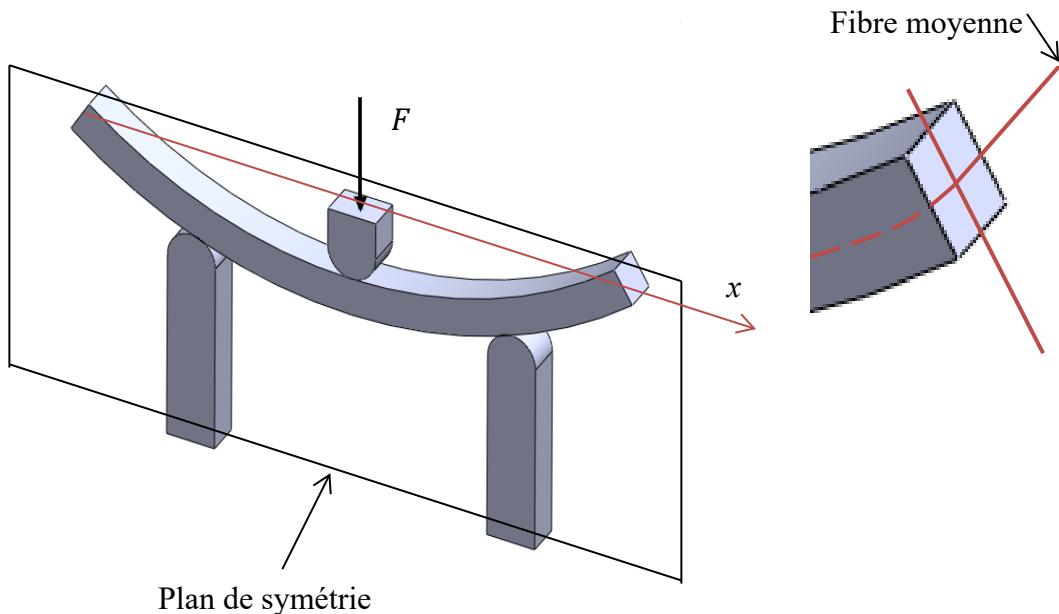


Figure 6.2. Hypothèses de calcul en flexion

## 6.2 Efforts tranchants et moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. L'équilibre de la poutre exige que la somme des efforts externes soit nulle. Ainsi les réactions aux appuis  $A$  et  $B$  doivent être égales à :

$$RA = Fb/L; RB = Fa/L$$

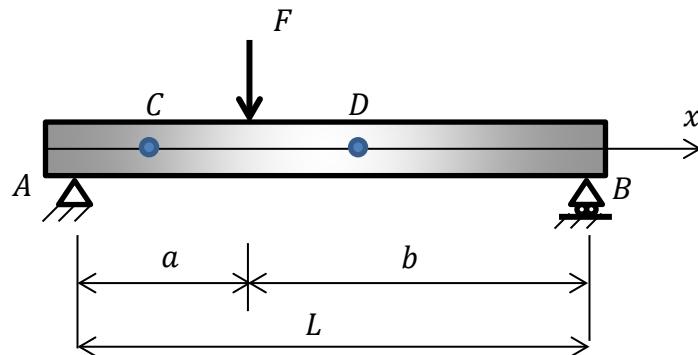


Figure 6.3. Poutre simplement appuyée

Effectuons une coupe au point  $C$  divisant la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs et des efforts intérieurs.

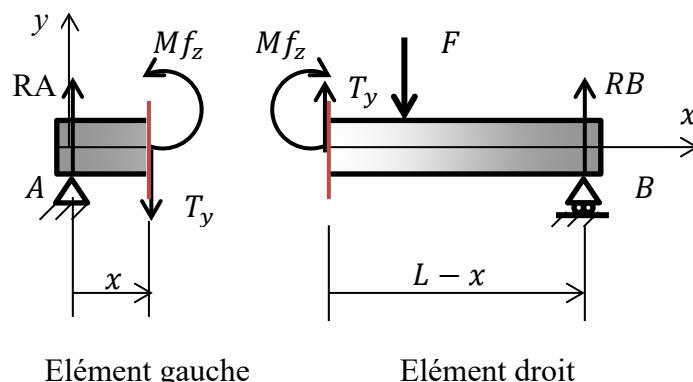


Figure 6.4. Coupe transversale dans la poutre

Pour étudier l'équilibre de l'élément gauche de la poutre, les efforts internes doivent équilibrer les efforts externes. Ainsi, la somme des forces agissant suivant l'axe  $y$  doit être nulle.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = RA = Fb/L$$

La somme des moments par rapport au point  $C$  doit également être nulle.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fb/L)x$$

En ce qui concerne l'élément droit, en procédant de la même sorte, on peut écrire

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = F - RB = Fb/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fa/L)(L - x) - F(L - x - b) = (Fb/L)x$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant évalués dans l'élément gauche sont identiques à ceux déterminés dans l'élément droit. Ainsi, dans un souci de simplifier les calculs, on prend souvent l'élément le moins compliqué.

### 6.3 Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction  $T_y(x)$ .

Le diagramme des moments fléchissants est la courbe représentative de la fonction  $Mf_z(x)$ .

En effectuant une coupe au point  $C$  (1ère partie) et une autre au point  $D$  (2ème partie).

1<sup>ère</sup> partie :  $0 \leq x \leq a$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = RA = Fb/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fb/L)x$$

La fonction  $Mf_z(x)$  est linéaire dans l'intervalle  $(0 \leq x \leq a)$

$$Mf_z(x = 0) = 0$$

$$Mf_z(x = a) = \frac{Fba}{L}$$

2<sup>ème</sup> partie :  $a \leq x \leq L$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -Fa/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = ((Fb/L) - F)x + Fa$$

La fonction  $Mf_z$  est linéaire dans l'intervalle  $(a \leq x \leq L)$

$$Mf_z(x = a) = \frac{Fba}{L}$$

$$Mf_z(x = L) = 0$$

Les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants peuvent ainsi être tracés le long de la poutre :

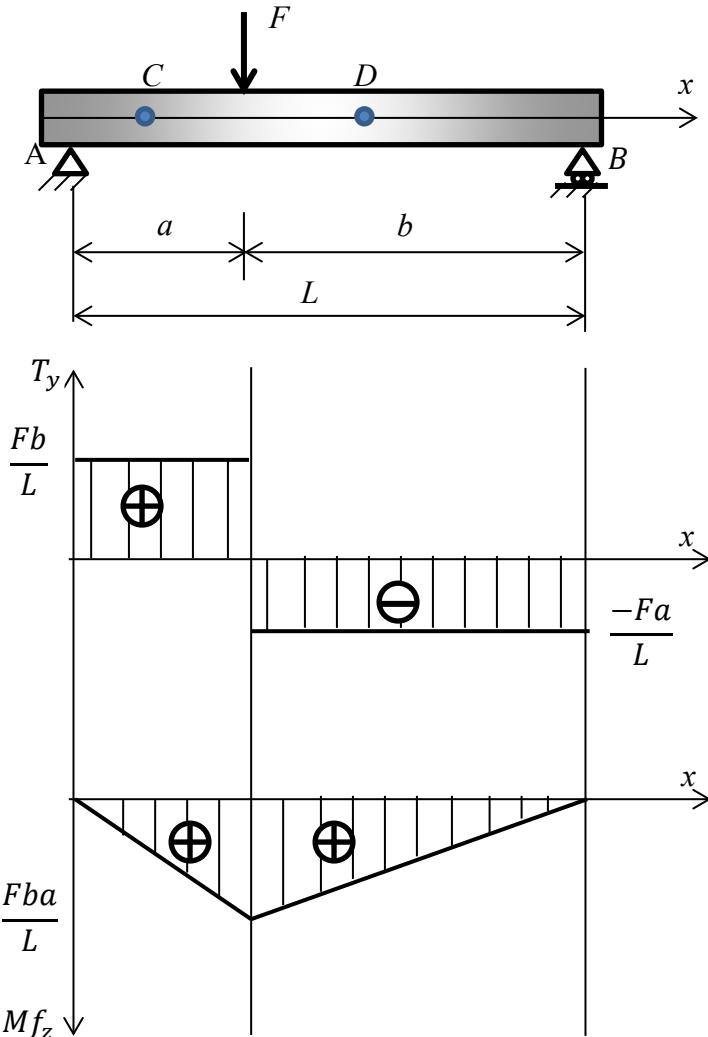


Figure 6.5. Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant

#### 6.4 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

En considérant un élément de poutre pris entre deux sections infiniment voisines, distantes de  $dx$ .

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par  $T_y$  et  $M_f_z$ .

L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par  $(T_y + dT_y)$  et  $(M_f_z + dM_f_z)$ .

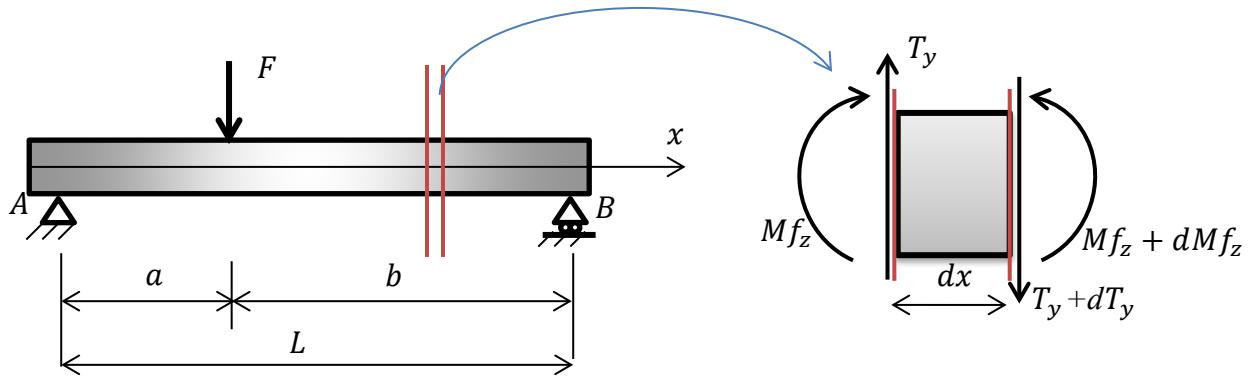


Figure 6.6. Relation moment fléchissant - effort tranchant

En l'absence des efforts externes appliqués sur l'élément de poutre isolé, les efforts tranchants à droite et à gauche de l'élément sont égaux ( $dT_y = 0$ ). Ainsi l'équilibre de l'élément de poutre s'écrit comme suit :

$$Mf_z + T_y dx - (Mf_z + dMf_z) = 0$$

$$T_y = \frac{dMf_z}{dx}$$

Il en résulte que le long de la poutre, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  du moment fléchissant.

### 6.5 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Soit une poutre droite d'axe  $x$ , on désigne par flèche, notée  $u_y$ , à l'abscisse  $x_n$  le déplacement suivant  $y$  du centre de gravité de la section  $A_n$  droite correspondant à l'abscisse  $x_n$ . Les positions finales des centres de gravité des sections droites le long de la poutre constituent la déformée de la poutre.

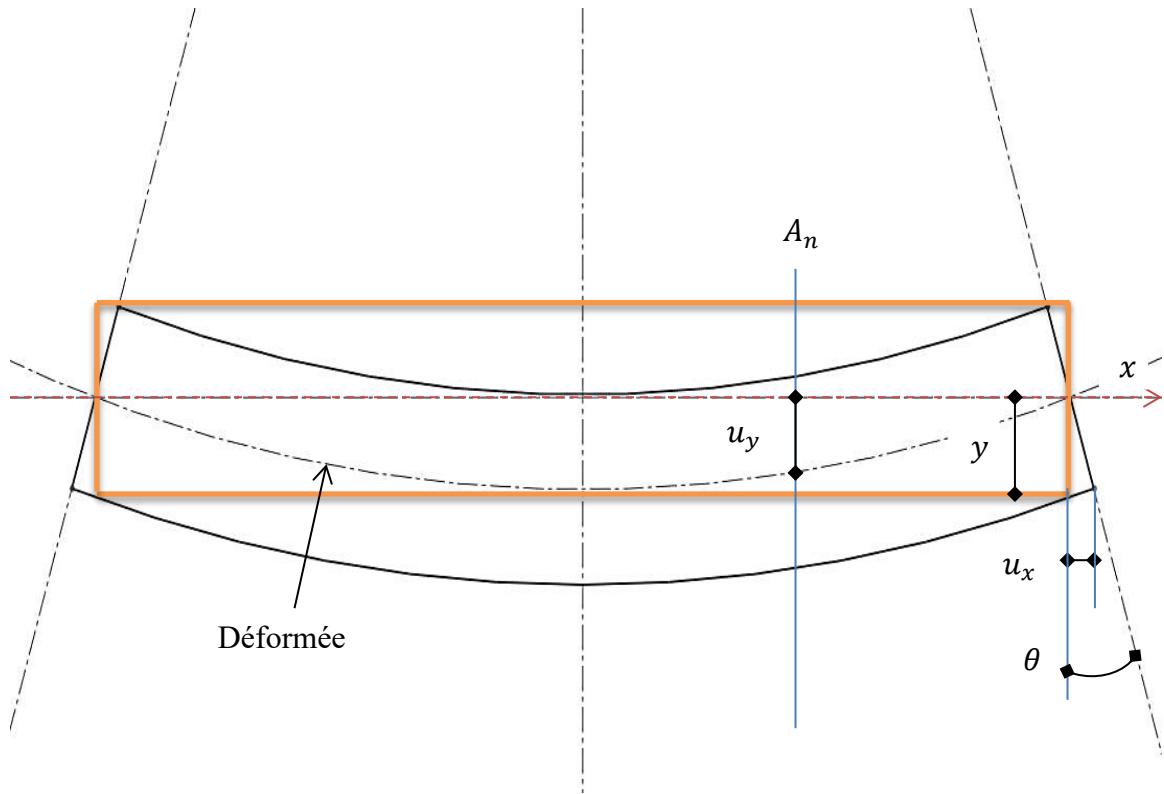


Figure 6.7. Déformée de la poutre

En supposant que les déformations sont petites (hypothèses de petites déformations),  $u_x$  étant le déplacement longitudinal, la déformation longitudinale  $\varepsilon$  s'exprime par :

$$\varepsilon = \frac{du_x}{dx}$$

L'angle de rotation  $\theta$ , étant supposé petit, il prend la forme :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{u_x}{y} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{d\theta}{dx} y$$

Le moment fléchissant  $M_f$  dans une section d'abscisse  $x$  s'exprime en fonction de la contrainte  $\sigma$  par l'intégrale :

$$M_f = \int_A \sigma y dA$$

Utilisant la loi du comportement élastique ( $\sigma = E\varepsilon$ ) uniaxiale reliant la contrainte et la déformation, on peut écrire :

$$Mf_z = - \int_A E \frac{d\theta}{dx} y^2 dA$$

En intégrant,  $I_z$  étant le moment d'inertie de la section, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{Mf_z}{EI_z}$$

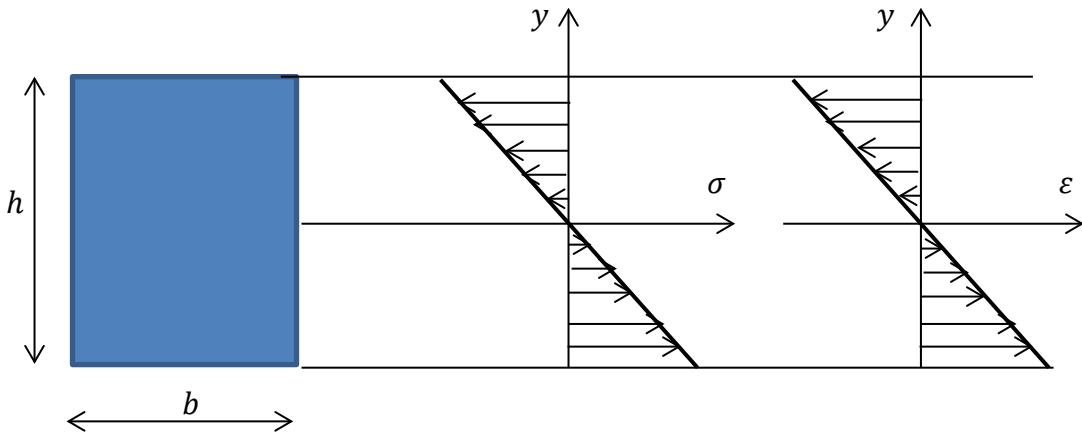


Figure 6.8. Répartition des contraintes et des déformations normales

Par ailleurs, l'angle de rotation peut prendre, selon l'hypothèse de petits déplacements la forme suivante :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{du_y}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2u_y}{dx^2} = \frac{Mf_z(x)}{EI_z}$$

C'est l'équation différentielle de la déformée.

## 6.6 Calcul des contraintes et dimensionnement.

### 6.6.1 Contraintes

La loi de Hooke établit une relation linéaire entre la contrainte et la déformation. Dans le cas de la flexion, les contraintes se réduisent à des contraintes normales et des contraintes tangentialles.

#### 6.6.1.1 Contraintes normales

En flexion pure, la poutre étant si élancée que le cisaillement transverse est négligé, les contraintes normales s'expriment alors par :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Remplaçant la déformation par sa formule  $(\varepsilon = -\frac{Mf_z}{EI_z}y)$ , on obtient :

$$\sigma = -\frac{Mf_z}{I_z}y$$

On remarque que la contrainte prend un aspect linéaire en fonction de l'épaisseur de la poutre. Ainsi, elle est nulle au niveau de la fibre moyenne tandis qu'elle prend ses valeurs maximales et minimales sur les fibres externes.

#### 6.6.1.2 Contraintes tangentialles

Dans le cas de la flexion simple, le cisaillement transverse est pris en compte. Ainsi, en plus de la contrainte normale  $\sigma$ , se génère une contrainte tangentielle  $\tau$  dont la valeur est donnée par la formule :

$$\tau = \frac{T_y W_z}{I_z b}$$

$W_z$  représente le moment statique de la région en bleu de la section par rapport à la fibre moyenne.

$b$  est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte tangentielle.

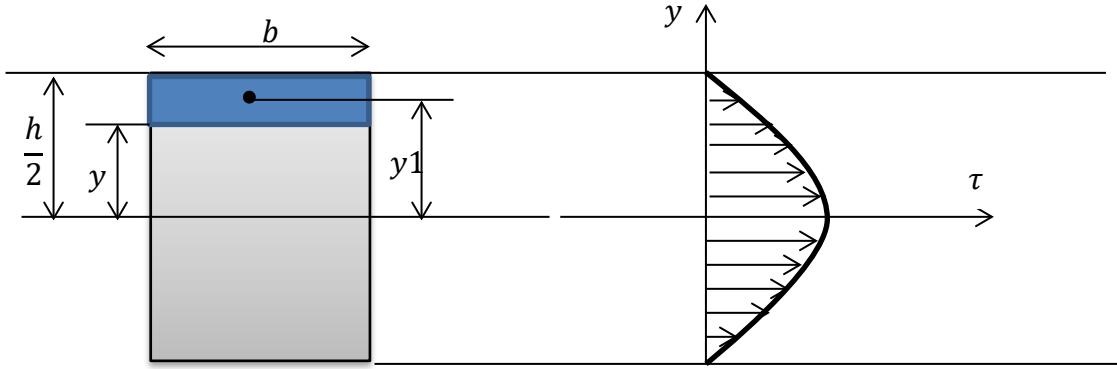


Figure 6.8. Répartition des contraintes tangentielles

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ , le moment d'inertie et le moment statique sont donnés par :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad Ms_z = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

### 6.6.2 Dimensionnement

En l'absence du cisaillement transverse, le dimensionnement d'une poutre en flexion passe par les étapes suivantes :

- Détermination de la section dangereuse à partir du diagramme du moment fléchissant le long de la poutre.
- Evaluation de la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  dans la section dangereuse.
- Vérification de la condition de résistance qui s'écrit comme suit :

$$\sigma_{max} = - \frac{M f_{z_{max}}}{I_z} y_{max} \leq \frac{\sigma_e}{s} = \sigma_p$$

$s$  est le coefficient de sécurité ;  $\sigma_e$ , la limite élastique du matériau et  $\sigma_p$ , la résistance pratique du matériau.

En prenant en compte le cisaillement transverse, on utilise généralement le critère de la contrainte tangentielle maximale (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

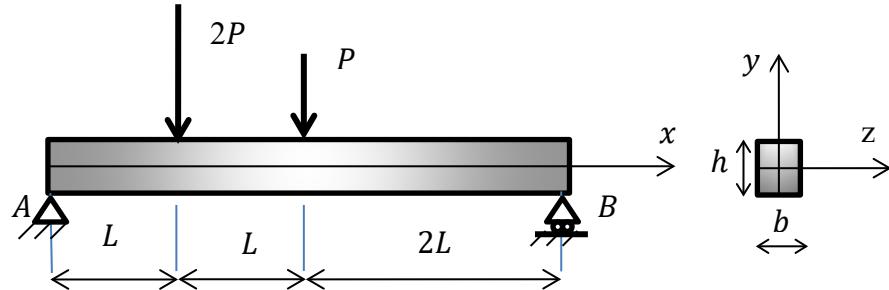
Ainsi, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_p$$

## Exercices

**Exercice 01.** Une poutre  $AB$  est chargée comme l'indique la figure ci-dessous. La poutre est de longueur  $4L$  et de section rectangulaire ( $b \times h$ ).

Données :  $P = 2 \text{ kN}$  ;  $L = 500 \text{ mm}$  ;  $b = 30 \text{ mm}$  ;  $h = 40 \text{ mm}$ .



- 1) Calculer les réactions aux appuis  $A$  et  $B$ .
- 2) Évaluer l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.
- 3) Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
- 4) Déterminer la contrainte normale maximale dans la poutre.

### Solution de l'exercice 01

- 1) Calcul des réactions aux appuis  $A$  et  $B$ .

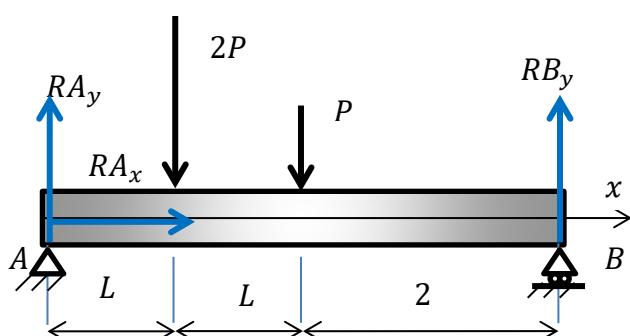
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow RA_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA_y + RB_y - 2P - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2PL + 2PL - 4LRB_y = 0$$

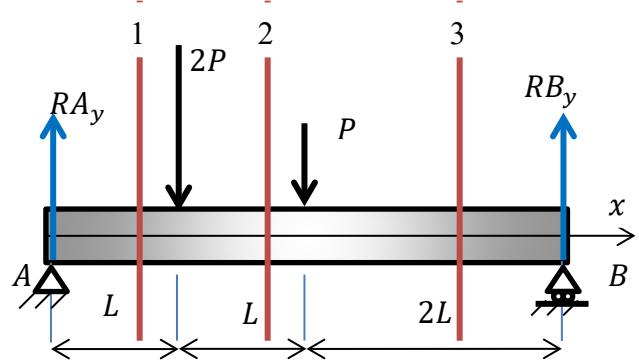
Ce qui donne :

$$RB_y = P = 2 \text{ kN} \quad ; \quad RA_y = 2P = 4 \text{ kN}$$



2) Évaluation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.

L'effort tranchant et le moment fléchissant étant des efforts internes, on réalise des coupes pour les déterminer. Ainsi trois coupes sont nécessaires pour l'étude de cette poutre.



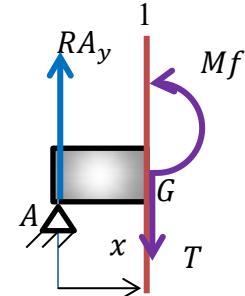
Coupe 1 :  $0 \leq x \leq L$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA_y - T = 0$$

$$T = RA_y = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow Mf - RA_y x = 0$$

$$Mf = RA_y x = 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 ; Mf = 0 \\ x = L ; Mf = 4L = 2000 \text{ kN. mm} \end{cases}$$

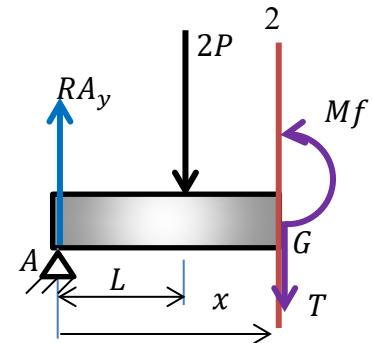


Coupe 2 :  $L \leq x \leq 2L$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA_y - 2P - T = 0$$

$$T = RA_y - 2P = 0$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow Mf - RA_y x + 2P(x - L) = 0$$



$$Mf = RA_y x - 2P(x - L) = 2PL \Rightarrow \begin{cases} x = L ; Mf = 2000 \text{ kN. mm} \\ x = 2L ; Mf = 2000 \text{ kN. mm} \end{cases}$$

Coupe 3 :  $2 \leq x \leq 4L$

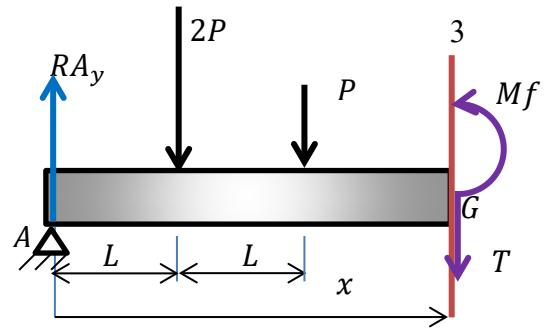
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA_y - 2P - P = 0$$

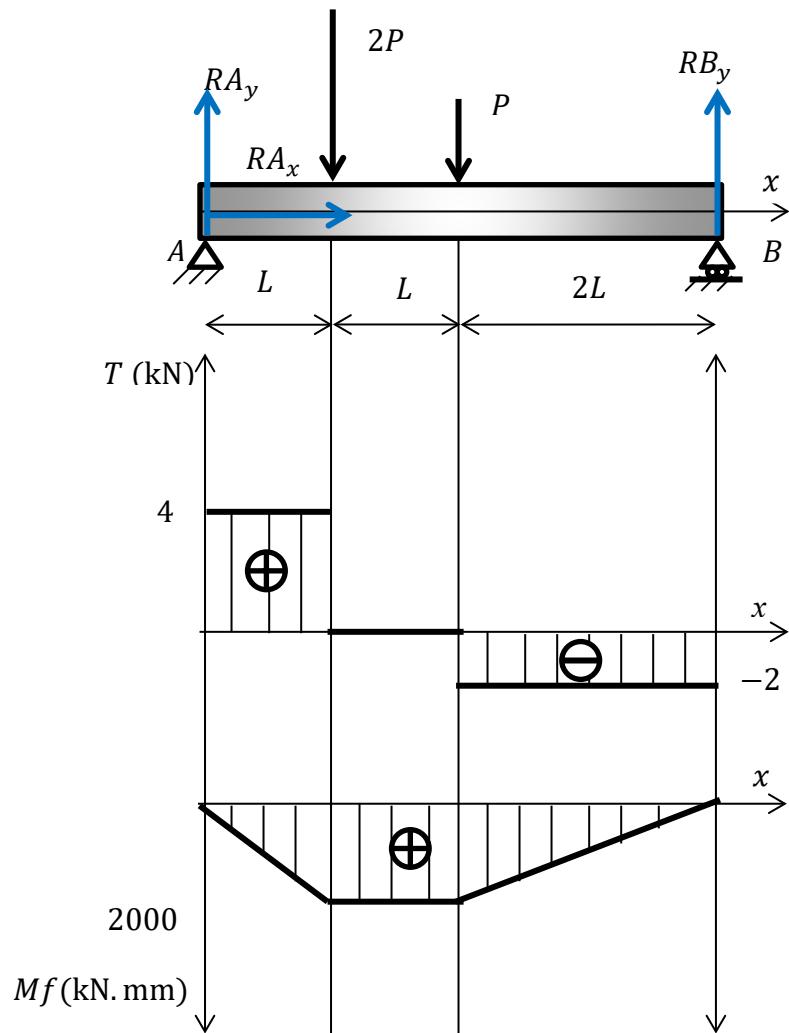
$$T = RA_y - 2P - P = -P = -2 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 \Rightarrow Mf - RA_y x + 2P(x - L) + P(x \\ - 2L) = 0 \end{aligned}$$

$$Mf = RA_y x - 2P(x - L) - P(x - 2L) = -Px + 4PL \Rightarrow \begin{cases} x = 2L ; Mf = 2000 \text{ kN.mm} \\ x = 4L ; Mf = 0 \end{cases}$$

3) Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant





4) Détermination de la contrainte normale maximale dans la poutre.

$$\sigma_{max} = -\frac{Mf_{max}}{I_z} y_{max}$$

$$Mf_{max} = 2000 \text{ kN.mm} \quad ; \quad y_{max} = \pm \frac{h}{2} = \pm 20 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 40^3}{12} = 16 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Ainsi

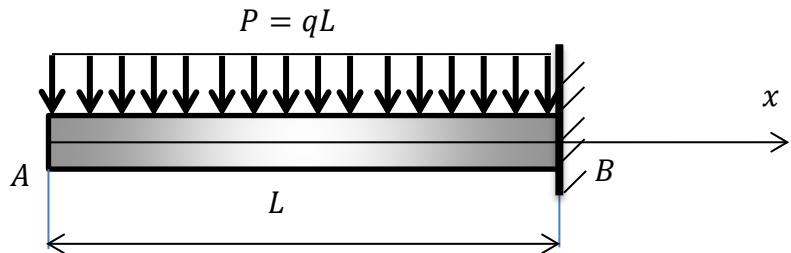
$$\sigma_{max} = -\frac{2000}{16 \times 10^4} \times \pm 20 = \pm 250 \text{ MPa}$$

Il convient de préciser que la contrainte maximale générée dans les fibres externes inférieures est positive (traction) tandis que celle produite dans les fibres externes supérieures est négative (compression).

**Exercice 02.**

Soit une poutre droite de longueur  $L$  encastrée à une extrémité et soumise à une charge répartie ( $P = qL$ ) tel qu'il est illustré sur la figure ci-dessous.

- 1) Déterminer les réactions à l'enca斯特rement.
- 2) Evaluer l'effort tranchant et de du moment fléchissant puis racer leurs diagrammes.
- 3) Ecrire l'expression de la déformée et en déduire la flèche maximale.

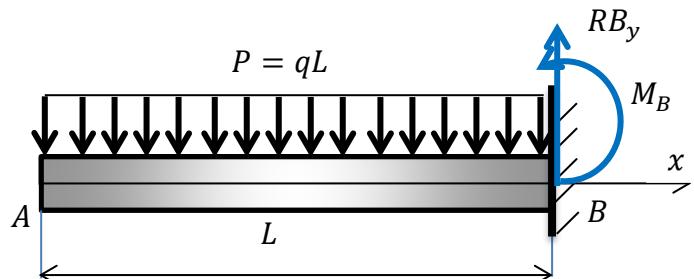


**Solution de l'exercice 02**

- 1) Détermination des réactions

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RB_y = P = qL$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{2} - RB_y L = -\frac{1}{2} qL^2$$

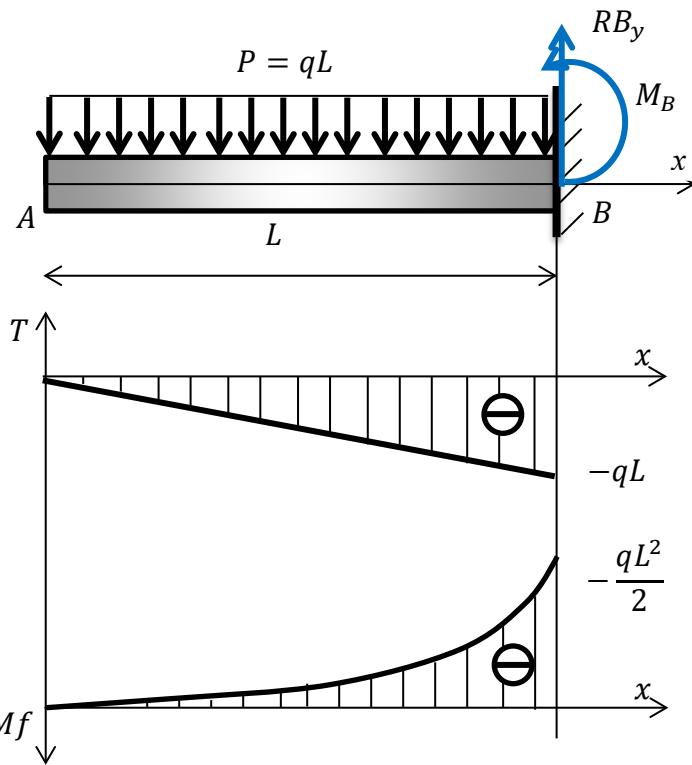
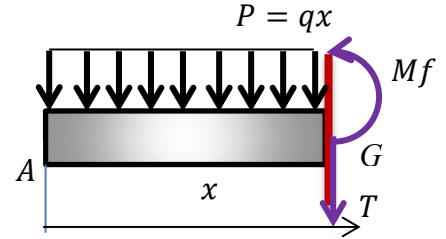


- 2) Evaluation de l'effort tranchant et de du moment fléchissant.

Une seule coupe à effectuer :  $0 \leq x \leq L$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T = -qx \Rightarrow \begin{cases} x = 0 ; T = 0 \\ x = L ; T = -qL \end{cases}$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow Mf = -qx \times \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} \begin{cases} x = 0 ; Mf = 0 \\ x = L ; Mf = -\frac{qL^2}{2} \end{cases}$$



3) Ecriture de l'expression de la déformée

$$\frac{d^2u_y}{dx^2} = \frac{Mf}{EI_z} = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{du_y}{dx} = \theta = \frac{1}{EI_z} \int -\frac{qx^2}{2} dx = \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{qx^3}{6} + C \right)$$

L'angle de rotation étant nul à l'encastrement, on écrit :

$$\text{Pour } x = L ; \theta = 0 \Rightarrow C = \frac{qL^3}{6}$$

$$u_y = \frac{1}{EI_z} \int \left( -\frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{6} \right) dx = \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3}{6}x + D \right)$$

Le déplacement étant nul à l'encastrement, on écrit:

$$\text{Pour } x = L ; u_y = 0 \Rightarrow D = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{6} = -\frac{qL^4}{8}$$

On obtient enfin l'expression de la déformée

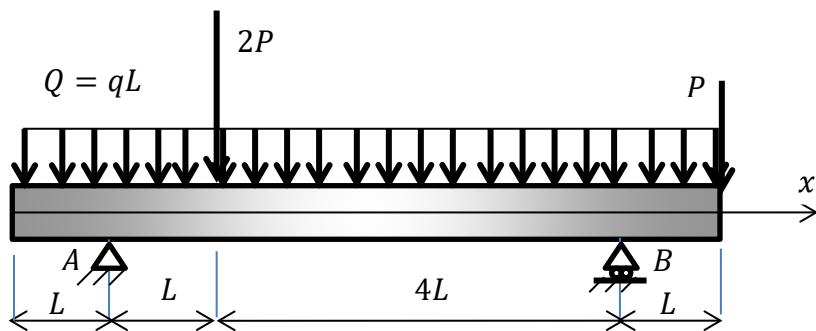
$$u_y = \frac{-q}{EI_z} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{L^3 x}{6} + \frac{L^4}{8} \right)$$

La flèche maximale est localisée à l'extrémité libre

$$u_y(x = 0) = \frac{-qL^4}{EI8}$$

**Exercice 03.** Une poutre droite ? de  $7L$  de long, repose sur deux appuis situés respectivement à  $L$  des extrémités de la poutre. La poutre supporte une charge répartie et deux charges ponctuelles telles qu'il est illustré sur la figure ci-dessous.

Données :  $L = 1 \text{ m}$  ;  $P = 10 \text{ kN}$  ;  $q = 6 \text{ kN/m}$ ;



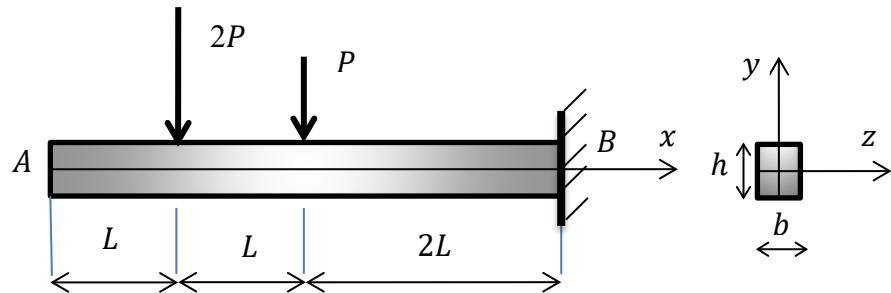
- 1) Calculer les réactions aux appuis.
- 2) Evaluer les efforts tranchants et les moments fléchissants puis tracer leurs diagrammes.

**Exercice 04.** Une poutre droite de 2.5 m de long dont la section rectangulaire de 10 mm de largeur, est encastrée à une de ses extrémités. Elle supporte une charge uniformément répartie de 800 daN et des charges ponctuelles de 50 daN, 100 daN, 200 daN, appliquées respectivement à l'extrémité libre, à 2 m et à 1m de l'enca斯特ment.

Quelle hauteur doit-on donner à la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas 14 daN/mm<sup>2</sup> ?

**Exercice 05.** Une poutre encastrée en B est chargée comme l'indique la figure ci-dessous. La poutre est de longueur  $4L$  et de section rectangulaire ( $b \times h$ ).

Données :  $P = 2 \text{ KN}$  ;  $L = 500 \text{ mm}$  ;  $b = 25 \text{ mm}$  ;  $h = 40 \text{ mm}$ .



- 1) Calculer les réactions à l'enca斯特rement.
- 2) Déterminer l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre et en tracer les diagrammes.
- 3) Déterminer les contraintes normales et tangentielles puis en tracer la répartition.
- 4) Ecrire l'expression de la déformée et en déduire la flèche maximale.

## RÉFÉRENCES

- [1] A. BAZERGUI, *Résistance des matériaux*, Presses inter Polytechnique, 2002.
- [2] A. Delaplace, F. Gatuingt, F. Ragueneau, *Aide-mémoire de mécanique des structures: Résistance des matériaux*, Hachette, 2008.
- [3] A. Thorin, G. Forêt, *Calcul des structures*, École d'ingénieur, Palaiseau, France, 2013.
- [4] M. Del Pedro, T. Gmür, J. Botsis, *Introduction à la mécanique des solides et des structures*, PPUR Presses Polytechniques, 2004.
- [5] R. Basquin et G. Lemasson, *Résistance des matériaux*, Delagrave, 1964.
- [6] S. Khalfallah, *Analyse des structures 1: Structures isostatiques*, ISTE Group, 2019.
- [7] S.P.Timoshenko, *Résistance des matériaux*, vol. 1, Paris, Dunod, 1968.