

جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل - كلية العلوم الإقتصادية التجارية و

علوم التسيير - قسم العلوم التجارية - لواتي جمال

الفصل الأول - الدرس الأول : التوزيعات الإحتمالية

1) التوزيعات الإحتمالية المتقطعة :

1-1) توزيع برنولي $B(1,p)$

توزيع إحتمالي متقطع يلائم الظواهر التي تشمل على حدثين ممكنين فقط (نتيجتين فقط) , حدث نسميه **نجاح** ونرمز له **1** , والحدث الآخر نسميه **فشل** ونرمز له **0** .

إحتمال النجاح يساوي p , وإحتمال الفشل يساوي $q=1-p$, مجموع الإحتمالات $p+q=1$.

- قانون التوزيع (دالة الإحتمال) :

$$f(x) = p^x * q^{1-x} \quad x = 1, 0$$

حيث : $0 \leq p \leq 1$ et $q=1-p$

- التوقع الرياضي :

$$\mu = E(x) = \sum x * f(x) = 1 * p + 0 * q = p$$

- التباين :

$$\sigma^2 = v(x) = \sum (x - \mu)^2 f(x) = (1 - p)^2 p + p^2 q = q^2 p + p^2 q = p(q + p)q = pq$$

أمثلة :

_نرمي قطعة نقود , نسمي ظهور وجه نجاح (1) , إحتمال النجاح $p=0.5$

التوقع الرياضي : $\mu=p=0.5$. التباين : $\sigma^2 = p q = 0.5*0.5=0.25$

_نرمي حجر نرد, نسمي ظهور رقم أكبر أو يساوي 5 نجاح (1) , إحتمال النجاح $p=2/6$

التوقع الرياضي : $\mu=p=2/6$. التباين : $\sigma^2 = p q = 2/6 * 4/6 = 8/36$

_شخص يطلق طلقة على هدف , نسمي إصابة الهدف نجاح (1) , إحتمال الإصابة 80%

إحتمال النجاح $p=0.8$. التوقع الرياضي : $\mu=p=0.8$. التباين : $\sigma^2 = 0.8*0.2$

2-1) التوزيع المنتظم $u(1,n)$ Uniforme

توزيع متقطع تكون فيه كل قيم المتغير العشوائي لها احتمالات متساوية .

- دالة الإحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad x = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\mu = E(x) = \frac{n+1}{2} \quad - \quad \text{التوقع الرياضي} :$$

$$\sigma^2 = v(x) = \frac{n^2-1}{12} \quad - \quad \text{التباين} :$$

- مثال :

نرمي حجر نرد , نسمي متغير عشوائي الرقم الذي يظهر :

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$f(4) = \frac{1}{6} \quad : \quad \text{إحتمال ظهور الرقم 4}$$

$$f(5) = \frac{1}{6} \quad : \quad \text{إحتمال ظهور الرقم 5}$$

3-1) توزيع ثنائي الحدين Binomiale

توزيع إحصائي متقطع يستخدم في الظواهر التي نهتم فيها بظهور حدث معين يسمى نجاح

1 , عدد من المرات x من بين جملة من المحاولات عددها n . وتكون :

_ كل محاولة لها نتيجتين فقط , نجاح 1 , فشل 0 .

_ المحاولات عددها n مستقلة عن بعضها البعض (ظهور نتيجة لا يؤثر على النتيجة التالية).

_ احتمال النجاح 1 , ثابت p من محاولة لأخرى .

- توزيع Binomiale هو تكرار لتجربة برنولي n مرة .

- أمثلة :

_ رمي قطعة نقد 3 مرات : $x = 0, 1, 2, 3$

_ إطلاق 4 طلقات على هدف : $x = 0, 1, 2, 3, 4$

_ رمي حجر نرد مرتين 2 , نجاح 1 (ظهور الرقم 5) : $x = 0, 1, 2$

4-1) توزيع بواسون poisson

توزيع احتمالي متقطع يلائم الظواهر التي تقع فيها أحداث (نجاحات) بمعدل ثابت λ , في وحدة من : الزمن , المساحة , الحجم ...

وتكون : _ الأحداث أو النجاحات نادرة .

_ الأحداث مستقلة عن بعضها البعض .

- أمثلة :

_ عدد الزبائن الذين يدخلون إلى بنك في ساعة $\lambda = 10$

_ عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب $\lambda = 5$

5-1) التوزيع مافوق الهندسي hypergéométrique

يشبه نوعاً ما توزيع ثنائي الحدين (ظهور حدث معين عدد من المرات x من بين جملة من المحاولات n) . لكن تكون :

_ المحاولات غير مستقلة عن بعضها البعض .

_ احتمال النجاح 1 يتغير من محاولة لأخرى .

6-1) التوزيع الهندسي géométrique

يرتبط بتجربة برنولي و يشبه توزيع ثنائي الحدين , تكرار محاولات برنولي إلى غاية

الحصول على نجاح 1 في المحاولة k : $x = 1, 2, 3 \dots k$

2) التوزيعات الإحصائية المستمرة :

1-2) التوزيع المنتظم المستمر *uniforme*

توزيع مستمر تكون فيه كل القيم على مجال $[a, b]$, لها احتمالات متساوية .

2-2) التوزيع الأسّي *exponentielle*

توزيع إحصائي مستمر يلائم الظواهر التي نهتم فيها بطول مجال معين من : الزمن , المساحة , الحجم ... يفصل بين حدثين متتابعين .

_ يرتبط كثيرا بتوزيع بواسون : توزيع بواسون يدل على عدد الأحداث التي تتكرر في مجال من الزمن , المساحة , الحجم ... بمعدل λ . التوزيع الأسّي يدل على العكس , طول المجال الفاصل بين حدثين بمعدل $\gamma = \frac{1}{\lambda}$.

- أمثلة :

_ الوقت اللازم لخدمة زبون في بنك , أو الوقت الفاصل بين وصول زبونين .

_ في مساحة معينة طول المسافة الفاصلة بين عيبين .

3-2) التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma)$ Distribution normale

توزيع احتمالي مستمر من أكثر التوزيعات إستخداما في التحليل الإحصائي, فعادة تكون المتغيرات مستمرة و تميل إلى التمرکز في الوسط , فيكون لها منحنى طبيعي (شكل الجرس)

- دالة الكثافة الإحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

المتوسط (التوقع الرياضي) :

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

التباين :

$$\sigma^2 = v(x) = E(x - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

- المنحنى الطبيعي :

__ منحنى متناظر على شكل جرس .

__ قيم x تتمركز في الوسط , حيث : المتوسط = الوسيط = المنوال .

__ المتوسط يمكن أن يكون : سالب , معدوم , موجب .

__ المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي تساوي 1 , وهي تقابل مجموع كل الإحتمالات .

__ كل إحتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى الطبيعي (الإحتمال = مساحة) .

- التوزيع الطبيعي المعياري :

إذا كان x متغير طبيعي : $x \sim N(\mu, \sigma)$

فإن المتغير : $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

له توزيع طبيعي معياري , بمتوسط $\mu=0$, و إنحراف معياري $\sigma=1$:

$$z \sim N(0,1)$$

- إستخدام الجدول :

جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي إحتتمالات من الشكل : $pr(Z \leq a)$

- خواص :

$$pr(Z \leq a) + pr(Z > a) = 1$$

$$pr(a \leq Z \leq b) = pr(Z \leq b) - pr(Z \leq a)$$

$$pr(Z \leq -a) = pr(Z > a) = 1 - pr(Z \leq a)$$

$$pr(Z = a) = 0$$

$$pr(Z < a) = pr(Z \leq a)$$

– مثال :

متغير طبيعي x : $x \sim N(10, 2)$

إحتمال أن x أقل أو يساوي 15 :

$$pr(x \leq 15) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-10}{2}\right) = pr(Z \leq 2.5) = 0.9938$$

إحتمال أن x أكبر من 15 :

$$pr(x > 15) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{15-10}{2}\right) = pr(Z > 2.5) = 1 - pr(Z \leq 2.5) = 0.0062$$

إحتمال أن x أصغر من 5 :

$$pr(x < 5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-10}{2}\right) = pr(Z \leq -2.5) = pr(Z > 2.5) = 1 - pr(Z \leq 2.5) = 0.0062$$

إحتمال أن x محصور بين 8 و 12 :

$$pr(8 \leq x \leq 12) = pr\left(\frac{8-10}{2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{12-10}{2}\right) = pr(-1 \leq Z \leq 1) = pr(Z \leq 1) - pr(Z \leq -1) = 0.8413 - [1 - pr(Z \leq 1)] = 0.6826$$

4-2) توزيع كي مربع χ^2_v Chi-carré

توزيع كي مربع χ^2_v بدرجة حرية $v = m$ ، هو توزيع إحصائي لمجموع m متغيرات عشوائية طبيعية معيارية z_i كل منها مرفوع للقوة 2 :

$$\chi^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \dots + z_m^2$$

التوقع الرياضي : $\mu = v$

التباين : $\sigma^2 = 2v$

5-2) توزيع ستودنت t_v Student

توزيع ستودنت t_v بدرجة حرية v ، هو توزيع إحصائي لنسبة متغيرة عشوائية طبيعية معيارية z ، على جذر تربيعي لمتغيرة كي مربع χ^2 بدرجة حرية v :

$$t = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/v}}$$

التوقع الرياضي : $\mu = 0$

التباين : $\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$