Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electrotechnique
Systèmes Asservis, L3, TD N° 1

EXO : 1

On alimente le circuit R-C série de la figure : 1 par une tension e(t).

1) Ecrire l'équation différentielle qui régit ce circuit.
2) Etablir la relation entre l'entrée e(t) et la sortie s(t).
3) Etablir la fonction de transfert à partir de l'équation différentielle sachant que s(0)=0.
4) On applique, à t=0 S, un échelon unité à entrée du circuit initialement au repos s(0)=0. Calculer S(p) puis s(t). Tracez l'allure de la réponse indicielle.
5) Trouvez sa réponse impulsionnelle, tracez son allure et vérifiez que c'est la dérivée de la réponse indicielle.

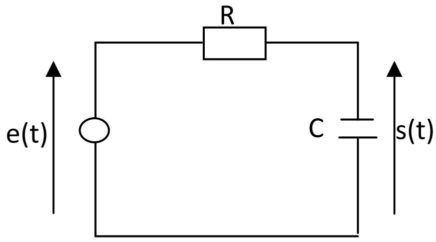


Figure : 1

EXO : 2 On considère un système linéaire continu régit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2\,s(t) = 5\,u(t)$$

L'état initial étant défini par : s(0)=0 et s'(0)=1. On s'intéresse à la réponse de ce système soumis à un échelon unitaire

1) Donner la solution de l'équation homogène $S_h(t)$.
2) Donner une solution particulière de l'équation avec second membre $S_p(t)$
3) Donner la solution générale
4) Retrouvez ce résultat en utilisant le calcul opérationnel.

EXO : 4

Trouver la transformée de Laplace de :

a) $f(t) = e^{-2t}\cos 5t$
b) $g(t) = \sin(t-3)$
c) $h(t) = cos\frac{\omega t}{2}$

EXO : 5

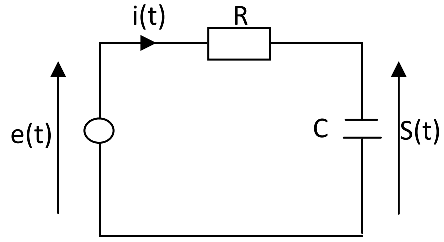
Trouvez la transformée inverse de Laplace de :

a) $\mathrm{F(p)} = \frac{p+2}{p(p+3)(p+4)}$ En utilisant le développement en éléments simples
b) $\mathrm{F(p)} = \frac{2p}{(p+3)(p+2)^2}$ En utilisant la Méthode des résidus

Solution du TD N° 1

Exo : 1

1) Equation différentielle qui régit le circuit :
   On écrit l'équation de la maille
   $e(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$ (1)



2) Relation entre e(t) et s(t)
   $$s(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$
   On remplace dans l'équation (1)

$$e(t) = R\,C\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) \quad (2)$$ avec τ =RC= Constante de temps

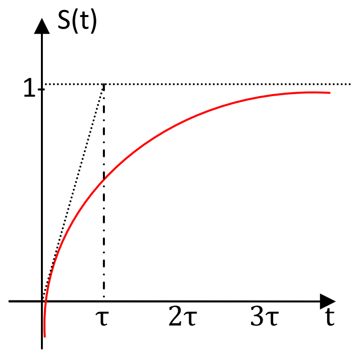
3) Fonction de transfert : La transformée de Laplace de l'équation (2) (avec les conditions initiales nulles) donne

$$E(p) = \tau\,p\,S(p) + s(p) = S(p)[\tau\,p + 1] \Rightarrow H(p) = \frac{s(p)}{E(p)} = \frac{1}{\tau\,p+1}$$

C'est la fonction de transfert d'un système du 1er ordre

4) **Réponse indicielle** e(t)=u(t)=échelon unitaire ⇒ E(p)=1/p

$$S_e(p) = H(p) * E(p) = \frac{1/p}{\tau\,p+1} = \frac{1/\tau}{p(p+\frac{1}{\tau})} \quad (1)$$



Décomposition en éléments simples

$$\Rightarrow \quad S_e(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{\tau}} = \frac{p(A+B)+\frac{A}{\tau}}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)} \quad (2)$$

Par identification entre (1) et (2) on trouve A=1 et B=-1

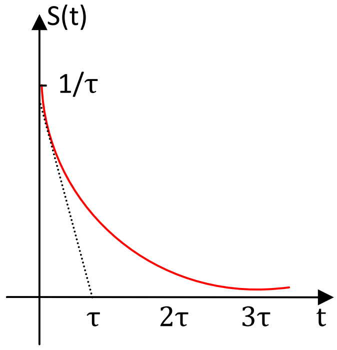
donc $\quad S_e(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow s_e(t) = 1 - e^{-t/\tau}$

$S_e(0)=0$, $S_e(\infty) = 1$, $\quad \frac{dS_e(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{dS_e(0)}{dt} = \frac{1}{\tau}$ = pente à l'origine

5) **Réponse impulsionnelle** e(t)=δ(t)=impulsion de Dirac ⇒ E(p)=1

$$S_i(p) = H(p) * E(p) = \frac{1}{\tau\,p+1} = \frac{1/\tau}{p+1/\tau}$$

$$\Rightarrow s_i(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{ds_e(t)}{dt}$$



$S_i(0)=1/\tau$, $S_i(\infty) = 0$, $\frac{dS_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow \frac{dS_i(0)}{dt} = -\frac{1}{\tau^2}$ = pente à l'origine

EXO : 2 $\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 5\,u(t) \quad (1) \quad avec\ s(0) = 0\ \ et\ s'(0) = 1$

1) Solution de l'équation homogène

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 0 \quad (2)\ on\ suppose\ que\ \ s_h(t) = Ke^{rt}$$

On remplace dans (2), on obtient

$$Ke^{rt}[r^2 + 3r + 2] = 0 \Rightarrow \qquad r^2 + 3\,r + 2 = 0 = équation\ caractéristique$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow r_1 = -1\ \ et\ r_2 = -2 \ \ \Rightarrow s_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

2) Solution particulière de l'équation avec second membre

Elle est de la même forme que le second membre, ici le second membre est une constante, donc on suppose que $s_p(t)$= constante donc on aura

$$2s_p(t) = 5\,u(t) \Rightarrow s_p(t) = \frac{5}{2}u(t) = 2.5\ pour\ t \geq 0$$

3) Solution générale

$$s_g(t) = s_h(t) + s_p(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + 2.5 \quad (3)$$

$$\frac{ds_g(t)}{dx} = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

$$s(0) = 0 = Ae^{-0} + Be^{-20} + 2.5 = A + B + 2.5 = 0 \qquad (4)$$

$$s'(0) = 1 = -A - 2B \ \ (5), \qquad (5)\ et\ (4) \quad \Rightarrow A = -4 \quad et \quad B = 1.5$$

On remplace dans (3) on obtient

$$s_g(t) = s_h(t) + s_p(t) = -4e^{-t} + 1.5e^{-2t} + 2.5 \qquad (6)$$

4) Utilisation du calcul opérationnel

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 5\,u(t) \quad (1) \quad avec\ s(0) = 0\ \ et\ s'(0) = 1$$

La transformée de Laplace de cette équation

$$\mathfrak{L}\{5\,u(t)\} = \frac{5}{p}$$

$$\mathfrak{L}\{2\ \ s(t)\} = 2\,S(p)$$

$$\mathfrak{L}\left\{3\ \frac{ds(t)}{dt}\right\} = 3\{p\,S(p) - s(0)\} = 3pS(p)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right\} = p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p) - 1$$

$$p^2S(p) - 1 + 3pS(p) + 2S(p) = \frac{5}{p} \Rightarrow S(p)\{p^2 + 3p + 2\} = \frac{5}{p} + 1 = \frac{p+5}{p}$$

$$S(p) = \frac{p+5}{p(p^2+3p+2)} = \frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}\ (7)\ \ trois\ poles\ simples(0, -1, -2)$$

$$A = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p\to 0} \frac{p+5}{(p+1)(p+2)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$B = \lim_{p \to -1}(p+1)S(p) = \lim_{p \to -1}(p+1)\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p \to -1}\frac{p+5}{p(p+2)} = -4$

$C = \lim_{p \to -1}(p+2)S(p) = \lim_{p \to -2}(p+2)\frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \lim_{p \to -2}\frac{p+5}{p(p+1)} = 1.5$

$S(p) = \frac{p+5}{p(p^2+3p+2)} = \frac{p+5}{p(p+1)(p+2)} = \frac{2.5}{p} + \frac{-4}{p+1} + \frac{1.5}{p+2}$

$\Rightarrow s(t) = \mathfrak{L}^{-1}(S(p)) = 2.5 - 4e^{-t} + 1.5e^{-2t}$

EXO 3 :

a) $f(t) = e^{-2t}\cos 5t$

$f(t) = \cos 5t \overset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} F(p) = \dfrac{p}{p^2+5^2}$

$\mathfrak{L}((\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{f(t)}) = \mathrm{F(p+a)} \;\;) \Rightarrow \mathfrak{L}(e^{-2t}\cos 5t) = \dfrac{p+2}{(p+2)^2+5^2}$

b) $g(t) = \sin(4t-3)$

$f(t) = \sin\omega t \overset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \mathfrak{L}(\sin 4t) = \frac{4}{p^2+4^2}$

$\mathfrak{L}$(f(t-T))= e^{-PT} F(P) $\Rightarrow \mathfrak{L}(\sin(4t-3)) = e^{-3t}\frac{4}{p^2+4^2}$

c) $h(t) = cos\frac{\omega t}{2}$

$f(t) = \cos\omega t \overset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} F(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathfrak{L}$(f(t/a))= a F(aP) $\Rightarrow \mathfrak{L}(cos\frac{\omega t}{2}) = 2\frac{2p}{(2p)^2+\omega^2}$

EXO 4 :

a) $\mathrm{F(p)} = \frac{\mathrm{p+2}}{\mathrm{p(p+3)(p+4)}}$ On utilise le développement en éléments simples

$$\mathrm{F(p)} = \frac{\mathrm{p+2}}{\mathrm{p(p+3)(p+4)}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{p+3}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{p+4}}$$

$$A = \lim_{p\to 0} p\,F(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{\mathrm{p+2}}{\mathrm{p(p+3)(p+4)}} = 2/12$$

$$B = \lim_{p\to -3}(p+3)\,F(p) = \lim_{p\to -3}(p+3)\frac{\mathrm{p+2}}{\mathrm{p(p+3)(p+4)}} = 1/3$$

$$C = \lim_{p\to -4}(p+4)\,F(p) = \lim_{p\to -4}(p+4)\frac{\mathrm{p+2}}{\mathrm{p(p+3)(p+4)}} = -1/2$$

$$\mathrm{F(p)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{p}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{p+3}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{p+4}} = \frac{2/12}{\mathrm{p}} + \frac{1/3}{\mathrm{p+3}} + \frac{-1/2}{\mathrm{p+4}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{f(t)} = \left(\frac{2}{12}\right)\mathrm{u(t)} + \left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-3t} - \left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-4t}$$

b) $\mathrm{F(p)} = \frac{2p}{(p+3)(p+2)^2}$ On utilise la méthode des résidus

On a un pôle simple (P_1=-3) et un pôle double (p_2=p_3=-2)

Au pôle simple on aura

$$résidu_{\ p \to p_k} = \lim_{p \to p_k} (p - p_k)\frac{N(p)}{D(p)} e^{pt}$$

$$résidu_{p \to -3} = \lim_{p \to -3} (p+3)\frac{2p}{(p+2)^2(p+3)} e^{-3t} = -6\ e^{-3t}$$

Au pôle double on aura (m=2)

$$résidu_{\ p \to p_k} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} (p - p_k)^m \frac{N(p)}{D(p)} e^{pt}$$

$$residu_{p \to -2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \to 0} \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} [\ (p+2)^2 \frac{2p}{(p+2)^2(p+3)} e^{pt}]$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{d}{dp} \frac{2p}{(p+3)} e^{pt} = (6 - 4t)e^{-2t}$$

f(t) =∑ résidus = $-6e^{-3t} + (6 - 4t)e^{-2t}$