Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes
et Informatique
Département de Mathématiques

Master 1 EDP et Applications
Introduction aux opérateurs non bornés
2020/2021

TD 1

Exercice 1: Soit $E = \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \forall\, f \in E.$$

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ la forme définie par : $f \mapsto Tf = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

1. Montrer que T est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer que $\|T\|_{E'} = b - a$.

Exercice 2: Soit $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définit la forme $A : E \to \mathbb{R}$ par

$$A(f) = f(0), \quad f \in E.$$

1. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \forall\, f \in E.$$

   - Montrer que A est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

2. On munit cette fois E de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

   - Montrer que A n'est pas continue sur E.

   Indication: Raisonner par l'absurde et utiliser la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n(1-nt) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } t \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

3. En déduire que l'espace E n'est pas de dimension finie.

<u>Exercice 3</u>: Soit $E := \ell^2(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, muni de la norme $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Soit $A : E \to E$ l'application définie par :

$$x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto A(x) = \left(\frac{x_n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

   - Démontrer que $A \in \mathcal{L}(E)$ i.e. que A est une application linéaire continue sur E.

2. Pour tout entier $p \geq 1$, on définit lapplication $A_p : E \to E$ par

$$x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto A_p(x) = \left(\frac{x_1}{1^\alpha}, \frac{x_2}{2^\alpha}, ..., \frac{x_p}{p^\alpha}, 0, ...\right).$$

   - Montrer que A_p est un opérateur borné de rang fini pour tout $p \geq 1$.

3. Démontrer l'estimation suivante pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_2 \leq 1$:

$$\|A(x) - A_p(x)\|_2 \leq \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall p \geq 1.$$

4. En déduire que $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ dans $\mathcal{L}(E)$.

5. En déduire que A est un opérateur compact.

<u>Exercice 4</u>: Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\mathrm{Im}(A)$ est dense dans F, i.e. $\overline{\mathrm{Im}(A)} = F$. Supposons que:

$$\exists\, C > 0, \quad \|A(u)\|_F \geq C\,\|u\|_E \quad \forall\, u \in E.$$

1. Montrer que l'opérateur A est injectif.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans F.

3. En déduire que A est inversible.

Chargée du module: Pr. W. Chikouche