Chapitre 1

Rappels sur le calcul vectoriel et tensoriel

1. Calcul vectoriel

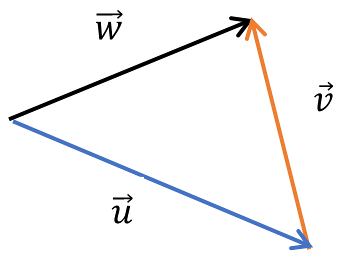
Pour représenter la réalité physique, les longueurs, les masses, les températures, les charges électrique sont représentées par des nombres appelés scalaires tandis que ces derniers ne peuvent pas complètement définir certaines grandeurs comme les vitesses, les forces, les couples et les champs électriques. Celles-ci sont décrites par des objets appelés vecteurs.

1.1. Vecteur

En termes simples, un vecteur est une grandeur qui a une intensité (longueur ou norme), une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche.

1.1.2 Addition vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est illustrée sur la figure ci-dessous.



1.1.3. Propriétés d'addition des vecteurs

L'addition de vecteurs est **commutative**. Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, alors

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

L'addition **a un élément neutre** : le vecteur nul.

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Enfin, si $\vec{u}$ est un vecteur, alors $-\vec{u}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\vec{u}$, mais de sens opposé.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

1.1.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Si λ et μ sont des réels ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, alors.

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$$

$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

$$1.\vec{u} = \vec{u}$$

$$0.\vec{u} = \vec{0}$$

1.1.4. Représentation des vecteurs

Un espace vectoriel sur R est un ensemble E de vecteurs.

Soit E_3 l'ensemble de $R^3 = \vec{u}(x, y, z)$; $x, y, z \in R$

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Si l'on pose $\vec{\imath} = (1,0,0)$ $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$

Alors $\vec{u}(x, y, z)$ s'écrit :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$est une base de E_3 et les nombres (x, y, z) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans cette base.

1.2. Produit scalaire

Si les longueurs et les angles peuvent être mesurés, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le scalaire :

$$\vec{u}.\vec{v} = u\, v \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Où u et v sont respectivement les longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En cas particulier, si $\vec{u} = \vec{v}$, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et $u = \sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}}$

1.2.1. Propriétés du produit scalaire

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

$$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$$

1.2.2. Base orthonormée

Etant donnés les vecteurs $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, tels que $\vec{u}.\vec{v}$=0

Alors, l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$ et

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$est orthonormée si et seulement si :

$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

$\|\vec{\imath}\|, \|\vec{\jmath}\|, \|\vec{k}\|$ représentent respectivement les longueurs des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Dans les bases orthonormées le produit scalaire se calcule simplement en fonction des composantes des vecteurs :

Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

En cas particulier :

$$\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.3. Produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Par définition, le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ dont la norme est :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u}.\vec{v})|$$

Sa direction est celle de la normale au plan déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.3.1. Propriétés du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Dans les bases orthonormées le produit vectoriel se calcule en fonction des composantes des vecteurs :

Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$,

On a :

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$; $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

Et $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$

Ainsi, on obtient en développant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{\imath} + (zx' - xz')\vec{\jmath} + (xy' - yx')\vec{k}$$

2. Calcul tensoriel

2.1. Tenseur d'ordre 0 et 1

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}.\vec{v}$ est un réel qui ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: c'est un exemple typique de quantité scalaire ou tenseur d'ordre 0. Par contre un vecteur est appelé tenseur d'ordre 1.

2.2. Définition des tenseurs comme applications linéaires

Partant des deux définitions précédentes, on définit les tenseurs par récurrence de la façon suivante : « un tenseur d'ordre $n \geq 1$; noté T^n; est une application linéaire qui à tout vecteur fait correspondre un tenseur d'ordre $n - 1$. »

2.3. Tenseur d'ordre 2

D'après la définition précédente, un tenseur d'ordre 2 est une application linéaire qui à tout vecteur fait correspondre un tenseur d'ordre 1, c'est-à-dire un vecteur.

Considérons une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Un tenseur d'ordre 2 est un être mathématique à 9 composantes. Il s'exprime par :

$$\bar{\bar{A}} = A_{ij}\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}$$

2.4. Etude des tenseurs d'ordre 2

2.4.1. Convention de sommation d'Einstein

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1,2,3.

Par exemple, $a_i b_j$ est la notation compacte pour $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

2.2 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

2.3. Tenseur identité

Le tenseur identité noté $\bar{\bar{I}}$ est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autrement dit $I_{ij} = \delta_{ij}$

2.4 Tenseur symétrique et antisymétrique

Un tenseur est symétrique s'il est égal à sa transposée :

$\bar{\bar{A}}$ symétrique $\Leftrightarrow$ $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}^T \Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji}$

Un tenseur est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de sa transposée :

$\bar{\bar{A}}$ antisymétrique $\Leftrightarrow$ $\bar{\bar{A}} = -\bar{\bar{A}}^T \Leftrightarrow A_{ij} = -A_{ji}$

Cela n'est possible que si les termes diagonaux de A sont nulles : $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Tout tenseur d'ordre 2, $\bar{\bar{A}}$ peut s'écrire comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}^{sym} + \bar{\bar{A}}^{asym}; \; \bar{\bar{A}}^{sym} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{A}}^T\right); \; \bar{\bar{A}}^{asym} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{A}}^T\right)$$

2.5. Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux :

$$Tr\bar{\bar{A}} = A_{ii}$$

3. Produit contracté

Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur ~b est un vecteur :

$$\bar{\bar{A}}.\vec{b} = \vec{c} \; ; \; A_{ij} b_j = c_i$$

On peut exprimer le produit contracté sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \\ A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \end{Bmatrix}$$

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}}.\bar{\bar{B}}$; $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$s = \bar{\bar{A}}:\bar{\bar{B}} = A_{ij}B_{ij} = A_{ij}{B_{ji}}^T = Tr(\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{B}})$$

4. Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{A}} = \vec{b}\otimes\vec{c}\,;\; A_{ij} = b_i c_j$$

Soient deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de R^3

Pour former les éléments du produit tensoriel $\left(\bar{\bar{T}} = \vec{x}\otimes\vec{y}\right)$, on peut associer deux par deux les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

$$[T] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}$$

4.1. Non commutativité du produit tensoriel.

$$\vec{b}\otimes\vec{c} \neq \vec{c}\otimes\vec{b}$$

4.2. Associativité du produit tensoriel.

$$\vec{a}\otimes\left(\vec{b}\otimes\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\otimes\vec{b}\right)\otimes\vec{c} = \vec{a}\otimes\vec{b}\otimes\vec{c}$$

4.3. Distributivité par rapport à l'addition vectorielle :

$$\vec{a}\otimes\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{a}\otimes\vec{c}$$

5. Représentation spectrale d'un tenseur

On dit que $\vec{v}$ est une direction principale (ou un vecteur propre) du tenseur $\bar{\bar{A}}$ d'ordre 2 si :

$$\bar{\bar{A}}.\vec{v} = \lambda.\vec{v}$$

La valeur λ est appelée valeur principale (ou valeur propre) de $\bar{\bar{A}}$. associée à la direction principale $\vec{v}$. Pour trouver$\vec{v}$, on écrit :

$$(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}).\vec{v} = 0\ ;\ (A_{ij} - \lambda\delta_{ij})v_j = 0$$

Ces équations constituent un système homogène de trois équations à trois inconnues v_1, v_2, v_3 qui n'admet de solution non triviale que si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule :

$$Det(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

L'équation ci-dessus donne trois racines $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$. On calcule les vecteurs propres correspondants.