TABLE DES MATIÈRES

Ce résumé de cours théorie des nombres 2 est destiné aux étudiants de la deuxième année Master Math. Fond. Disc. Je note que le résumé n'est pas dans sa forme finale, il va être complété et révisé (corrigé) aufur et à mesure.

CHAPITRE 1

PREMIÈRE PARTIE : RECHERCHE DE LA FORME DE WEIERSTRASS DES COURBES DÉFINIES PAR DES POLYNÔMES À DEUX INDÉTERMINÉES

Ce chapitre est consacré à la recherche des forme de Weierstrass des courbes

$$P(x, y) = 0$$

ou P est un polynôme à deux indéterminées définit sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

1.1 Algorithme de Cassels

Dans cette partie, on s'intéresse à la recherche d'une forme de Weierstrass d'une quartique.

Considérons la courbe C donnée par une quartique comme suit

$$C: \ y^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \tag{1.1}$$

On suppose que notre corps est tel que $car\,(K) \neq 2$, de plus on exige que a_4 est un carré dans le corps K.

Théorème 1.1.1 *La courbe affine de genre 1 d'équation (1.1) est birationnellement équivalente à la courbe E donnée par l'équation de Weierstrass*

$$Y^2 + 2g_1XY + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X.$$

où g_0, g_1, h_0, h_1 vérifient

$$\left(x^2 + g_1x + g_0\right)^2 + h_1x + h_0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Preuve. Sans predre de généralité, on peut supposé que upposons que $a_4 = 1$, sinon on divise par a_4. Posons

$$y^2 = G^2\left(x\right) + H\left(x\right),$$

ainsi

$$\left(y - G\left(x\right)\right)\left(y + G\left(x\right)\right) = H\left(x\right).$$

Posons

$$T = y + G\left(x\right),$$

on obtient

$$y - G\left(x\right) = \frac{H\left(x\right)}{T},$$

d'où

$$2G(x) = T - \frac{H(x)}{T}, \tag{1.2}$$

en multipliant l'égalité (1.2) par T^2 et en posant

$$S = Tx,$$

on obtient

$$2S^2 + 2g_1TS + h_1S = T^3 - 2g_0T^2 - h_0T.$$

Multiplions par 2^3 et posons

$$X = 2T \text{ et } Y = 4S,$$

nous obtenons la forme de Weierstrass

$$Y^2 + 2g_1XY + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X.$$

Les changements de passage d'une courbe à l'autre sont donnés par

$$\begin{cases} X = 2T = 2(y+G) = 2(y + x^2 + g_1x + g_0) \\ Y = 4S = 4x(y+G) = 4x(y + x^2 + g_1x + g_0) = 2xX. \end{cases}$$

■

Exemple 1.1.1 *En appliquant l'algorithme de Cassels, trouver une forme de Weierstrass pour la famille des courbes de genre 1 donnée par l'équation*

$$C : y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^3 = 0.$$

avec le paramètre $k \in \mathbb{Q}$. Il faut d'abord mettre notre équation sous la forme de l'equation (**??**)*. Pour cela, multipliant par* 4 *et complétant le carré en y, on obtient*

$$W^2 = x^4 + 2(k-2)x^3 + (k^2-10)x^2 + 2(k-6)x - 3,$$

avec

$$W = 2y + x^2 + kx + 1.$$

En écrivant

$$W^2 = (x^2 + g_1x + g_0)^2 + h_1x + h_0,$$

on obtient

$$g_1 = k - 2,\ g_0 = 2k - 7,\ h_1 = -4k^2 + 24k - 40,\ h_0 = -4k^2 + 28k - 52.$$

Ainsi la forme de Weierstrass est donnée par

$$Y^2 + 2(k-2)XY - 8(k^2 - 6k + 10)Y = X^3 - 4(2k-7)X^2 + 4k^2 - 28k + 52.$$

Les formules de passages d'une courbe à l'autre sont donnés par

$$X = 2(y + x^2 + (k-2)x + (2k-7)),\ Y = 4x(y + x^2 + (k-2)x + (2k-7)).$$

1.2 Algorithme de Harrache et Touafek

Rappelons que si

$$Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6 \tag{1.3}$$

est un modèle de Weierstrass pour une courbe elliptique E sur un corps K, la fonction X sur E possède (dans $\overline{K}$) deux zéros et un pôle double au point à l'infini $(\infty, \infty) = [0, 1, 0]$, tandis que la fonction Y possède (dans $\overline{K}$) trois zéros et un pôle triple en ce même point à l'infini.
En effet pour obtenir les zéros de la fonction X il suffit de poser $X = 0$ dans (1.3)ce qui donne

$$Y^2 + a_3Y = a_6.$$

Cette équation admet deux racines Y_1, Y_2, ainsi les éros de la fonction X sur E sont

$$(0, Y_1), (0, Y_2).$$

Pour obtenir les pôles de X, posons $X = \frac{1}{x}$ dans (1.3), ce qui donne

$$x^3(Y^2 + a_1\frac{Y}{x} + a_3Y) = 1 + a_2x + a_4x^2 + a_6x.$$

Posons $x = 0$,on obtient $1 = 0$, ce qui est impossible. Posons à nouveau $Y = \frac{1}{y}$ pour obtenir

$$x^3\left(1 + a_1\frac{y}{x} + a_3y\right) = y^2\left(1 + a_2x + a_4x^2 + a_6x^3\right).$$

Maintenant $x = 0$, implique que $y^2 = 0$, i.e.,

$$y = 0, 0 \Leftrightarrow Y = \infty, \infty.$$

En résumé, la fonction X sur E possè de deux pôles

$$(\infty, \infty), (\infty, \infty).$$

D'une manière analogue, on montre que la fonction Y admet trois zéros

$$(X_1, 0), \ (X_2, 0), \ (X_3, 0)$$

avec X_1, X_2, X_3 sont les racines de

$$X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6 = 0.$$

De plus la fonction Y possède trois pôles

$$(\infty, \infty), (\infty, \infty), (\infty, \infty).$$

Donc, lorsque la courbe de genre 1 (sur K) est donnée par un polynôme $F(x, y)$

du second degré en chaque indéterminée, chercher une forme de Weierstrass revient à trouver deux fonctions X et Y sur la courbe E avec X (resp.Y) possé dant un pôle double (resp.triple) en l'infini.

Soit $F(x, y)$ un polynôme (sur K) de degré 2 en chaque indéterminée qui est une équation pour une courbe de genre 1 (i.e., le discriminant par rapport à l'une des indéterminée est un polyôme de degré 3 ou 4).
Considérons la courbe $F(x, y) = 0$. En ordonnant le polynôme F par rapport à y puis par rapport à x, on trouve

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(ax^2+bx+c\right)y^2+\left(\acute{a}x^2+\acute{b}x+\acute{c}\right)y+\left(\acute{\acute{a}}x^2+\acute{\acute{b}}x+\acute{\acute{c}}\right) \\ &= \left(ay^2+\acute{a}y+\acute{\acute{a}}\right)x^2+\left(by^2+\acute{b}y+\acute{\acute{b}}\right)x+\left(cy^2+\acute{c}y+\acute{\acute{c}}\right) \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} M(x) &= ax^2+bx+c,\ N(x)=\acute{a}x^2+\acute{b}x+\acute{c},\ R(x)=\acute{\acute{a}}x^2+\acute{\acute{b}}x+\acute{\acute{c}}, \\ M_1(y) &= ay^2+\acute{a}y+\acute{\acute{a}},\ N_1(y)=by^2+\acute{b}y+\acute{\acute{b}},\ R_1(y)=cy^2+\acute{c}y+\acute{\acute{c}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(x) &= x^2M\left(\frac{1}{x}\right),\ \widetilde{N}(x)=x^2N\left(\frac{1}{x}\right),\ \widetilde{R}(x)=x^2R\left(\frac{1}{x}\right), \\ \widetilde{M}_1(y) &= y^2M_1\left(\frac{1}{y}\right),\ \widetilde{N}_1(y)=y^2N_1\left(\frac{1}{y}\right),\ \widetilde{R}_1(y)=y^2R_1\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Trois cas se présentent :

1.2.1 Cas 1 : Un des huit polynômes M, R, M_1, R_1, $\widetilde{M}$, $\widetilde{R}$, $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{R}_1$ a un degré nul.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que F s'écrit (sinon on change x en y, x en $\frac{1}{x}$ ou y en $\frac{1}{y}$) :

$$F(x,y) = \text{\H{a}}x^2 + \left(by^2 + \acute{b}y + \text{\H{b}}\right)x + \left(cy^2 + \acute{c}y + \text{\H{c}}\right) \tag{1.4}$$

$$F(x,y) = (bx + c)\,y^2 + \left(\acute{b}x + \acute{c}\right)y + \left(\text{\H{a}}x^2 + \text{\H{b}}x + \text{\H{c}}\right) \tag{1.5}$$

Notre courbe est de genre $g = 1$, il s'en suit que $b \neq 0$. En considérons la forme (1.5), on voit que y possède deux pôles simples, l'un pour $x = \frac{-c}{b}$ et l'autre noté A qui est un pôle de x. Maintenant, considérons la forme (1.4), on voit que x a un pôle double en A. En effet

$$F(x,y) = \text{\H{a}}x^2 + \left(by^2 + \acute{b}y + \text{\H{b}}\right)x + \left(cy^2 + \acute{c}y + \text{\H{c}}\right).$$

Pour $X = \frac{1}{x}$, on trouve que

$$F\left(\frac{1}{X}, y\right) = \text{\H{a}}\frac{1}{X^2} + \left(by^2 + \acute{b}y + \text{\H{b}}\right)\frac{1}{X} + \left(cy^2 + \acute{c}y + \text{\H{c}}\right)$$

i.e.,

$$\text{\H{a}} + \left(by^2 + \acute{b}y + \text{\H{b}}\right)X + \left(cy^2 + \acute{c}y + \text{\H{c}}\right)X^2 = 0$$

Posons $X = 0$, on obtient $\text{\H{a}} = 0$, mais cela est impossible. Posons à nouveau $y = \frac{1}{Y}$, on obient

$$\text{\H{a}}Y^2 + \left(b + \acute{b}Y + \text{\H{b}}Y^2\right)X + \left(c + \acute{c}Y + \text{\H{c}}Y^2\right)X^2 = 0.$$

Posons $X = 0$, on trouve $Y^2 = 0$. Ce qui donne

$$Y = 0,\, 0 \Leftrightarrow y = \infty,\, \infty.$$

C'est à dire la fonction x a un pôle double en $A = (\infty, \infty)$. Posons $y = \frac{1}{Y}$, on trouve

$$F\left(x, \frac{1}{Y}\right) = (bx + c) + \left(\acute{b}x + \acute{c}\right) Y + \left(\text{\H{a}}x^2 + \text{\H{b}}x + \text{\H{c}}\right) Y^2 = 0.$$

$Y = 0$, nous donne $x = \frac{-c}{b}$, i.e., y a le pôle $\left(\frac{-c}{b}, \infty\right)$. Posons $x = \frac{1}{X}$, on obtient

$$F\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\right) = \left(\text{\H{a}} + \text{\H{b}}X + \text{\H{c}}X^2\right) Y^2 + \left(\acute{b}X + \acute{c}X^2\right) Y + \left(bX + cX^2\right) = 0$$

Pour $Y = 0$ (i.e., $y = \infty$), on trouve $X = 0 \Leftrightarrow x = \infty$. Donc, y a un pôle simple qui est $A = (\infty, \infty)$, et la fonction

$$u = y\,(bx + c)$$

admet un pôle triple en A. Donc, en multipliant dans (1.5) par $(bx + c)$ puis en posant

$$X = -b\text{\H{a}}x,\ Y = b\text{\H{a}}u$$

on trouve la forme de Weierstrass suivante

$$Y^2 - \acute{b}XY + (\acute{c}b\text{\H{a}})Y = X^3 - (c\text{\H{a}} + b\text{\H{b}})X^2 + b\text{\H{a}}\,(c\text{\H{b}} + b\text{\H{c}})X - (b\text{\H{a}})^2c\text{\H{c}}$$

1.2.2 Cas 2 : Aucun des huits polynômes n'est constant mais l'un d'eux est de degré 1

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (bx + c)\,y^2 + \left(\acute{a}x^2 + \acute{b}x + \acute{c}\right) y + \left(\text{\H{a}}x^2 + \text{\H{b}}x + \text{\H{c}}\right) && (1) \\ &= (\acute{a}y + \text{\H{a}})\,x^2 + \left(by^2 + \acute{b}y + \text{\H{b}}\right) x + \left(cy^2 + \acute{c}y + \text{\H{c}}\right) && (2) \end{aligned}$$

avec $b\acute{a} \neq 0$. Dans ce cas, x et y ont chacun deux pôles distincts, de plus x et y ont un pôle simple commun A.
La fonction $X = (bx + c)\,(\acute{a}y + \text{\H{a}})$, aura donc un pôle double en A, (pôle simple de y).

Si on pose

$$X = (bx + c)\left(\acute{a}y + \text{\H{a}}\right),$$

alors $F(x, y) = 0$ s'écrit $G(X, y) = 0$ avec

$$\begin{aligned}
G(X, y) &= \left(b^2X + c^2\acute{a}^2 - cb\acute{a}\acute{b} + b^2\acute{a}\acute{c}\right)y^2 \\
&\quad + \left(\left(b\acute{b} - 2c\acute{a}\right)X + 2c^2\acute{a}\text{\H{a}} - bc\acute{b}\text{\H{a}} - bc\acute{a}\text{\H{b}} + b^2c\text{\H{a}} + b^2\acute{a}\text{\H{c}}\right)y \\
&\quad + \left(X^2 + \left(b\text{\H{b}} - 2c\text{\H{a}}\right)X + c^2\text{\H{a}}^2 - bc\text{\H{a}}\text{\H{b}} + b^2\text{\H{a}}\text{\H{c}}\right) \\
&= X^2 + \left(b^2y^2 + \left(b\acute{b} - 2c\acute{a}\right)y + \left(b\text{\H{b}} - 2c\text{\H{a}}\right)\right)X \\
&\quad + \left(b^2\acute{a}\acute{c} + c^2\acute{a}^2 - cb\acute{a}\acute{b}\right)y^2 + \left(2c^2\acute{a}\text{\H{a}} - bc\acute{b}\text{\H{a}} - bc\acute{a}\text{\H{b}} + b^2c\text{\H{a}} + b^2\acute{a}\text{\H{c}}\right)y \\
&\quad + \left(c^2\text{\H{a}}^2 - bc\text{\H{a}}\text{\H{b}} + b^2\text{\H{a}}\text{\H{c}}\right).
\end{aligned}$$

Il est claire qu'on est dans le cas 1 de l'algorithme.

1.2.3 Cas 3 : Les huits polynômes sont de degré 2

Encore ici, on a deux cas :

La courbe affine définie par $F(x, y) = 0$ a un point $(x_0, y_0) \in K^2$

On peut supposer que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, (sinon on change x resp. y en $x - x_0$ resp. $y - y_0$), cela donne $\text{\H{c}} = 0$. Les changements

$$U = \frac{1}{x},\ V = \frac{1}{y},$$

nous donne

$$\begin{aligned}
(c + \acute{c}V)U^2 + \left(\text{\H{b}}V^2 + \acute{b}V + b\right)U + \left(\text{\H{a}}V^2 + \acute{a}V + a\right) &= 0 \\
\left(\text{\H{a}} + \text{\H{b}}U\right)V^2 + \left(\acute{c}U^2 + \acute{b}U + \acute{a}\right)V + \left(cU^2 + bU + a\right) &= 0
\end{aligned}$$

et on est dans le cas 1 ou bien le cas 2 de l'algorithme.

La courbe F a un point $K-$rationnel à l'infini

Si la courbe projective d'équation affine $F(x,y)=0$ a un point $K-$rationnel à l'infini, alors c'est le point double $(1,0,0)$ (ou $(0,1,0)$) et les tangentes au point $(1,0,0)$ (ou $(0,1,0)$) sont rationnelles. Il en résulte que le polynôme M a une racine $x_1 \in K$ (ou le polynôme M_1 a une racine $y_1 \in K$). Le changement de variable

$$U = \frac{1}{x-x_1} \text{ (on peut poser } V = \frac{1}{y-y_1}\text{)}$$

transforme l'équation $F(x,y)=0$ en

$$\begin{aligned} & y^2(a+U(2ax_1+b)) + y(\acute{a}+U(2\acute{a}x_1+\acute{b}) + U^2(\acute{a}x_1^2+\acute{b}x_1+\acute{c})) \\ & + \H{a} + U(2\H{a}x_1+\H{b}) + U^2(\H{a}x_1^2+\H{b}x_1+\H{c}) \\ = \ & U^2(\H{a}x_1^2+\H{b}x_1+\H{c}+y(\acute{a}x_1^2+\acute{b}x_1+\acute{c})) \\ & + U((2ax_1+b)y^2+(2\acute{a}x_1+\acute{b})y+2\H{a}x_1+\H{b}) + ay^2+\acute{a}y+\H{a} = 0. \end{aligned}$$

et à nouveau on est dans le cas 1 ou bien le cas 2 de l'algorithme.

Exemple 1.2.1 *Une forme de Weierstrass de la La famille des courbes C_k definie par*

$$P_1(x,y) = xy^2 + (x^2+kx+1)y + (x+1)^2 = 0, \ k \in \mathbb{Z}.$$

est donnée par

$$E_k : Y^2 - kYX + 2Y = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3.$$

En effet, on ordonnant par rapport à y puis à x, on obtient

$$P_1(x,y) \ = xy^2 + (x^2+kx+1)y + (x+1)^2 \ = (y+1)x^2 + (y^2+ky+2)x + (y+1) = 0.$$

Il est claire qu'on est dans le cas 2 de l'algorithme. Le changement $X = x(y+1)$ ramène notre *courbe à la courbe*

$$\begin{aligned}\acute{P}_1\,(X,y) &= (X+1)y^2 + (kX+2)y + (X^2+2X+1)\\ &= X^2 + (y^2+ky+2)X + (y+1)^2 = 0\end{aligned}$$

qui est sous la forme du cas 1 de l'algorithme. Posons à nouveau $Y = y(X+1)$, *puis en changeant X par -X, on obtient la forme de Weierstrass*

$$Y^2 - kXY + 2Y = (X-1)^3.$$

les formules de passages entre C_k *et* E_k *sont*

$$x = \frac{X(X-1)}{Y-X+1},\ y = \frac{-Y}{X-1}.$$

CHAPITRE 2

DEUXIÈME PARTIE : MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES

2.1 Généralités

Définition 2.1.1 *La mesure de Mahler logarithmique d'un polynôme de Laurent* $P \in \mathbb{C}\left[x_1,\ x_1^{-1}, \ldots,\ x_n,\ x_n^{-1}\right]$ *notée* $m(P)$ *est donnée par*

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \ldots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n},$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \ldots,\ x_n) \in \mathbb{C}^n :\ |x_1| = \ldots = |x_n| = 1\}$$

est le tore complexe. La mesure de Mahler notée $M(P)$ *est par définition la quantitée*

$$M(P) = e^{(m(P))}.$$

Remarque 2.1.1 $\log := ln$. *La mesure de Mahler d'un polynôme de à plusieurs indéterminées a été introduite en 1962 par K. Mahler.*

Proposition 2.1.1 *Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, alors*

$$\begin{aligned} & m\left(P.Q\right) = m\left(P\right) + m\left(Q\right), \\ & m\left(P\left(x, y\right)\right) = m\left(P\left(\pm x^{\pm j} y^{\pm k}, \ \pm x^{\pm m} y^{\pm n}\right)\right), \ j, \ k, \ m, \ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 *Si on pose $x_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1, ..., n$, alors*

$$m\left(P\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^n} \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} \log(|P(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n})|) d\theta_1 ... d\theta_n.$$

Le théorème suivant , dit Lemme de Jensen, sera trés utile.

Théorème 2.1.3 ***Lemme de Jensen*** *Soit $f = f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité avec $f(0) \neq 0$. Supposons que i α_i, $i = 1?..., k$ sont les zéros de $f(z)$ dans $|z| \leq 1$ comptés avec leurs multiplicités, alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta = \log\left|f\left(0\right)\right| - \sum_{j=1}^{k} \log\left|\alpha_j\right|.$$

Exemple 2.1.1 *Calculer la mesure de Mahler du polynôme*

$$P(x) = ax + b, \ a, \ b \in \mathbb{C}.$$

On a

$$m\left(P\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \log(|P(x)|) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log(|P(x)|) \frac{dx}{x}.$$

Posons $x = e^{i\theta}$, on obtient

$$m\left(P\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|P(e^{i\theta})|) d\theta.$$

Si $a = 0$, $b \neq 0$, alors

$$m(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(|b|)d\theta = \log(|b|).$$

Si $b = 0$, $a \neq 0$, alors

$$m(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(|ae^{i\theta}|)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(|a|)d\theta = \log(|a|).$$

Supposons maintenant que $a.b \neq 0$. Posons $f(x) = ax + b$, on a $f(0) = b \neq 0$, f holomorphe. f a une seul racine $\alpha = -\frac{b}{a}$. Aisi d'aprés le Lemme de Jensen

$$m(P) = \log(|f(0|), \, |b| > |a|, \, m(P) = \log(|f(0|) - \log(|\frac{b}{a}|), \, |b| \leq |a|,$$

ainsi

$$m(P) = \log(|b|), \, |b| > |a|, \, m(P) = \log(|a|), \, |b| \leq |a|,$$

Exercice 2.1.1 *Supposons que*

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)...(x - \alpha_k), \, a_0 \neq 0.$$

Montrer que

$$M(P) = |a_0| \prod_{j=1}^{k} (\max(|\alpha_j|, 1)).$$

2.2 Quelques résultats sur la minorations de la mesure de Mahler d'un polynôme à une seule indéterminée : résultats de V. Flammang

Définition 2.2.1 *Un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ est dit totalement positif (resp. totalement réel) si toutes ses racines sont réelles positives (resp. réelles).*

Théorème 2.2.1 *Soit c un réel, $0 < c < \frac{1}{2}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement* *positif non divisible par x et $x-1$. Alors*

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^d .$$

Preuve. Soient c, $0 < c < \frac{1}{2}$ et f la fonction définie pour $x > 0$, $x \neq 1$ par

$$f(x) = \log^+ x - (c \log x + (1-2c) \log |x-1|),$$

avec

$$\log^+ x = \log \max(1, x).$$

Supposons que $\min\limits_{x>0} f(x) = m$. Soient $(\alpha_i)_{(1 \leq i \leq d)}$ les racines de P. Alors

$$f(\alpha_i) \geq m, \quad 1 \leq i \leq d,$$

d'où

$$\log^+ \alpha_i \geq c \log \alpha_i + (1-2c) \log |\alpha_i - 1| + m, \;\; 1 \leq i \leq d.$$

En sommant sur i, on trouve

$$\sum_{i=1}^{d} \log^+ \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{d} \log \alpha_i^c + \sum_{i=1}^{d} \log |\alpha_i - 1|^{1-2c} + dm,$$

d'où

$$\log \prod_{i=1}^{d} \max(1, \alpha_i) \geq \log \left(\prod_{i=1}^{d} \alpha_i \right)^c + \log \left(\prod_{i=1}^{d} |\alpha_i - 1| \right)^{1-2c} + dm,$$

donc

$$\prod_{i=1}^{d} \max(1, \alpha_i) \geq \left(\prod_{i=1}^{d} \alpha_i \right)^c \times \left(\prod_{i=1}^{d} |\alpha_i - 1| \right)^{1-2c} \times e^{dm}. \tag{2.1}$$

En écrivant P sous la forme

$$P(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_d),$$

nous obtenons

$$|P(0)| = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i, \quad |P(1)| = \prod_{i=1}^{d} |1 - \alpha_i|. \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2) on obtient

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times e^{dm}. \tag{2.3}$$

Maintenant on détermine m. Pour $x > 0$, $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \log^+\left(\frac{1}{x}\right) + c\log x - (1-2c)\log|1-x| + (1-2c)\log x \\ &= -(1-2c)\log|1-x| - c\log x + \log x + \log^+\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \log x + \log^+\left(\frac{1}{x}\right) &= \log x + \log\max\left(1, \frac{1}{x}\right) \\ &= \begin{cases} \log x, & x > 1 \\ \log 1 = 0, & x < 1 \end{cases} \\ &= \log^+ x, \end{aligned}$$

donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

ce qui permet de restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0,1[$. Sur $]0,1[$, f s'écrit

$$f(x) = -(c\log x + (1-2c)\log(1-x)).$$

On a

$$f'(x) = \frac{(1-c)x - c}{x(1-x)}.$$

Par conséquent f' admet une unique racine $\frac{c}{1-c} \in]0,1[$ et f y atteint son minimum m, car $f''(\frac{c}{1-c}) = \frac{(1-c)^3}{c(1-2c)} > 0$. On a

$$\begin{aligned} m &= f\left(\frac{c}{1-c}\right) = -c\log(\frac{c}{1-c}) - (1-2c)\log\left(1-\frac{c}{1-c}\right) \\ &= \log\left(\frac{(1-c)^c}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant par la valeur de m dans (2.3), nous obtenons

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times \left(\frac{(1-c)^c}{c^c.(1-2c)^{1-2c}}\right)^d.$$

■

Théorème 2.2.2 *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif, non divisible par x et $x-1$ et tel que $|P(1)| \geq 1$. Alors*

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}{2}.$$

Preuve. Le théorème précédent, nous donne

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}}\right)^d = \left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c.(1-c)}\right)^d\right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c}\right)^d. \tag{2.4}$$

On veut déterminer c de sorte que l'expression

$$\left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)}\right)^d\right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c}\right)^d,$$

soit la plus grande possible. Pour cela, nous étudions la fonction g définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par

$$g(c) = c\log|P(0)| + d\left((1-c)\log(1-c) - c\log c - (1-2c)\log(1-2c)\right).$$

Sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} g'(c) &= \log|P(0)| + d\left(-\log(1-c) - 1 - \log c - 1 + 2\log(1-2c) + 2\right) \\ &= \log\left(|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)}\right)^d\right). \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'équation $g'(c) = 0$, a seulemt une racine

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}},$$

et g y atteint son maximum, car

$$g''\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}\right) = \frac{-d}{c(1-c)(1-2c)} < 0, \quad \forall c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

En remplaçant cette valeur de c dans l'expression(2.4) et en tenant compte du fait que

$$|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)}\right)^d = 1,\ c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}},$$

on obtient

$$M(P) \geq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}}{\frac{1}{\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}}\right)^d,$$

d'où

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2}.$$

■

2.3 Quelques résultats sur la q-mesure de Mahler : résultats de N. Kurokawa

Soit q un réel strictement supérieur à 1, on définit la fonction q-logarithme notée $l_q(x)$ par

$$l_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{[n]_q}, \quad |x-1| < q,$$

avec

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + ... + q^n.$$

Remarque 2.3.1 *Si $q \downarrow 1$, alors*

$$\lim_{q \downarrow 1} [n]_q = n,$$

et donc

$$\lim_{q \downarrow 1} l_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = \log x.$$

Exercice 2.3.1 *Montrer que*

$$l_q(x) = (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x-1+q^m}.$$

Définition 2.3.1 *Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ un polynôme. La q-mesure de Mahler de f, notée $m_q(f)$ est définie par*

$$m_q(f) = \int_0^1 ... \int_0^1 l_q \left| f\left(e^{2\pi i\theta_1}, ..., e^{2\pi i\theta_n}\right)\right| d\theta_1 ... d\theta_n,$$

$$m_q(f) = \Re(\left(\int_0^1 ... \int_0^1 l_q\left(f\left(e^{2\pi i\theta_1}, ..., e^{2\pi i\theta_n}\right)\right) d\theta_1 ... d\theta_n\right)).$$

Théorème 2.3.2 *On a*

$$m_q(x+a) = l_q(a), \qquad a > 1.$$

Preuve. *Par définition*

$$m_q(x+a)=\Re\Big(\int_0^1 l_q\left(e^{2\pi i\theta}+a\right)d\theta\Big)=(q-1)\,\Re\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{e^{2\pi i\theta}+a-1}{e^{2\pi i\theta}+a-1+q^m}d\theta\Big).$$

Posons

$$z=e^{2\pi i\theta},$$

ainsi

$$d\theta=\frac{dz}{2\pi i z},$$

et donc

$$m_q(x+a)=(q-1)\,\Re\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)\,z}dz\right),$$

avec

$$\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|=1\}.$$

Notons que $a>1$ *implique que* $z+a-1+q^m\neq 0$ *dans* $|z|\leq 1$. *Alors par le théorème des résidus*

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)\,z}dz &= 2\pi i\,Res\left(\frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)\,z},\ 0\right)\\ &= \frac{a-1}{a-1+q^m}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$m_q(x+a)=(q-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a-1}{a-1+q^m}=l_q(a).$$

■

Théorème 2.3.3 *On a*

$$m_q((x+a)(x+b))=l_q(ab),\quad a,\ b>1.$$

Preuve. Exercice. ■

2.4 Sur la mesure de Mahler des polynômes à deux indéterminnées : le résultat de Symth

Définition 2.4.1 *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,\ 1\}$, le dilogarithme de Bloch et Wigner est défini par*

$$\begin{aligned} D(z) &= \Im\left(L_{i_2}(z) + \log|z| \log(1-z)\right) \\ &= \Im\left(L_{i_2}(z)\right) + \log|z| \arg(1-z), \quad \arg(1-z) \in [-\pi,\ \pi], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L_{i_2}(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, \qquad |z| < 1 \\ &= -\int_0^z \log(1-u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *Le dilogarithme de Bloch et Wigner s'étend en une fonction univaluée, analytique, réelle dans $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,\ 1,\ \infty\}$ et continue dans $P^1(\mathbb{C})$, avec*

$$D(0) = D(1) = D(\infty) = 0.$$

Proposition 2.4.1 *On a les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} D(\bar{z}) &= -D(z), \\ D(z) &= D\left(\frac{z-1}{z}\right) = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = -D\left(\frac{1}{z}\right) = -D(1-z) = -D\left(\frac{z}{z-1}\right), \\ D(z^n) &= n \sum_{k=0}^{n-1} D\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}} z\right), \\ dD(z) &= -\log|1-z|\, d\arg z + \log|z|\, d\arg(1-z). \end{aligned}$$

Définition 2.4.2 *La fonction régulateur notée $\eta_2(2)$, est la forme différentielle*

$$\eta_2(2)(x,\ y) = i \log|x|\, d\arg y - i \log\left|y\right| d\arg x.$$

Proposition 2.4.2 *On a les propriétés suivantes*

$$\eta_2(2)(xy,\ z) = \eta_2(2)(x,\ z) + \eta_2(2)(y,\ z),$$

$$\eta_2(2)(y,\ x) = -\eta_2(2)(x,\ y),$$
$$\eta_2(2)\left(\frac{1}{x},\ y\right) = -\eta_2(2)(x,\ y),$$
$$\eta_2(2)\left(x,\ \frac{1}{y}\right) = -\eta_2(2)(x,\ y),$$
$$\eta_2(2)(x,\ 1-x) = idD(x),$$
$$\eta_2(2)(x,\ 1+x) = idD(-x),$$

Remarque 2.4.2 *Soit $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme en deux indéterminnées, alors on peut le regarder comme un polynôme d'une seule indéterminnée y avec des coefficients des coefficients polynomials en x et cela en l'écrivant*

$$P(x, y) = a(x) \prod_{j=1}^{k} (y - y_j(x))$$

avec $y_j(x),$, $j = 1, ..., k$, sont fonctions algébriques de x. Avec la formule de Jensen, en calculant l'intégrale par rapport a y dans l'expression de $m(P)$, on obtient

$$m(P) = m(a(x)) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log^+ |y_j(x)| \frac{dx}{x}.$$

Théorème 2.4.3 ***(Formule de Smyth)*** *On a*

$$m(1 + x + y) = d_3,$$

avec

$$\begin{array}{ll} d_3 & := L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2)\,, \\ L(\chi_{-3}, 2) & = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\chi_{-3}(n)}{n^2}, \\ \chi_{-3}(n) & = \begin{cases} 0 & n \equiv 0\,[3] \\ 1 & n \equiv 1\,[3] \\ -1 & n \equiv 2\,[3]\,. \end{cases} \end{array}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} m(1+x+y) &= m(1-x-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log\left|1-x-y\right| \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Jensen, on trouve

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log^+ |1-x| \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \log\left|y\right| \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \eta_2(2)(x,\ y)\,, \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma = \left\{(x,\ y)\,/\,1-x-y=0,\ \ |x|=1,\ \ \left|y\right| \geq 1\right\}.$$

Comme

$$y = 1-x,$$

alors

$$\eta_2(2)(x, 1-x) = idD(x)\,,$$

et donc

$$m(P) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\hat{D}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} dD(x)\,, \tag{2.5}$$

et

$$\Gamma = \{x;\ \ |x| = 1,\ \ |1-x| \geq 1\}\,.$$

C'est la portion du cercle unité allant du point $-\bar{j}$ au point $-j$. En effet en écrivant $x = a + ib$, on trouve que Γ est l'intersection des deux ensembles

$$\left\{a^2 + b^2 = 1\right\}, \ \left\{(a-1)^2 + b^2 \geq 1\right\}.$$

Ainsi l'expression (2.5) revient

$$\begin{aligned} m(P) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\bar{j}}^{-j} dD(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(D(-j) - D\left(\overline{-j}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}D(-j). \end{aligned} \tag{2.6}$$

On a

$$\begin{aligned} D\left(j^2\right) &= 2\sum_{k=0}^{1} D\left(e^{\frac{2\pi i k}{2}} j\right) \\ &= 2\left(D(j) + D(-j)\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D(-j) &= \frac{1}{2}D\left(j^2\right) - D(j) \\ &= \frac{1}{2}D(\bar{j}) - D(j) \\ &= -\frac{3}{2}D(j). \end{aligned}$$

En remplaçant cette valeur dans (2.6) on obtient

$$m(P) = \frac{3}{2\pi}D(j).$$

Par la formule de Bloch on a

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3}{4\pi}\sum_{m=1}^{3}\chi_{-3}(m)D(\zeta_3^m),$$

avec ζ_3 désigne la racine troisième de l'unité, i.e.,

$$j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ainsi

$$d_3 = \frac{3}{2\pi} D\left(j\right),$$

et donc

$$m\left(P\right) = d_3.$$

■

Exercice 2.4.1 *Calculer la mesure de Mahler logarithmique des polyômes suivants.*

1. $P(x, y) = y + x + 3.$
2. $P(x, y) = x^2 y + x^3 + x.$