Chapitre 2

Tenseur des contraintes

L'élasticité s'intéresse principalement à l'étude des déplacements, des déformations et des contraintes générés dans les matériaux solides soumis à des sollicitations externes dans un domaine dit élastique. Dans ce domaine, le matériau déformé sous l'effet d'un effort externe reprend sa forme initiale une fois cet effort annulé.

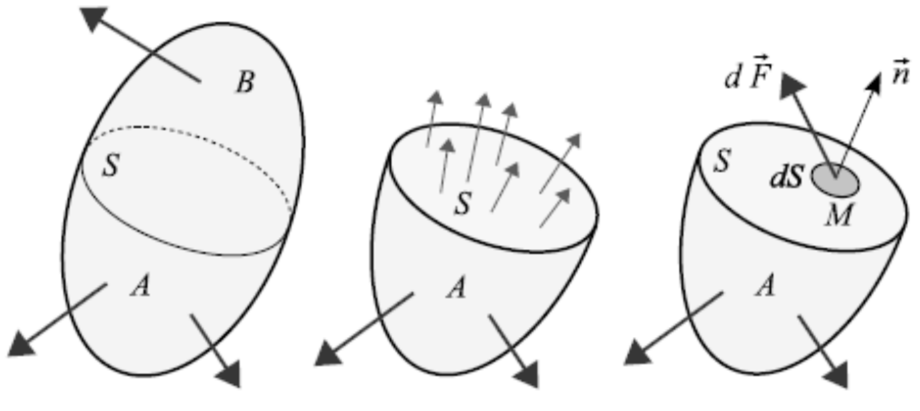
1. Coupure, facette et vecteur contrainte

1.1. Coupure

L'application de sollicitations mécaniques sur un solide génère des efforts internes. Ces efforts équilibrent les sollicitations appliquées sur la frontière extérieure du solide et assurent ainsi la conservation de l'intégrité du matériau. L'approche de la coupe fictive permet de déterminer ces efforts internes.

Considérons donc un solide occupant un domaine (D). En chaque point M de ce solide, il existe des forces internes que l'on peut déterminer en effectuant une coupure du solide, par une surface S, en deux parties A et B.

La partie A est en équilibre sous l'action des forces externes qui lui sont appliquées et des forces internes réparties sur la coupure.



Soit dS un élément infinitésimal de la surface S autour su pont M. Le vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire en M à *S* et dirigé vers l'extérieur de la partie A est appelé **facette** en M.

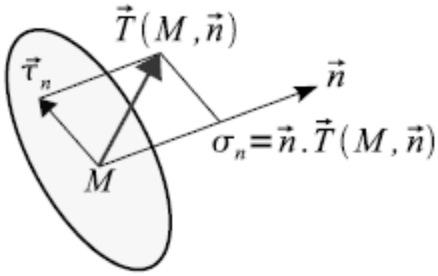
1.2. Vecteur contrainte

Soit $\overrightarrow{dF}$ la force qui exercée sur la facette $\vec{n}$. Le **vecteur contrainte** $T(M)$ sur la facette $\vec{d}S$ en *M*, s'exprime par :

$$\vec{T}(M) = \overrightarrow{dF}/dS$$

Le vecteur contrainte peut être décomposé suivant $\vec{n}$ en ses composantes normale σ et tangentielle $\vec{\tau}$.

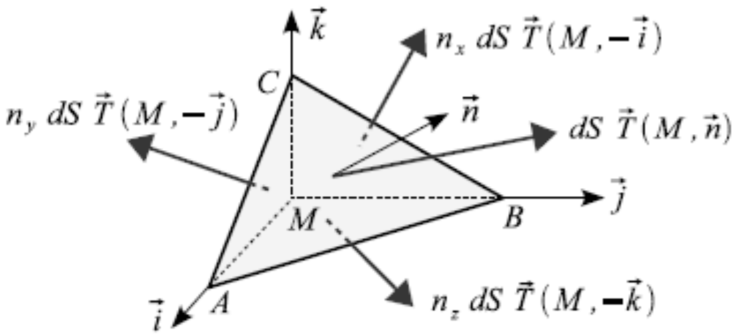
$$\vec{T}(M) = \sigma\vec{n} + \vec{\tau}$$



2. Formule de Cauchy

2.1. Equilibre d'un tétraèdre

Soit $MABC$ un tétraèdre infiniment petit établi sur les axes x, y et z. Soit $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC et dS l'aire du triangle ABC.



Les fonctions du produit vectoriel nous permettent d'écrire :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2dS\vec{n}$$

$$= 2dSn_x\vec{\imath} + 2dSn_y\vec{\jmath} + 2dSn_z\vec{k}$$

$$= \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$$

En développant, on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\, aire\, (MBC)\vec{\imath} + 2\, aire\, (MAC)\vec{\jmath} + 2\, aire\, (MAB)\, \vec{k}$$

On en déduit par identification :

$$aire(MBC) = n_x dS, aire(MAC) = n_y dS, aire(MAB) = n_z dS$$

Sous les forces qui lui sont appliquées, l'équilibre du tétraèdre s'écrit :

$$dS\, \vec{T}(M,\vec{n}) + n_x\, dS\vec{T}(M,-\vec{\imath}\,) + n_y\, dS\vec{T}(M,-\vec{\jmath}\,) + n_z\, dS\vec{T}(M,-\vec{k}\,) = \vec{0}$$

En divisant par dS, on obtient l'équation sous forme matricielle :

$$\{T(M,\vec{n})\} = \left[T(M,\vec{\imath}\,) \quad T(M,\vec{\jmath}\,) \quad T(M,\vec{k}\,)\right]\{n\}$$

2.2. Tenseur des contraintes

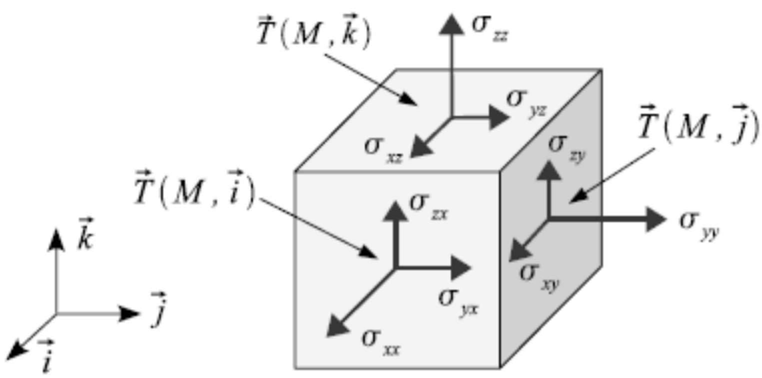
De l'équation ci-dessus, on peut écrire la formule de cauchy :

$$\{T(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$$

Où $[\sigma(M)]$ est le tenseur des contraintes de Cauchy en M. Ses composantes dans le repère $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$ sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy peut être représenté par :



3. Equations d'équilibre

En désignant par $\vec{f}$ les efforts volumiques appliquées au point de coordonnées (x,y,z) du solide, par $\vec{\gamma}$ l'accélération de ce point et par ρ la masse volumique du matériau, la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède infiniment petit, de centre M et de cotés dx, dy et dz s'écrit :

$$\begin{gathered} -\sigma_{xx}(x,y,z)\,dy\,dz + \sigma_{xx}(x+dx,y,z)\,dy\,dz \\ -\sigma_{xy}(x,y,z)\,dx\,dz + \sigma_{xy}(x,y+dy,z)\,dx\,dz \\ -\sigma_{xz}(x,y,z)dx\,dy + \sigma_{xz}(x,y,z+dz)dx\,dy \\ + f_x\,dx\,dy\,dz \end{gathered}$$

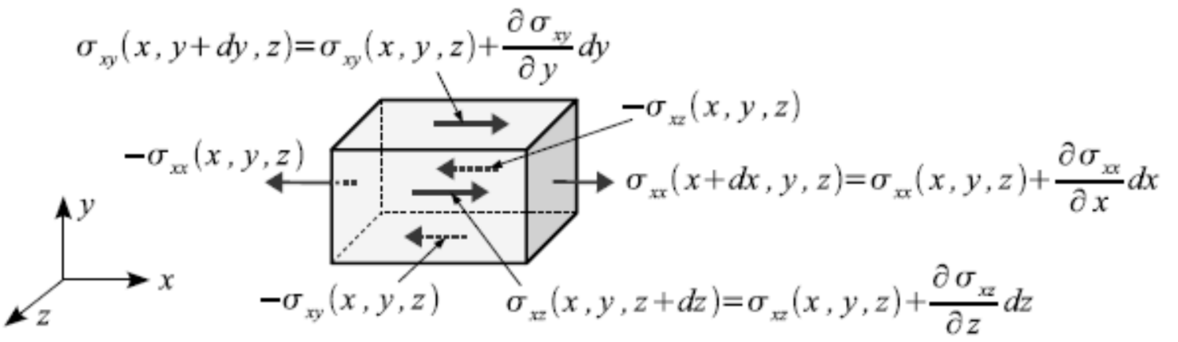
On obtient après simplification l'équation de la dynamique :

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho\gamma_x$$

En procédant de la même façon pour les axes y et z, on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z$$



L'équilibre en rotation du parallélépipède met en évidence la réciprocité des contraintes tangentielles.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}\ ;\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx}\ ;\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Le tenseur des contraintes est ainsi symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

4. Contraintes principales et directions principales

Les contraintes principales sont les valeurs propres du tenseur des contraintes. Il existe donc en *M* un repère orthonormé $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ tel que sur les facettes $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ le vecteur cisaillement soit nul.

Les directions $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ sont les directions principales.

Le tenseur des contraintes principales s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales sont donc solutions de l'équation caractéristique :

$$P(\sigma_p) = det(\sigma(M) - \sigma_p[I]) = 0$$

Soit :

$$det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_1 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_3 \end{bmatrix} = 0$$

L'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$-\sigma_p{}^3 + I_1\sigma_p{}^2 - I_2\sigma_p + I_3$$

Où I_1, I_2, I_3 sont les invariants scalaires des contraintes. Ils sont donnés par :

$$I_1 = tr[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((tr[\sigma])^2 - tr[\sigma]^2) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}{}^2 - \sigma_{xz}{}^2 - \sigma_{yz}{}^2$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}{}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}{}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}{}^2$$

$$= \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Les contraintes principales doivent vérifier la relation suivante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

En associant à chaque contrainte principale$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$une direction principale $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3})$, on peut écrire :

$$([\sigma] - \sigma_1[I])\{n_1\} = 0$$

$$([\sigma] - \sigma_2[I])\{n_2\} = 0$$

$$([\sigma] - \sigma_3[I])\{n_3\} = 0$$

5. Tenseurs sphérique et déviateur

Le tenseur des contraintes peut se décomposer en une somme de deux vecteurs :

- Un vecteur sphérique $[\sigma_S]$dans leuel toute contrainte normale est égale$(tr[\sigma]/3)$ et toute contrainte tangentielle est nulle.

- Un tenseur déviateur $[\sigma_D]$apportant le complément de contraintes.

Ainsi, on écrit :

$$[\sigma] = [\sigma_S] + [\sigma_D]$$

$$[\sigma] = \left(\frac{tr[\sigma]}{3}\right) + ([\sigma] - [\sigma_S])$$