Université de Jijel - Faculté des Sciences exactes et informatique

Département de Physique

$3^{ème}$ Licence Physique Fondamentale. (2020/2021).

Module: Relativité restreinte.

TD (01) " Cinématique relativiste "

Ex. (1) :

Soient deux référentiels inertiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ où $(\mathcal{R}')$ est en translation uniforme par rapport à $(\mathcal{R})$ avec une vitesse V. En mécanique relativiste, les lois de transformations spatio-temporelles entre ces deux référentiels sont du type :

$$x' = K(x - Vt), \quad y' = y$$
$$z' = z, \qquad t' = L(t - Mx)$$

Utiliser la propriété d'invariance du carré de l'intervalle ds^2 pour déterminer K, L et M en fonction de V et de c.

Ex. (2) :

Une barre immobile dans le référentiel inertiel $(\mathcal{R}')$ et placée selon la direction $(O'x')$ mesure une longueur ℓ_0 dans $(\mathcal{R}')$. Un observateur de $(\mathcal{R})$ donne une mesure $\ell_0/3$ de la barre. Quelle est la vitesse relative des deux référentiels ?

Ex. (3):

On observe qu'une horloge dans un vaisseau spatial indique un temps égale à $3/5$ de celui indiqué par une horloge similaire restée sur Terre. A quelle vitesse le vaisseau se déplace-t-il ?

Ex. (4):

Deux vaisseaux spatiaux A et B se déplacent à droite et à gauche avec des vitesses de $0,8c$ et $-\ 0,6c$ respectivement observées par un observateur sur terre.

i) Quelle est la vitesse du vaisseaux B par rapport à A du point de vue de Galilée.

ii) Quelle est la vitesse du vaisseaux B par rapport à A en relativité restreinte.

Ex. 05 :

Un vaisseau spatial s'éloigne de la Terre avec une vitesse rectiligne uniforme. On veut calculer la vitesse V que devrait se déplacer ce vaisseau pour qu'un observateur terrestre perçoive rouge la lumière émise par ses feux arrières verts. Soit $(\mathcal{R})$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $(\mathcal{R}')$ le référentiel propre du vaisseau spatial. Pour simplifier, on prend $\overrightarrow{V}$ suivant l'axe Ox.

1) Écrivez les composantes du 4-vecteur d'onde $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k})$ dans les deux référentiels.

2) Soit λ' la longueur d'onde de la lumière émise par rapport à $(\mathcal{R}')$ et λ la longueur d'onde par rapport à $(\mathcal{R})$. Montrer que $\lambda' = f(\beta)\,\lambda$ où $f(\beta)$ est une fonction de $\beta = V/c$ à déterminer.

3) En déduire la vitesse du vaisseau spatial par rapport au référentiel terrestre $(\mathcal{R})$.

On prendra pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,7\ \mu m$ pour la radiation rouge et $\lambda' = 0,5\ \mu m$ pour la radiation verte.

Solution

Ex. 01 :

L'intervalle ds^2 est:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

La condition d'invariance implique :

$$ds^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

$$ds^2 = c^2L^2\left(dt - Mdx\right)^2 - K^2\left(dx - Vdt\right)^2 - dy^2 - dz^2$$

$$ds^2 = c^2L^2\left(dt^2 + M^2dx^2 - 2Mdxdt\right) - K^2\left(dx^2 + V^2dt^2 - 2Vdxdt\right) - dy^2 - dz^2$$

$$ds^2 = \left(c^2L^2 - K^2V^2\right)dt^2 - \left(K^2 - c^2L^2M^2\right)dx^2 + 2\left(K^2V - c^2L^2M\right)dxdt - dy^2 - dz^2 \quad (2)$$

Comparons (1) et (2), on obtient ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} c^2L^2 - K^2V^2 = c^2 & (3) \\ K^2 - c^2L^2M^2 = 1 & (4) \\ K^2V - c^2L^2M = 0 & (5) \end{cases}$$

(5) $\Rightarrow K^2 = \frac{c^2L^2M}{V}$ (6). Remplaçons (6) dans (3), il vient: $L^2 = \frac{1}{1-MV}$ (7)

remplaçons également (6) dans (4), on a:

$$L^2 = \frac{V}{Mc^2\left(1 - MV\right)} \quad (8)$$

égalons (7) et (8), on obtient: $\boxed{M = \frac{V}{c^2}}$ et par suite $\boxed{K = L = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$

Ex. (02) :

Dans le référentiel inertiel $(\mathcal{R}')$, ℓ_0 est une longueur propre. Dans le référentiel inertiel $(\mathcal{R}')$, la longueur de la barre est une longueur impropre $\ell = \ell_0/3$. La théorie nous dit que

$$\text{longueur propre } = \gamma \text{ (longueur impropre)}$$

donc :

$$\ell_0 = \gamma\ell$$

c'est-à-dire

$$\ell_0/3 = \frac{\ell_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = 3 \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{9}$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{3}c \Rightarrow \boxed{V \simeq 0.94c}$$

Ex. (03) :

C'est la dilatation du temps, on a $T' = \frac{3}{5}T$ et d'aprés le cours on a $T = \gamma T'$ où T' est le temps propre (temps indiqué par l'horloge du vaisseau spatial). On a alors: $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow 1/\sqrt{1-\beta^2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{5}c}$

Ex. (04):

1) La vitesse du vaisseaux B par rapport à A du point de vue de Galilée:

On utilise la loi classique de composition des vitesses :

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V$$

$\upsilon_{B/O} = \upsilon_x = -0,6c$, $\upsilon_{B/A} = \upsilon'_x$, $\upsilon_{A/0} = V = 0,8c$

$$\upsilon'_x = -0,6c - 0,8c = -1.4c$$

$$|\upsilon_{B/A}| > c$$

2) La vitesse du vaisseaux B par rapport à A en relativité restreinte

$\upsilon_{B/A} =?$

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x}$$

$\upsilon_{B/O} = \upsilon_x = -0,6c$, $\upsilon_{B/A} = \upsilon'_x$, $V = \upsilon_{A/0} = 0,8c$ donc

$$\upsilon'_x = \frac{-0,6c - 0,8c}{1 - \frac{0,8c}{c^2}(-0,6c)} \simeq -0.95c$$

donc $|\upsilon_{B/A}| < c$.

Ex. (05):

1) Les composantes du 4-vecteur $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k})$ dans les deux référentiels:

dans $(\mathcal{R})$: $\underline{k} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ -k\overrightarrow{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dans $(\mathcal{R}')$: $\underline{k}' = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ -k'\overrightarrow{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $c = \lambda\nu$

2) Pour Trouver la relation entre λ' et λ, il suffit d'appliquer la transformation de Lorentz d'un 4-vecteur. On a vu en cours que: $\underline{k}' = L\underline{k}$ où L est la matrice de Lorentz, donc:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \beta = \frac{V}{c}$$

il vient de la première composante:

$$\frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda}\gamma\,(1+\beta) \Rightarrow \lambda' = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda \ \text{ donc } \boxed{f(\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}.$$

3) On a , d'aprés la deuxième question, $\lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda \Rightarrow \beta = \dfrac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda^2 + \lambda'^2}$

AN: $\beta = \dfrac{(0,7)^2 - (0,5)^2}{(0,7)^2 + (0,5)^2} \simeq 0,324$. La vitesse du vaiseau spatial par rapport à $(\mathcal{R})$ est:

$$\boxed{V = 9,72 \times 10^7 \text{ m/s}}.$$