

Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

L3, Physique des rayonnements

Cours de Physique statistique

Chapitre I: Eléments de base de la physique statistique

Prof. Djamil Bouaziz

bouazizdjamil@yahoo.fr

2020/2021 Semestre 1

Chapitre I:

Eléments de base de la physique statistique

1. Introduction

La physique statistique (PS) fut initiée par Ludwig Boltzmann (1844-1906). Elle étudie les propriétés des systèmes macroscopiques (solides, liquides et gaz), constitués d'un très grand nombre de particules microscopiques (molécules, atomes, électrons,...), en s'intéressant aux propriétés microscopiques de ces constituants. La PS fait donc le lien entre le monde microscopique, où chaque particule doit être considérée, et le monde macroscopique, dans lequel un système est décrit par un petit nombre de paramètres mesurables. La PS est basée principalement sur un postulat fondamental et une hypothèse de base (qui vont être énoncés dans les paragraphes suivants), et elle utilise des méthodes probabilistes pour faire le passage du microscopique au macroscopique. L'entropie statistique étant une grandeur fondamentale en PS; elle permet de calculer toutes les grandeurs macroscopiques du système, et conduit en particulier à une meilleure compréhension des lois de la thermodynamique.

Dans la suite on va présenter quelques outils mathématiques de base utilisés en physique statistique. Pour cela, on va se baser essentiellement sur les deux livres suivants:

- 1) Physique statistique, B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet; (Hermann 2001).
- 2) Physique Statistique, cours exercices et problèmes corrigés; H. T. Diep; (Ellipse 2006).

2. Quelques outils mathématiques

2.1. Eléments de l'analyse combinatoire

En physique statistique il est important de connaître le nombre des états microscopiques correspondant à un état macroscopique du système. Cela fait souvent appel aux notions fondamentales de l'analyse combinatoire, que nous allons exposer brièvement ici.

Nombre de permutations: Le nombre de permutations de N objets est le nombre de configurations différentes que l'on peut obtenir en permutant ces objets deux par deux; ce nombre vaut:

$$p = N!. \quad (1)$$

Exemple: pour l'ensemble $\{a, b, c\}$, les permutations possibles sont $\{a, b, c\}$, $\{b, a, c\}$, $\{c, b, a\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, qui sont au nombre de $3!=3.2.1=6$.

Si parmi les N objets on a N_1 objets identiques de type (1), N_2 objets identiques de type (2), N_i objets identiques de type (i), alors la permutation des objets identiques ne conduit pas à une nouvelle permutation; le nombre de permutations dans ce cas s'écrit

$$p = \frac{N!}{N_1!N_2!.....N_i!}. \quad (2)$$

Exemple: le nombre de mots que l'on peut construire à partir des lettres (C,I,I,N,N,O,O,S,T,T,T,U) égale $\frac{12!}{2!2!2!3!}$.

Nombre d'arrangements: Le nombre d'arrangements de n éléments choisis parmi N éléments est par définition le nombre de voies possibles par lesquelles on choisit les n éléments l'un après l'autre en tenant compte de l'ordre du choix de chaque élément. Ce nombre est donné par

$$A_N^n = N!(N-1)!(N-2)!....(N-n+1)! = \frac{N!}{(N-n)!}. \quad (3)$$

Exemple: pour sélectionner deux boulettes parmi quatre boulettes numérotées de 1 à 4, on a $\frac{4!}{(4-2)!} = 12$ façons possibles: (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3).

Nombre de combinaisons: C'est le nombre d'arrangements de n éléments choisis parmi N éléments si l'ordre du choix n'est pas tenu compte. Le nombre de combinaison s'écrit

$$C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!}. \quad (4)$$

Dans l'exemple précédent, le nombre combinaisons possibles vaut $C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$. Les combinaisons sont: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4). Bien entendu, le choix (1, 2) est le même que (2, 1), il en est de même pour (1, 3) et (3, 1),

2.2. Quelques formules usuelles:

Formule de Stirling:

Pour $N \gg 1$, on a

$$N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}, \quad (5)$$

$$\ln N! \simeq N \ln N - N. \quad (6)$$

Intégrales définies comportant une gaussienne:

On définit :

$$I(n) = \int_0^\infty dx x^n e^{-ax^2}, \quad (a > 0). \quad (7)$$

On a les résultats suivants:

$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad I(1) = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad I(2) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \\ I(3) &= \frac{1}{2a^2}, \quad I(4) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}, \quad I(5) = \frac{1}{a^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Fonction gamma:

La fonction gamma est définie par l'intégrale suivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x}, \quad (z > 0), \quad (9)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (10)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad (11)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ pour } n \text{ entier positif.} \quad (12)$$

Volume d'une hypersphère dans un espace à N dimensions:

On considère un espace à N dimensions, muni d'un repère $(O, x_1, x_2, \dots, x_N)$. Une sphère dans cet espace (ou hypersphère) de centre O et de rayon R est définie par :

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2.$$

Le volume de l'hypersphère s'écrit:

$$V_N(R) = A_N R^N, \quad (13)$$

avec

$$A_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}. \quad (14)$$

3. Introduction aux méthodes statistiques

3.1 Eléments de calcul des probabilités

3.1.1. Notion de probabilité: Soit une expérience dont son résultat est inconnu à l'avance avec certitude: plusieurs résultats, que l'on suppose discrets $(e_1, e_2, \dots, e_m, \dots)$ sont possibles. Chaque résultat représente un événement. Si cette expérience est répétée N

fois dans les mêmes conditions alors les événements $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ vont se produire N_1 fois, N_2 fois, ..., N_m fois.

La probabilité P_m de l'événement e_m est définie par:

$$P_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_m}{N}, \quad (15)$$

bien entendu, on a $0 \leq P_m \leq 1$.

La définition (15) peut être généralisée au cas d'événements continus comme suit: soit une quantité mesurable qui peut être représentée par une variable continue x , et dont on ne connaît pas sa valeur avant la mesure.

La probabilité infinitésimale $dP(x)$ pour que la variable x ait une valeur qui appartient à l'intervalle $[x, x + dx]$ est définie par:

$$dP(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dN(x)}{N}, \quad (16)$$

$dN(x)$ étant le nombre de fois dans lesquelles la valeur de x est comprise dans l'intervalle $[x, x + dx]$ lorsque l'expérience est refaite N fois dans les mêmes conditions.

Il est souvent utile de définir la densité de probabilité $\omega(x)$ au point x :

$$\omega(x) = \frac{dP(x)}{dx}, \quad \omega(x) \geq 0. \quad (17)$$

3.1.2. Lois de composition des probabilités:

a- Addition: soit plusieurs événements e_1, e_2, \dots, e_m , supposés incompatibles (si l'un se produit alors les autres ne se produisent pas). La probabilité pour que e_1 **ou** e_2, \dots **ou** e_m se produisent est donnée par

$$P(e_1 \text{ ou } e_2 \dots \text{ ou } e_m) = P(e_1) + P(e_2) + \dots P(e_m) \quad (18)$$

Exemple: Lorsque un dé est jeté, la probabilité pour obtenir une face repérée par un nombre pair s'écrit:

$$P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = P(2) + P(4) + P(6).$$

Si les événements ne sont pas incompatibles (peuvent se produire en même temps), on prend le cas le plus simple (deux événements), la probabilité s'écrit: $P(e_1 \text{ ou } e_2) = P(e_1) + P(e_2) - P(e_1 \text{ et } e_2)$.

La loi d'addition s'applique également dans le cas d'événements continus en utilisant la définition (17); on a

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b dP(x) = \int_a^b \omega(x)dx. \quad (19)$$

Conséquence: Normalisation des probabilités

La somme des probabilités de tous les événements incompatibles est égale à l'unité:

$$\sum_{m=1}^M P_m = 1, \quad (20)$$

où M est le nombre d'événements possibles.

Dans le cas continu, on a :

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega(x)dx = 1, \quad (21)$$

où tous les valeurs possibles de x sont comprises dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

b- Multiplication: considérons des événements e_1, e_2, \dots, e_m , supposés statistiquement indépendants (la probabilité d'obtenir l'un d'eux ne dépend pas des résultats des autres).

La probabilité d'obtenir plusieurs événements en même temps s'écrit:

$$P(e_1 \text{ et } e_2 \dots \text{ et } e_m) = P(e_1) \times P(e_2) \times \dots \times P(e_m). \quad (22)$$

Dans le cas continu, cette lois peut se généraliser facilement comme suit:

soit plusieurs variables x_1, x_2, \dots, x_m , supposées continues et indépendantes. La probabilité infinitésimale pour que x , soit comprise entre x_i et $x_i + dx_i$, est notée par:

$$dP(x_i) = \omega_1(x_1)dx_1.$$

La probabilité infinitésimale pour que lors d'une mesure des variables x_1, x_2, \dots, x_m , on obtient une valeur de x_1 dans l'intervalle $x_1, x_1 + dx_1$ et en même temps une valeur de x_2 dans l'intervalle $x_2, x_2 + dx_2, \dots$, et en même temps une valeur de x_m dans l'intervalle x_m et $x_m + dx_m$, s'écrit:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_m) &= dP(x_1) \times dP(x_2) \times \dots \times dP(x_m), \\ &= \omega_1(x_1)dx_1 \times \omega_2(x_2)dx_2 \times \dots \omega_m(x_m)dx_m, \end{aligned} \quad (23)$$

de sorte que la densité de probabilité du système à m variables indépendantes s'écrit:

$$\omega_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = \omega_1(x_1) \times \omega_2(x_2) \times \dots \omega_m(x_m), \quad (24)$$

Exemple: lorsque deux dés sont jetés, le résultat obtenu pour chaque dé est indépendant du résultat de l'autre dé. La probabilité pour obtenir, par exemple, la face 2 pour le premier dé et en même temps obtenir la face 6 pour le premier dé égale

$$P(1 \text{ et } 6) = P(1) \times P(6).$$

3.2. Valeurs moyennes et distributions statistiques:

3.2.1. Valeurs moyennes:

Soit un système ayant plusieurs états possibles (m) avec des probabilités P_m . Considérons une grandeur quelconque A associée au système, et qui prend la valeur A_m lorsque le système est dans l'état (m).

La valeur moyenne de A est définie par:

$$\bar{A} \equiv A_{\text{moy}} = \sum_m A_m \times P_m. \quad (25)$$

Si la même valeur de A est obtenue plusieurs fois dans différents états m , la valeur moyenne (25) peut s'écrire comme suit:

$$\bar{A} = \sum_{A_i} A_i \times P(A_i), \quad (26)$$

où on a $P(A_i) = \sum_{m, A_m=A_i} P_m$, avec, bien entendu, $\sum_{A_i} P(A_i) = 1$.

Dans le cas continu, la valeur moyenne d'une propriété $f(x)$ qui dépend de la variable continue x , dont la densité de probabilité est $\omega(x)$, s'écrit

$$\bar{f} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \omega(x) dx. \quad (27)$$

Si on a une grandeur $f(x, y, z)$ qui dépend de 3 variables indépendantes x, y, z , la valeur moyenne s'écrit:

$$\bar{f} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) \omega(x, y, z) dx dy dz. \quad (28)$$

Comme dans le cas discret, la valeur moyenne (27) peut s'écrire comme une intégrale par rapport à f et non pas par rapport à x :

$$\bar{f} = \int_{f_1}^{f_2} f \times \omega(f) df, \quad (29)$$

avec

$$\bar{f} = \int_{f_1}^{f_2} \omega(f) df = 1. \quad (30)$$

3.2.2. Ecart quadratique moyen:

L'écart quadratique moyen, ΔA , d'une grandeur A est définie par:

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \overline{(A - \overline{A})^2} \\&= \overline{A^2 - 2A\overline{A} + \overline{A}^2} = \overline{A^2} - 2\overline{A\overline{A}} + \overline{\overline{A}^2} \\&= \overline{A^2} - 2\overline{A}^2 + \overline{A}^2 \\&= \overline{A^2} - \overline{A}^2.\end{aligned}\tag{31}$$

3.2.3. Distribution statistique d'une grandeur physique:

La distribution statistique de la grandeur A associée à un système est l'ensemble des probabilités des diverses valeurs possibles de A . Pour illustrer cette définition, on va étudier quelques distribution bien connues et qui sont souvent utilisées en physique statistique.

a. Distribution binomiale

Cette distribution s'applique dans le cas où on a deux événements incompatibles tel qu'une expérience qui possède deux résultats possibles A et B : si A se produit alors B ne se produit pas et l'inverse. On a donc

$$P_A + P_B = 1.$$

Si cette expérience est répétée N fois, la probabilité d'obtenir n fois le résultat A (ou la probabilité d'obtenir $N - n$ fois le résultat B) peut s'écrire en utilisant la loi de multiplication des probabilités et en tenant compte du nombre de combinaisons possibles de n parmi N . Cette probabilité a la forme suivante:

$$\begin{aligned}P(N, n) &= C_N^n \times P_A^n \times P_B^{N-n}, \\&= \frac{N!}{n!(N-n)!} \times P_A^n \times P_B^{N-n}.\end{aligned}\tag{32}$$

On peut s'assurer que la condition de normalisation des probabilités est bien satisfaite par la loi (32):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N P(N, n) &= \sum_{n=0}^N C_N^n \times P_A^n \times P_B^{N-n}, \\&= (P_A + P_B)^N = 1^N = 1,\end{aligned}\tag{33}$$

où l'on a utilisé la formule du binôme de Newton

$$(a + b)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n \times a^n \times b^{N-n}. \quad (34)$$

La loi (32) donne différentes probabilités pour différentes valeurs de n ; donc elle représente une distribution, appelée distribution binomiale.

Propriétés de la distribution binomiale:

- Valeur moyenne de n :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n \times P(N, n) = NP_A, \quad (\text{à démontrer}). \quad (35)$$

- Valeur moyenne de n^2 :

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^N n^2 P(N, n) = NP_A[1 + (N-1)P_A], \quad (\text{à démontrer}). \quad (36)$$

- Ecart quadratique moyen Δn :

$$\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \bar{n}^2} = \sqrt{NP_A(1 - P_A)} = \sqrt{NP_AP_B}. \quad (37)$$

- Incertitude relative

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{NP_AP_B}}{N \times P_A} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (38)$$

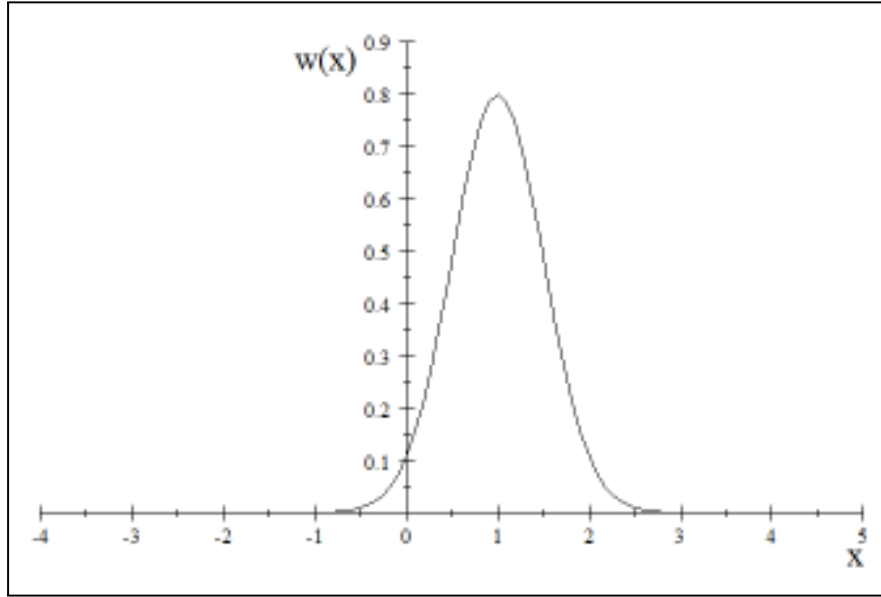
b. Distribution Gaussienne

Elle s'applique aux cas d'événements continus. La densité de probabilité de Gauss est donnée par

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (39)$$

En utilisant le résultat bien connu: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, il est facile de vérifier que la condition de normalisation est satisfaite par la loi (39):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)dx = 1,$$



$\omega(x)$ en fonction de x pour $x_0 = 1$ et $\sigma = 0.5$.

Propriétés de la distribution de Gauss:

- Le paramètre σ est relié à la largeur de la demi-hauteur du maximum de $\omega(x)$. Cette largeur a la valeur $\sqrt{2\ln 2}\sigma$.

- Valeur la plus probable de x : $\frac{d\omega}{dx} = 0$, ce qui donne $x = x_0$.

- Valeur moyenne de x :

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\omega(x)dx = x_0, \quad (\text{à démontrer}). \quad (40)$$

- Valeur moyenne de x^2 :

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\omega(x)dx = x_0^2 + \sigma^2, \quad (\text{à démontrer}). \quad (41)$$

- Ecart quadratique moyen Δx :

$$\Delta x = \sigma. \quad (42)$$

c- Théorème de Poisson:

Une variable aléatoire, dont les valeurs possibles sont des entiers positifs ou nuls, est distribuée selon la loi de Poisson si la probabilité pour qu'elle prenne la valeur n est de la forme:

$$P(N, n) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda),$$

λ étant réel positif. On a $\bar{n} = \lambda$ et $\Delta n = \sqrt{\lambda}$.

On montre que la distribution binomiale $P(N, n)$ peut être approximée par une distribution de Poisson si l'événement A est rare: $P_A \ll P_B$ et $P_A \ll 1$, $N \gg n \gg 1$.

d- Théorème de la limite centrale:

On montre que la distribution binomiale $P(N, n)$ tend à la distribution gaussienne dans la limite $N \gg n \gg 1$. Cette relation entre ces deux distributions est appelée théorème de la limite centrale.

3.3. Marche au hasard et mouvement brownien

En observant par microscope des grains de pollen en suspension dans l'eau, on peut constater que ceux-ci sont animés d'un mouvement désordonné permanent. Ils vont et viennent en tournoyant, montent, descendent, remontent encore sans tendre aucunement vers le repos. Ce phénomène a été découvert pour la première fois par le botaniste anglais R. Brown, et son explication fut donnée en 1905 par Einstein, qui interpréta le mouvement brownien par les chocs des molécules du liquide sur les grains provoquant des changements de direction aléatoires. Einstein proposa alors une théorie qui consiste à ramener l'étude du mouvement brownien à ce que l'on appelle aujourd'hui un problème de <<marche au hasard>>.

Les phénomènes de marche au hasard rencontrés peuvent être à une, deux, trois dimensions; le mouvement peut avoir lieu dans un espace infini ou borné; les <<pas>> peuvent être de longueur constante ou variable, toutes les directions peuvent être équiprobables ou certaines d'entre elles privilégiées; les situations sont donc plus ou moins complexes. Nous allons nous limiter dans ce qui suit à quelques exemples simples.

3.3.1. Marche au hasard à une dimension

a- Pas de longueur constante

On considère un marcheur (M) qui se déplace avec des pas de longueur constante (ℓ) le long d'une droite orientée, d'origine O . Le pas peut être effectué dans le sens positif ou négatif avec des probabilités P_+ et P_- . Les pas sont supposés statistiquement indépendants: la direction d'un pas ne dépend pas de celle du précédent; on dit que le marcheur <<a perdu la mémoire>> de son mouvement antérieur, ou encore que le processus est markovien.

On cherche la probabilité $P(N, n)$ pour que, après N pas, M se trouve au point A d'abscisse $OA = n\ell$ (n entier; $|n| \leq N$).

On note par n_+ (n_-) le nombre de pas dans la direction positive (négative). Donc

$$n_+ + n_- = N, \quad \text{et} \quad n_+ - n_- = n, \quad (43)$$

ce qui donne

$$n_+ = \frac{N + n}{2}, \quad n_- = \frac{N - n}{2}. \quad (44)$$

Il existe plusieurs trajets différents qui conduisent au point A après N pas. Le nombre de ces trajet est $C_N^{n_+}$.

La probabilité de chaque trajet s'écrit:

$$P_+^{n_+} P_-^{n_-} = P_+^{\frac{N+n}{2}} P_-^{\frac{N-n}{2}}. \quad (45)$$

Par conséquent la probabilité cherchée sera donnée par la distribution binomiale:

$$P(N, n) = C_N^{\frac{N+n}{2}} P_+^{\frac{N+n}{2}} P_-^{\frac{N-n}{2}}. \quad (46)$$

En se basant sur l'étude de la distribution binomiale, on aura

$$\bar{n} = N(P_+ - P_-), \quad \Delta n = \sqrt{4NP_+P_-}. \quad (47)$$

Dans le cas $P_+ = P_- = \frac{1}{2}$, on aura

$$\bar{n} = 0, \quad \Delta n = \sqrt{N}. \quad (48)$$

La valeur moyenne nulle signifie que si cette expérience est effectuée par un grand nombre de marcheurs en partant du même point, après N pas, les marcheurs se distribuent le long de la rue de façon symétrique par rapport à O . Cependant, chaque marcheur tend à s'éloigner de O du fait que $\Delta n = \sqrt{N}$.

a- Pas de longueur variable

Maintenant, on suppose que les pas successifs du marcheur M n'ont pas la même longueur mais sont toujours indépendants. Dans ce cas au lieu du paramètre ℓ (longueur du pas lorsque celui-ci était constant), on introduit la densité de probabilité $\omega(x)$, telle que $\omega(x)dx$ est la probabilité pour qu'un pas donné accroisse l'abscisse de M d'une quantité comprise entre x et $x + dx$.

La densité de probabilité $W_N(X)$ pour que, après N pas, le marcheur se trouve à l'abscisse X , peut être déduite directement à partir du résultat relatif au cas de pas avec une longueur

constante, en supposant que $N \gg 1$ et en appliquant le théorème de la limite centrale. On obtient ainsi la densité de probabilité suivante:

$$W_N(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(X - N\bar{x})^2}{2N\sigma^2} \right], \quad (49)$$

où \bar{x} et σ sont la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de la variable x , qui peuvent être calculés à partir de la densité de probabilité $\omega(x)$.

3.4. Information et entropie statistique:

Considérons une expérience qui a M résultats possibles (que l'on appelle événements, e_m , $m = 1, \dots, M$). La probabilité correspondante à chaque événement est notée P_m .

- Si l'expérience a uniquement un seul résultat; il s'agit donc d'un événement certain (e_j). Donc, on a $P_j = 1$ et ($P_m = 0, m \neq j$). Dans ce cas on a **une information** complète sur le résultat qui va se produire avant de faire l'expérience.

- Si, par contre, l'expérience ne possède pas un événement certain, mais plutôt plusieurs résultats sont probables, on aura dans ce cas **un manque d'information**: le résultat qui va survenir n'est pas connu à l'avance, il ne sera connu qu'après la fin de l'expérience.

Pour quantifier (ou mesurer) ce manque d'information, on introduit une fonction qui dépend des probabilités de tous les événements possibles:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_M) = -k \sum_{m=1}^M P_m \ln P_m, \quad (50)$$

avec $P_m \ln P_m = 0$ si $P_m = 0$. La constante k est positive, son choix se fait selon sa convenance.

L'entropie statistique s'identifie dans l'étude des systèmes en équilibre avec l'entropie thermodynamique; la constante k ne sera autre que la constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

Propriétés de l'entropie statistique:

- $S(P_1, P_2, \dots, P_M)$ est totalement symétrique par rapport aux changements des P_m .
- Minimum: $S_{\min} = 0$, cette valeur s'obtient lorsqu'il y a un événement certain: $P_j = 1$ et $P_m = 0, m \neq j$.
- Maximum: $S_{\max} = k \ln M$, cette valeur est atteinte dans le cas où tous les événements sont équiprobables:

$$P_m = \frac{1}{M}, \quad \forall m = 1, \dots, M.$$

Le manque d'information dans cette situation est maximal.

- Additivité: Soit deux systèmes indépendants (deux expériences) e_{1j_1} et e_{2j_2} avec des probabilités P_{j_1} et P_{j_2} correspondant aux résultats possibles de chaque expérience. Il est facile de montrer que l'entropie de ces deux systèmes (expérience double) s'écrit:

$$S(P_{j_1}, P_{j_2}) = S(P_{j_1}) + S(P_{j_2}). \quad (51)$$

3.5. Microétats et macroétats:

Dans l'étude des systèmes macroscopiques constitués d'un très grand nombre de particules $N \gg 1$, on introduit la notion d'état microscopique (ou microétat) et de l'état macroscopique (ou macroétat).

Un état macroscopique d'un système est défini en connaissant une ou de plusieurs grandeurs macroscopiques, telles que l'énergie, la température, le volume,...etc.

Un état microscopique d'un système est défini en connaissant les états individuels de tous les particules qui le composent. Ces états individuels sont à eux définis par les paramètres qui caractérisent le système.

Par exemple, l'état macroscopique d'un système isolé est défini par son énergie constante E ; l'état microscopique de ce système est décrit par la répartition de E sur les particules de ce système. On a évidemment un grand nombre d'états microscopiques qui satisfont la contrainte extérieure (valeur spécifiée de E); ces états sont dits états microscopiques accessibles.

Dans l'étude des systèmes isolés en physique statistique, il est important de savoir comment compter le nombre des états microscopiques accessibles afin de calculer l'entropie statistique et les autres quantités physiques du système.

Pour illustrer ce point, il convient de considérer l'exemple simple suivant:

Soit un système isolé d'énergie totale $E = 3$ unités; ce système est composé de 3 particules A, B et C, supposées discernables. Chaque particule peut avoir une énergie égale 0, 1, 2 et 3 unités.

L'état macroscopique du système est défini par la contrainte: $E = 3$. Cet état lui correspond plusieurs états microscopiques accessibles qui satisfont

$$E_A + E_B + E_C = 3.$$

On a donc les états microscopiques suivants:

$$E_A = 0, E_B = 0, E_C = 3, \text{ état microscopique de type 1}$$

$$E_A = 0, E_B = 1, E_C = 2, \text{ état microscopique de type 2}$$

$$E_A = 1, E_B = 1, E_C = 1, \text{ état microscopique de type 3}$$

et les états microscopiques qui s'obtiennent par la permutation des particules A , B , et C ; à savoir:

Etats microscopiques de type 1:

$$E_A = 3, E_B = 0, E_C = 0,$$

$$E_A = 0, E_B = 3, E_C = 0,$$

Etats microscopiques de type 2:

$$E_A = 1, E_B = 0, E_C = 2,$$

$$E_A = 2, E_B = 1, E_C = 0,$$

$$E_A = 2, E_B = 0, E_C = 1,$$

$$E_A = 0, E_B = 2, E_C = 1,$$

$$E_A = 1, E_B = 2, E_C = 0,$$

Au total, on a 10 états microscopiques accessibles correspondant à l'état macroscopique $E = 3$.

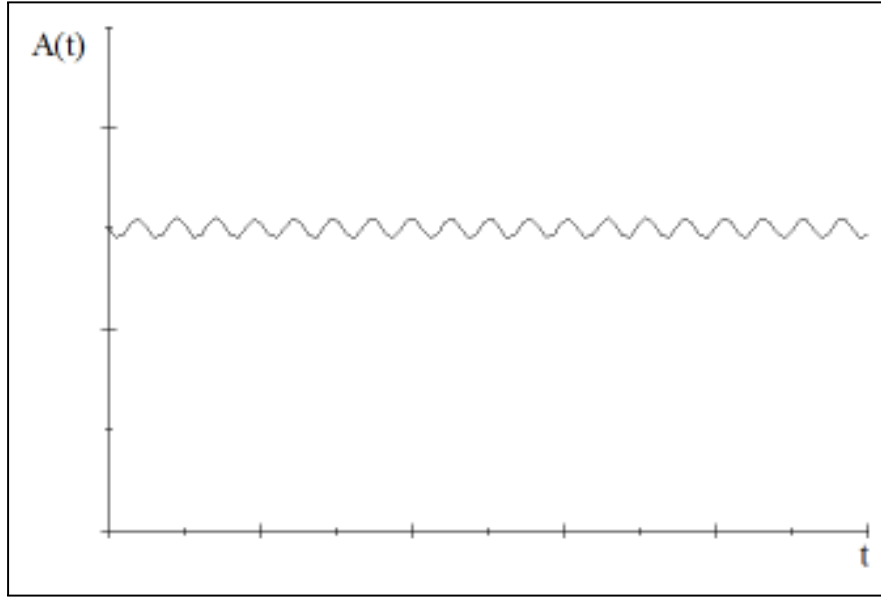
Si les particules A , B et C étaient indiscernables, le nombre d'états microscopiques se réduit à trois.

On montre que pour un système isolé de N particules indiscernables avec une énergie E , le nombre d'états microscopiques accessibles est donné par la formule suivante:

$$\Omega(E) = \frac{(N + E - 1)!}{(N - 1)!E!}. \quad (52)$$

3.5. Moyenne temporelle, moyenne statistique et principe d'ergodicité

Lorsque un système est à l'équilibre macroscopique, les variables macroscopiques seront constantes au cours du temps. Cependant, à cause des fluctuations microscopiques, ces variables macroscopiques subissent des petites fluctuations dans le temps comme le montre la figure suivante:



Fluctuation de la grandeur $A(t)$ autour d'une valeur A_0 .

La valeur moyenne temporelle est définie par l'expression suivante:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (53)$$

D'autre part, comme on l'a vu plus-haut, on peut calculer la valeur moyenne statistique sur l'ensemble d'états microscopiques accessibles du système via la formule:

$$\bar{f} = \sum_m P_m f_m, \quad (54)$$

où P_m est la probabilité de l'état microscopique (m) dans laquelle la valeur de la grandeur f vaut f_m .

Le principe d'ergodicité est une hypothèse fondamentale en physique statistique; il stipule que pour un système à l'équilibre, la valeur moyenne temporelle et la valeur moyenne statistique auront la même valeur, que l'on peut mesurer expérimentalement.