

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



Support de Cours

Master I Electrotechnique Industrielle

Réalisé par

Tarik HACIB

Docteur en électrotechnique

Méthodes numériques appliquées et optimisation

Année universitaire 2020-2021

Semestre: 2

Unité d'enseignement: UEF 1.1.2

Matière 1: Méthodes numériques appliquées et optimisation

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement

L'objectif de cet enseignement est de présenter les outils nécessaires d'analyse numérique et d'optimisation pour atteindre ce triple but. L'enseignement combinera des concepts mathématiques théoriques et une mise en œuvre pratique sur des exemples d'applications concrètes.

Connaissances préalables recommandées : Mathématique, maîtrise de MATLAB

Contenu de la matière :

Chapitre I : Rappels sur quelques méthodes numériques (3 semaines)

- Résolution des systèmes d'équations linéaires et non linéaires par les méthodes itératives; Intégration et différentiation, etc.
- Equations différentielles ordinaires (EDO) : Introduction et formulation canonique des équations et systèmes d'équations différentielles ordinaires ;
- Méthodes de résolution: Méthodes d'Euler ; Méthodes de Runge-Kutta ; Méthode d'Adams.

Chapitre II : Equations aux dérivées partielles (EDP) (6 semaines)

- Introduction et classifications des problèmes aux dérivées partielles et des conditions aux limites;
- Méthodes de résolution:
 - Méthode des différences finies (MDF);
 - Méthode des éléments finis (MEF).

Chapitre III : Techniques d'optimisation (6 semaines)

- Définition et formulation : problèmes d'optimisation. Techniques d'optimisation classiques. Optimisation unique et multiple avec et sans contraintes.
- Algorithmes d'optimisation : La programmation linéaire, modèle mathématique, technique de la solution, la dualité, Programmation non linéaire.

Mode d'évaluation : Contrôle continu: 40%; Examen: 60%.

Références bibliographiques

1. G.Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Edition de l'école polytechnique,2012
2. Computational methods in Optimization, Polak , Academic Press,1971.
3. Optimization Theory with applications, Pierre D.A, Wiley Publications,1969.
4. Taha, H. A., Operations Research: An Introduction, Seventh Edition, Pearson Education Edition, Asia, New Delhi ,2002.
5. S.S. Rao, 'Optimization – Theory and Applications', Wiley-Eastern Limited, 1984.

Chapitre I. Rappels de quelques méthodes numériques

I.1. Résolution des systèmes d'équations linéaires et non linéaires par les méthodes itératives

I.1.1. Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes itératives

Dans cette partie du chapitre I, nous allons voir deux principales méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires :

- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Seidel

I.1.1.1. Méthode de Jacobi

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases} \quad (1)$$

Si nous considérons un vecteur $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ initiale proche de la solution, on peut calculer une nouvelle approximation de la solution, et ainsi de suite jusqu'à la convergence.

Donc on cherche à créer une suite de vecteur $\{x^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$ qui converge vers la solution de (1).

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (y_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) / a_{11} \\ x_2^{(k)} = (y_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) / a_{22} \\ x_3^{(k)} = (y_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)}) / a_{33} \end{cases} \quad (2)$$

I.1.1.2. Méthode de Gauss-Seidel

Partons comme précédemment du système (2) mais cette fois-ci lorsque une inconnue est utilisée, c'est automatiquement la plus récente valeur calculée.

Donc la méthode de Gauss-Seidel, cherche à créer une suite de la forme :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (y_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)})/a_{11} \\ x_2^{(k)} = (y_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)})/a_{22} \\ x_3^{(k)} = (y_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})/a_{33} \end{cases} \quad (3)$$

I.1.1.3. Convergence de la solution

On arrête le calcul lorsque :

- deux valeurs successives de x_j sont suffisamment voisins. C'est à dire :

$$\sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq \varepsilon$$

- un nombre maximal d'itérations N_{max} est atteint.

a. Remarque

La convergence de la solution ne dépend pas du choix des valeurs initiales $x_j^{(0)}$ mais seulement des coefficients a_{ij} .

La convergence est assurée si on a, pour chaque valeur de i (C'est à dire pour chaque ligne).

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

I.1.1.4. Facteur de relaxation

Le choix des valeurs initiales influe considérablement sur la rapidité de la convergence.

Partons de $x_j^{(k-1)}$ on obtient $x_j^{(k)}$. A l'itération suivante, au lieu de partir de x_j^k on part de :

$$x_j^{*(k)} = x_j^{(k-1)} + \gamma (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})$$

γ est le facteur de relaxation. En pratique, γ est défini de façon arbitraire tel que $0 < \gamma < 2$.

a. Remarque

- $1 < \gamma < 2$ est utilisé pour accélérer la convergence d'un processus itératif déjà convergent.
- $0 < \gamma < 1$ permet souvent de faire converger un processus divergent.

I.1.1.5. Exemple

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 1.2x_1 + 4.4x_2 - 1.9x_3 = -4.2 \\ 5.1x_1 - 1.3x_2 + 2.4x_3 = 2.7 \\ -2.6x_1 + 1.7x_2 - 6.3x_3 = 9.6 \end{cases}$$

On veut appliquer la méthode de Gauss-Seidel pour trouver les racines du système d'équations.

- Appliquer le test de convergence. Commenter.
- Qu'est ce qu'on doit faire pour assurer la convergence de la solution?
- Réaliser six itérations et comparer la solution obtenue avec la solution exacte ($x_1 = 1.162946$, $x_2 = -2.418817$, $x_3 = -2.656452$). Prendre comme conditions initiales les valeurs $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$.

I.1.2. Résolution des systèmes d'équations non linéaires par les méthodes itératives

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires, où on peut citer :

- Méthodes des substitutions successives
- Méthode de la plus grande pente ou méthode du gradient
- Méthodes de Newton

Dans cette partie du cours nous développons la méthode de Newton-Raphson (Méthode de Newton) considérée comme l'une des méthodes les plus puissantes.

I.1.2.1. Méthode de Newton-Raphson

On considère le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

où f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ des fonctions non linéaires avec des variables réelles x_1, x_2, \dots, x_n .

on pose $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, et $F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$

La résolution du système (4) implique trouvez n valeurs réelles qui vérifier au même temps (4).

A partir d'une approximation initiales, la méthodes de Newton-Raphson peut arriver a une meilleures approximation de la solution $X^{(k)}$ par la réalisation de la récurrence $X^{(k)} = X^{(k-1)} + \Delta X^{(k-1)}$, avec $\Delta X^{(k-1)}$ est l'erreur qu'on peut commise lorsque on approche la solution exacte à $X^{(k)}$.

A partir d'un développement en série de Taylor de $F(X)$ au voisinage de $X^{(k-1)}$, $\Delta X^{(k-1)}$ est donnée par :

$$\Delta X^{(k-1)} = -J^{-1}(X^{(k-1)}) F(X^{(k-1)}) \quad (5)$$

Où J est la matrice Jacobienne (matrice des dérivées premières).

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donc, l'expression de Newton-Raphson récurrente est donnée par :

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} - J^{-1}(X^{(k-1)}) F(X^{(k-1)}) \quad (7)$$

La faiblesse de la méthode de Newton-Raphson réside dans la nécessité de calculer et d'inverser la matrice J à chaque itération.

I.1.2.2. Exemple

Soit le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- Combien le système admet-il de solutions?
- Trouver les solutions du système par la méthode de Newton-Raphson. On prend comme conditions initiales les valeurs $x_1^{(0)} = 0.9$, $x_2^{(0)} = 0.5$.

I.2. Interpolation et approximation

L'utilisation des polynômes pour l'approximation des fonctions dans un intervalle donné est appelé interpolation polynomiale. Une raison importante pour considérer la classe des polynômes dans l'approximation des fonctions est que la dérivée ainsi que l'intégral d'un polynôme sont faciles à déterminer et sont également des polynômes. Pour ces raisons, les polynômes sont souvent utilisés pour l'approximation des fonctions continues.

Le problème de la détermination d'un polynôme du premier degré qui passe par les points distincts (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est le même que l'approximation d'une fonction f pour laquelle $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$ par moyen d'une interpolation polynomiale du premier degré. Pour généraliser la notion d'interpolation linéaire, on considère la construction d'un polynôme de degré au plus n qui passe à travers les $n+1$ points. Dans cette section nous allons nous intéresser à deux méthodes d'interpolation polynomiales :

- La méthode de Lagrange
- La méthode de Newton

I.2.1. Interpolation polynomiale par la méthode de Lagrange

Si x_0, x_1, \dots, x_n sont $n+1$ points distincts et f est une fonction qui a des valeurs définies dans ces points, alors il existe un polynôme unique $P(x)$ de degré n tel que:

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n \quad (8)$$

Ce polynôme est donné par :

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) \quad (9)$$

Où :

$$\begin{aligned}
L_k(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\
&= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}
\end{aligned} \tag{10}$$

I.2.2. Méthode de Newton des différences divisées

Avant de présenter la méthode elle même on introduit en premier lieu la notion de différence divisée. La différence divisée d'ordre zéro de la fonction f par rapport à x_i notée par $f[x_i]$, est simplement la valeur de f à x_i :

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{11}$$

La différence divisée du premier ordre de la fonction f par rapport à x_i et x_{i+1} notée par $f[x_i, x_{i+1}]$, est définie par :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \tag{12}$$

La différence divisée du second ordre de la fonction f par rapport à x_i , x_{i+1} et x_{i+2} notée par $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, est définie par :

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \tag{13}$$

De la même manière la différence divisée de l'ordre k de la fonction f par rapport à $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}$ et x_{i+k} notée par $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, est définie par :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{14}$$

Donc le polynôme d'interpolation peut s'écrire comme suit :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \tag{15}$$

I.2.3. Exemple

On donne les valeurs de la courbe de première aimantation $B(H)$ du Fer pur dans le tableau ci-dessous:

Induction magnétique B [H]	1.1353	1.3623	1.5893	1.8123
Champ magnétique H [A/m]	82.382	144.66	897.76	4581.7

- En utilisant la méthode de Lagrange, construire le polynôme d'interpolation qui permet d'interpoler ces points de données.
- Trouver la perméabilité relative de ce matériau pour une induction de 1.4 T.
- Mêmes questions en utilisant la méthode de Newton.

I.3. Intégration numérique

Très souvent le calcul explicite de l'intégrale, d'une fonction f continue sur $[a, b]$ dans \mathbb{R} , définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ peut se révéler très laborieux, ou tout simplement impossible à atteindre. Par conséquent, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de $I(f)$. Dans ces méthodes numériques, la fonction f , est remplacée par une somme finie. Dans ce cours nous allons présenter quelques méthodes usuelles (Trapèzes et Simpson) dédiées à l'intégration numérique.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, par définition son intégrale se calcule suivant :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (16)$$

Notons que l'expression analytique de $f(x)$ peut être connue comme elle peut être inconnue.

L'idée de base de cette méthode, consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$. Dans le cas où les sous-intervalles sont équidistants, on écrira $\Delta x = (b - a)/n$.

I.3.1. Méthode composite des Trapèzes

Cette méthode est basée sur l'interpolation, de chaque sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, par un polynôme de degré un. En d'autres mots, sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction f continue et dérivable sur $[a, b]$, est substituée par la droite joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Le schéma numérique de la méthode composite des Trapèzes est donnée par :

$$I(f) = \frac{\Delta x}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right) \quad (17)$$

La méthode composite des Trapèzes fournit une bien meilleure précision que la méthode classique du point milieu.

I.3.2. Méthode composite de Simpson

Cette méthode est basée sur l'interpolation, de chaque sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, par un polynôme de degré deux. Ainsi, la fonction f est substituée par ce un polynôme du second qui définit donc un arc de parabole passant par les points $(x_k, f(x_k))$, $((x_{k+1} + x_k)/2, f((x_{k+1} + x_k)/2))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Le schéma numérique de la méthode composite de Simpson est donnée par :

$$I(f) = \frac{\Delta x}{6} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) + f(b) \right) \quad (18)$$

La méthode composite de Simpson fait mieux que celle des Trapèzes. Ceci provient du fait qu'elle pondère plus le point central.

I.3.3. Exemple

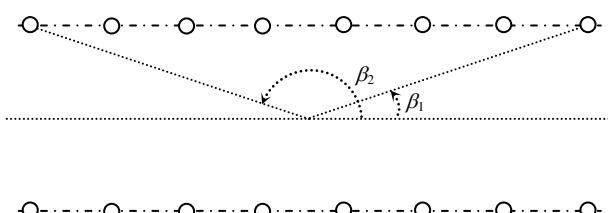
L'amplitude de l'induction magnétique dans le centre de l'axe d'une bobine (voir figure ci-dessous), est donnée par l'intégrale suivante:

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta \, d\beta$$

Où μ_0 est la perméabilité de l'air ($4 \pi 10^{-7}$ [H/m]), n est le nombre de tours (200) et I est le courant (1 [A]).

Si la bobine est suffisamment longue de tel sorte que $\beta_1 \approx 0$ et $\beta_2 \approx \pi$.

Calculer par la méthode composite des trapèzes et Simpson l'intégrale qui donne la valeur de B , en utilisant six intervalles chaqu'un égal à $\pi/6$.



I.4. Résolution des équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles sont utilisées pour modéliser les problèmes de sciences et d'ingénierie qui impliquent la variation d'une grandeur par rapport à une autre. La plus part de ces problèmes nécessitent la solution d'un problème avec une valeur initiale. Cependant, dans la majorité des cas l'équation différentielle qui modélise le problème est trop compliquée à résoudre d'une manière exacte. Donc il existe deux approches :

La première approche consiste à s' simplifier l'équation différentielle en une équation qui peut être résolue d'une manière exacte, ensuite utiliser la solution de cette équation différentielle pour remonter à l'équation différentielle d'origine.

La deuxième approche consiste à utiliser les méthodes d'approximation pour résoudre l'équation différentielle. Dans cette section du cours cette deuxième approche est adoptée.

Le problème de résolution des équations différentielles avec une valeur initiale doit être posé comme suit:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha \quad (19)$$

Où : α représente la valeur initiale.

Une solution continue de ce problème ne peut pas être obtenue en utilisant la deuxième approche susmentionnée, mais plutôt des approximations sont obtenues sur des valeurs appelées points du maillage. Une fois une approximation de la solution est obtenue sur les points du maillage les solutions sur les autres points sont trouvées par interpolation.

Pour les méthodes que nous allons voir dans cette section on suppose que les points du maillage sont réparties de manière égale tout au long de l'intervalle $[a, b]$. Cette condition est assurée par le choix d'un nombre entier positif N et en sélectionnant les points du maillage comme suit :

$$t_i = a + i h \quad i = 0, 1, \dots, N \quad h = (b - a)/N \quad (20)$$

Où : h représente la distance entre deux points t_i et t_{i+1} ($t_{i+1} = t_i + h$) du maillage et il est appelé le pas.

I.4.1. Méthode d'Euler

C'est la méthode la plus simple, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h f(t_i, w_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (21)$$

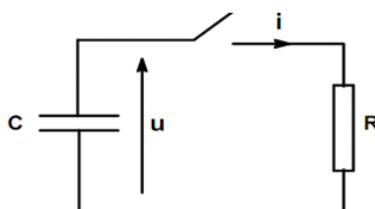
Où w représente l'approximation de la solution y . Etant connue w à l'instant initial ($t = 0$), elle peut être ainsi déterminée à tout instant ultérieur.

La méthode d'Euler modifiée est donnée par :

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))] \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (22)$$

I.4.1.1. Exemple

Le circuit ci-dessous montre la décharge d'un condensateur dans une résistance.



- Donner l'équation différentielle du circuit (en fonction de u).
- Résoudre cette équation par la méthode d'Euler.
- Comparer la solution numérique avec la solution analytique ($t \in [0 \ 1]$).

Avec: $RC=0.5$, $u(t=0)=5\text{V}$, $dt=0.2\text{s}$.

I.4.2. Méthode de Runge-Kutta

Les formules de Runge-Kutta sont parmi les formules à pas unique. L'une des formules les plus simples est obtenue en prenant la relation de Runge-Kutta d'ordre 2 qui est donnée par :

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h f \left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i) \right) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (23)$$

Notons que pour évaluer w_{i+1} , f doit être calculée 2 fois.

La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, notée dans la littérature comme RK 4, est l'une des méthodes les plus populaires et largement la plus utilisée dans le domaine de l'ingénierie. Elle garantit une précision suffisante dans la plupart des applications et est suffisamment stable. Un autre avantage de ce procédé est également la simplicité de l'algorithme de calcul.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par :

$$\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
k_1 &= h f(t_i, w_i) \\
k_2 &= h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= h f(t_{i+1}, w_i + k_3) \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{24}$$

Cette formule nécessite 4 évaluations de f , ce qui prend du temps pour les fonctions compliquées.

Les formules de calcul exposées ci-dessus peuvent être généralisées pour le cas d'un système de k équations différentielles du premier ordre.

I.4.2.1. Exemple

Utiliser la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 pour donner une approximation de la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

Dans l'intervalle $x \in [0 \ 0.5]$. Avec: $y(x = 0) = 2$, $dx = 0.1$.

Comment doit-on écrire l'équation différentielle du second ordre ci-dessous, pour la résoudre avec Runge-Kutta d'ordre 4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Avec: $y(x_0) = y_0$, $dy/dx(x_0) = y'_0$.

I.4.3. Méthode d'Adams

Les formules d'Adams sont l'une des formules à pas multiples. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{3h}{2} f(t_i, w_i) - \frac{h}{2} f(t_{i-1}, w_{i-1}) \quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{25}$$

On remarque que w_1 ne peut pas être déterminée car on ne connaît pas w_{-1} . Pour démarrer cette méthode, il faut utiliser une autre méthode pour évaluer w_1 (Méthode D'Euler, RK2,...).