Chapitre 2 :

# Calcul des prédicats

On se donne un ensemble $U$ et une proposition (affirmation $P(x)$ dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments $x$ de $U$

Par exemple : considérons l'affirmation " $x^2 \leq 1$ " dépendant d'un réel $x$. On ne peut pas dire que la phrase " $x^2 \leq 1$ " est vrai ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut $x$.

Cette sorte d'affirmation qui porte sur des symboles représentant des variables ou inconnus d'un ensemble fixé s'appelle un prédicat

On peut voir un prédicat comme une application $P$ qui associé une proposition $P(x)$ à chaque élément $x$ d'un ensemble $U$.

Définition : $U$ est l'univers du prédicat $P$.

Exple : " Le nombre complexe $z$ a pour module 3". (Univers $\mathbb{C}$)

" La relation $R$ est refléxive ". (Univers : ensemble des relations.)

Poid d'un prédicat : Quand l'univers d'un prédicat est un produit d'ensembles, le prédicat apparaît comme une fonction de plusieurs variables.

Définition le nombre de variables est appelé le poid du prédicat.

Exple le prédicat " $a+b=5$ " porte sur un objet le couple $(a,b)$ donc il a un poid 1 sur $\mathbb{N}^2$

Le prédicat " $a+b=5$ " porte sur deux objets ~~le couple~~ les entiers $a$ et $b$ donc il a un poids 2 sur $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Le poid dépend de l'ensemble de définition.

**Assigner une variable** En assignant une ~~variable~~ valeur à l'une des variables d'un prédicat de poids n, on obtient un prédicat de poid n-1.

Par convention, on convient que les propositions sont les prédicats de poids 0, pour que la règle s'applique pour n=1.

**Exple** : le prédicat "$a+b=5$" est de poids 2.

En remplaçant a par 3 on obtient un nouveau prédicat de poids 1 "$3+b=5$"

En prend $b=9$. on obtient un nouveau prédicat de poid 0.

"$3+9=5$" : proposition fausse.

**Ajouter des variables**

À partir d'un prédicat de poid n dont l'univers est $A_1 \times \dots \times A_n$ et d'un ensemble B, on peut créer un prédicat Q de poids n+1 dont l'univers $A_1 \times \dots \times A_n \times B$. Il suffit de dire que $Q(A_1, \dots, A_n, B)$ est la même chose que $P(A_1, \dots, A_n)$

les nouvelles variables n'ont pas d'influence sur les propositions obtenues.

**Exple** : $P(n)$ : « n est pair » prédicat sur $\mathbb{N}$ de poid 1.

On obtient Q de poid 2 sur $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ en déclarant

$Q(n,x)$ : « dans le couple $(n,x)$, n est pair ».

**Connecter les prédicats** :

On peut connecter les prédicats qui portent sur le même univers.

- $\neg P$ associe $\neg P(x)$ à x
- $P \wedge Q$ " à x la prop. $P(x) \wedge Q(x)$.
- $P \vee Q$ " " " $P(x) \vee Q(x)$.

Exple : Avec les prédicats

P : « n est pair », Q : « n est le carré d'un entier naturel »

On peut obtenir :

$\neg P$ : « n n'est ~~pass~~ pair ».

$P \vee Q$ : « n est pair ou n est le carré d'un entier naturel »

$P \wedge Q$ : « n est pair et n est " " " »

Pour énoncer un prédicat, on donne un nom à ses variables.

Le nom n'est pas important, mais lorsque on connecte les prédicats les noms des variables sont important.

Exple

$P(n)$ : « n est pair »

$Q(m)$ : « m est divisible par 3 »

Pour faire la connexion entre les deux, on les transforme en prédicat de taille 2 :

$R(n,m)$ : « n est pair »

$S(n,m)$ : « m est divisible par 3 »

Pour obtenir $R(n,m) \vee S(n,m)$.

## Quantificateur Universel :

### Définition

L'affirmation « Pour tous les éléments $x$ de $U$, la proposition $P(x)$ est vraie » est une proposition (elle est soit vraie soit fausse).

On la note $\forall x \in U, P(x)$. on lit " quelque soit $x$, $P(x)$ "

Le symbole " $\forall$ " s'appelle le quantificateur universel.

Exple : (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x^2+1>0}_{P(x)}$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$)

## Quantificateur existentiel :

### Définition

L'affirmation : « il existe au moins un élément $x$ de $U$ telle que la proposition $P(x)$ est vraie » est une proposition, (elle est soit vraie soit fausse).

On la note en abrégé : « $\exists x \in U, P(x)$ »

Le symbole " $\exists$ " s'appelle le quantificateur existentiel

### Exple

« $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2=-1)$ » est fausse.

" $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2-n>n)$ " est vraie. (on prend par exple $n=3$)

Exple 2 À partir du prédicat $P(n)$ = " L'entier $n$ est pair " on peut fabriquer deux proposition :

- " $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$ " : proposition est vraie. (il existe un entier pair)
- " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ " : " " fausse. (tout entier est pair).

## Quantificateur d'unique existence.

Définition : L'affirmation : "il existe un et un seul élément $x$ de $\mathcal{U}$ tel que la proposition $P(x)$ est vraie" est une proposition.

On écrit en abrégé : " $\exists!\, x \in \mathcal{U},\ P(x)$ "

ou " $\exists!\, x \in \mathcal{U} \,/\, P(x)$ "

le / ou la virgule se lit tel que.

Le quantificateur $\exists!$ s'appelle le quantificateur d'unique existence

Exple :

- " $\exists!\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x$ " $(x = 0)$

## Valeur de vérité.

Soit $P$ un prédicat sur $\mathcal{U} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

" $\forall x \in \mathcal{U},\ P(x)$ " se confond avec $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_n)$

" $\exists x \in \mathcal{U},\ P(x)$ " se confond avec $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \dots \vee P(e_n)$.

Quand $\mathcal{U}$ est infini, on peut toujours voir $\forall x \in \mathcal{U},\ P(x)$ comme une conjonction infinie de propositions et $\exists x \in \mathcal{U},\ P(x)$ comme une disjonction infinie de propositions.

Si $\mathcal{U} = \emptyset$ alors $\exists x \in \mathcal{U},\ P(x)$ est fausse et $\forall x \in \mathcal{U},\ P(x)$ est vraie.

Remarque les symboles $\forall$ et $\exists$ sont le A (initial de "all") et E (« exist ») que l'on a retournés.

## Variables libres et liées

Dans le prédicat $P(x)$ la variable $x$ est libre car on peut encore lui attribuer une valeur.

Dans les propositions $(\forall x \in \mathcal{U},\ P(x))$ et $(\exists x \in \mathcal{U},\ P(x))$, la variable $x$ est liée.

Exple : Soit $P(x, y)$ un prédicat de deux variables $x, y$.

" $P(x, y)$ " $x, y$ est libre

" $\forall x \in \mathcal{U}, P(x, y)$ " $x$ est liée, $y$ est libre

" $\forall x \in \mathcal{U}\ \forall y \in \mathcal{U},\ P(x, y)$ " $x, y$ sont liée.

$P(x)$ : " $x^2 \geq 1$ " $x$ libre

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$ $x$ liée

$\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ liée

## Propriétés des quantificateurs avec une variable :

**Théorème 1 : (La négation des quantificateurs).**

Soit $P(x)$ un prédicat de l'univers est $\mathcal{U}$.

① $\neg(\forall x \in \mathcal{U}, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathcal{U}, P(x))$

② $\neg(\exists x \in \mathcal{U}, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}, P(x))$

**Exple :**

(f est continue en $x_0$) $\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, (\underbrace{|x - x_0| < \alpha}_{P} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{Q})\right)$

Sa négation :

(f n'est pas continue en $x_0$) $\Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in D_f ; (|x - x_0| < \alpha) \wedge (|f(x) - f(x)| \geq \varepsilon)\right)$

> **Méthode générale**
> On remplace $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, et le prédicat par sa négation.

**Théorème 2** Soit $P(x)$ un prédicat de l'univers $\mathcal{U}$. On a les propriétés suivante :

① $(\forall x \in \mathcal{U}, (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathcal{U}, P(x)) \wedge (\forall x \in \mathcal{U}, Q(x))$

② $(\forall x \in \mathcal{U}, P(x) \vee Q(x)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (\forall x \in \mathcal{U}, P(x)) \vee (\forall x \in \mathcal{U}, Q(x))$

③ $(\exists x \in \mathcal{U}, P(x) \wedge Q(x)) \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} ((\exists x \in \mathcal{U}, P(x)) \wedge (\exists x \in \mathcal{U}, Q(x))$

④ $(\exists x \in \mathcal{U}, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in \mathcal{U}, P(x)) \vee (\exists x \in \mathcal{U}, Q(x)))$

Dans le ② et ③ il ne ~~existe~~ trouve pas d'équivalence mais seulement ~~une~~ implication.

Pour le comprendre, commençons par analyser le langage courant.

La phrase, « dans une classe il existe une personne qui est un garçon et une autre personne qui est une fille » est vraie, mais une même personne ne peut pas jouer les deux rôles en même temps. Ou encore la phrase « il existe un élève qui est un garçon et une fille » est fausse.

De même dans la phrase : « Dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille » est vraie mais la phrase « tout élève est un garçon et tout élève est une fille » est fausse.

Exple :

(1) $(\exists x \in \mathbb{R} ; \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0)$

proposition vraie car $\exists x = \frac{\pi}{2}$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\exists x = 0$, $\sin x = 0$

$(\exists x \in \mathbb{R} ; \cos x = 0$ et $\sin x = 0)$ proposition fausse

car $x$ doit être le même nombre.

~~$\exists x \in \mathbb{R}$~~, ~~co~~

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone (c-à-d) croissante ou décroissante.

$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leqslant b) \Rightarrow (f(a) \leqslant f(b)))$ ou $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)))$

et ne s'écrit pas :

$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leqslant b) \Rightarrow ((f(a) \leqslant f(b))$ ou $(f(a) \geqslant f(b))))$

cette deuxième prop est vérifiée par toute fonction.

par exple $x \longmapsto x^2$. $(0 \leqslant 1) \Rightarrow (f(0) \leqslant f(1)$ ou $f(0) \geqslant f(1))$

(3) On considère deux fcts $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on suppose que $f \times g = 0$

Peut-on affirmer que $f = 0$ ou $g = 0$ ? Il suffit de considérer deux

fcts $f$ et $g$ t.q.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

$(fg = 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0))$ (I)

$\not\Downarrow \; \Uparrow$

$(f = 0$ ou $g = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ (II)

les prop. (I) et (II) ne sont pas équivalentes

Résumé :

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »

mais on peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et »

## Propriétés des quantificateurs avec deux variables :

Dans ce qui suit, on considère le prédicat $P(x, y)$ de deux poids sur l'univers $\mathcal{U}$ :

**Théorème** On a les propriétés suivantes :

① $((\forall x \in \mathcal{U}), (\forall y \in \mathcal{U}), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in \mathcal{U}), (\forall x \in \mathcal{U}), P(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, P(x,y))$

② $((\exists x \in \mathcal{U}), (\exists y \in \mathcal{U}), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in \mathcal{U}), (\exists x \in \mathcal{U}), P(x,y))$

$\Leftrightarrow (\exists (x,y) \in \mathcal{U}^2 ; P(x,y))$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

**Théorème :** Si la proposition suivante :

« $\exists x \in \mathcal{U}, \forall y \in \mathcal{U}, P(x,y)$ » est vraie

alors la proposition « $\forall y \in \mathcal{U}, \exists x \in \mathcal{U}, P(x,y)$ » est vraie.

mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

On ne peut pas permuter des quantificateurs de nature différent

**Exple.**

① $A$ est borné $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, m \leq x \leq M$

$\Rightarrow \forall x \in A, \exists m, M \in \mathbb{R}, m \leq x \leq M.$

Quand on écrit $(\exists x, \forall y)$ l'élément $x$ est fixé ou fourni une bonne fois pour toutes avant les $y$, il est donc constant quand $y$ varie

② $\overset{E \to F}{f}$ est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E ; f(x) = y$.

Quand on écrit $(\forall y, \exists x)$ l'élément $x$ est fourni après chaque $y$

Il dépend de $y$ et peut donc varier quand $y$ varie