

Les paradoxes

La théorie des ensembles a été introduite par Georg Cantor. Elle suppose que les ensembles contiennent des éléments, et on écrit " $x \in A$ " pour dire que x est un élément de A . Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments. Autrement dit, pour connaître un ensemble il faut savoir dire quels en sont les éléments. Ainsi, on a les présentations équivalentes

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{a, b, a, c, a, b, a\}$$

d'un même ensemble qui contient les trois éléments a , b et c .

1. Le paradoxe de Cantor (1899)

Dans sa lettre de 1899, Cantor rapporta aussi ses études d'autres exemples de « multitudes inconsistantes ». Parmi ceux-ci, le Paradoxe de Cantor, aussi connu sous le nom de Paradoxe de l'Ensemble de tous les Ensembles, reste l'un des plus célèbres de la théorie des ensembles moderne.

Théorème de cardinalité Soit E un ensemble fini de cardinal n . L'ensemble des parties de E que l'on note $P(E)$ est de cardinal strictement supérieur à celui de E

$$\text{card}(E) < \text{card}(P(E)).$$

Lorsque E est l'ensemble de tous les ensembles, les éléments de $P(E)$ sont des ensembles, donc ils doivent appartenir à E . Ainsi doit-on avoir $P(E) \subset E$. Mais alors, $\text{card}P(E) \leq \text{card}E$, contredisant le résultat de Cantor. Il fallut bien se rendre à l'évidence : l'ensemble E n'en était pas un ensemble et le théorème de Cantor demeure la justification de ce point : la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

2. Le paradoxe de Russell

La théorie des ensembles telle que formulée par Cantor n'était pas assez précise. Bertrand Russell l'a mis en évidence en soulignant qu'elle donnait lieu au paradoxe suivant : On considère l'ensemble "de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-même". En formule, c'est

$$A = \{x; x \notin x\}$$

La question qui se pose est de savoir si

$$A \in A \quad \text{ou} \quad A \notin A.$$

Or on constate (avec Russell) que

$$A \in A \Rightarrow A \notin A,$$

et réciproquement ! C'est là le paradoxe.

Pour tout ensemble E , il existe toujours au moins un objet F n'appartenant pas à E . Autrement dit rien ne contient tout et la collection de tous les objets n'est pas un ensemble.

2. Le paradoxe du menteur

Attribuons à Épiménide (poète crétois) le propos "Tous les Crétains sont des menteurs". Ceci était considéré par les philosophes antiques comme un paradoxe puisqu'il échappait au principe de noncontradiction. Si son assertion est vraie il ment car il est Crétain et si il ment son assertion est vraie. Cette affirmation se contredit donc elle-même.