Université Mohammed Seddik BENYAHIA de Jijel
Département de mathématiques
Master 2, Analyse Fonctionnelle
Module : Introduction à l'Analyse Multivoque
Enseigné par D. Azzam-Laouir

Examen de courte durée
14/01/2021

Exercice n°1. (3 points)
Soient X, Y deux ensembles non vides, $F, G : X \rightrightarrows Y$ deux m-a et $V \subset Y$. Montrer que :
1) $(F \cup G)_+^{-1}(V) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V)$.
2) $(F \cup G)^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V)$.
3) $F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V) \subset (F \cap G)_+^{-1}(V)$.
4) $(F \cap G)^{-1}(V) \subset F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V)$.

Exercice n°2. (3 points)
Soit $(A_n)_n \subset \mathbb{R}$ tel que

$$A_n = \begin{cases} \{0\} & si\ n \text{ est pair} \\ \{0,1\} & si\ n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculer $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

Exercice n°3. (4 points)
Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ la m-a définie par :

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1] & si\ x \neq 0 \\ \{0\} & si\ x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que F est s.c.i sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas s.c.s au point $x_0 = 0$.
2) Donner une sélection de F.

Solution

Exercice n°1.
1)

$$\begin{aligned} (F \cup G)_+^{-1}(V) &= \big\{x \in X :\ (F \cup G)(x) \subset V\big\} = \big\{x \in X :\ F(x) \cup G(x) \subset V\big\} \\ &= \big\{x \in X :\ F(x) \subset V \ \wedge\ G(x) \subset V\big\} \\ &= \big\{x \in X :\ F(x) \subset V\big\} \cap \big\{x \in X :\ G(x) \subset V\big\} \\ &= F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
(F\cup G)^{-1}(V) &= \big\{x\in X:\ (F\cup G)(x)\cap V\neq\emptyset\big\} = \big\{x\in X:\ (F(x)\cup G(x))\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ (F(x)\cap V)\cup(G(x)\cap V)\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ F(x)\cap V\neq\emptyset\vee G(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ F(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\cup\big\{x\in X:\ G(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= F^{-1}(V)\cup G^{-1}(V)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
F_+^{-1}(V)\cap G_+^{-1}(V) &= \big\{x\in X:\ x\in F_+^{-1}(V)\wedge x\in G_+^{-1}(V)\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ F(x)\subset V\wedge G(x)\subset V\big\}\\
&\subset \big\{x\in X:\ (F(x)\cap G(x))\subset V\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ (F\cap G)(x)\subset V\big\}\\
&= (F\cap G)_+^{-1}(V),
\end{aligned}$$

d'où, $F_+^{-1}(V)\cap G_+^{-1}(V)\subset(F\cap G)_+^{-1}(V)$.

4)

$$\begin{aligned}
(F\cap G)^{-1}(V) &= \big\{x\in X:\ (F\cap G)(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ (F(x)\cap G(x))\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ (F(x)\cap V)\cap(G(x)\cap V)\neq\emptyset\big\}\\
&\subset \big\{x\in X:\ (F(x)\cap V)\neq\emptyset\wedge(G(x)\cap V)\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in X:\ F(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\cap\big\{x\in X:\ G(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= F^{-1}(V)\cap G^{-1}(V),
\end{aligned}$$

d'où, $(F\cap G)^{-1}(V)\subset F^{-1}(V)\cap G^{-1}(V)$.

<u>Exercice n°2.</u>

1)

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n\geq 1}(\overline{\bigcup_{k\geq n} A_k})\\
&= (\overline{\bigcup_{k\geq 1} A_k})\bigcap(\overline{\bigcup_{k\geq 2} A_k})\bigcap(\overline{\bigcup_{k\geq 3} A_k})\bigcap\cdots\\
&= \big(\overline{\{0,1\}\cup\{0\}}\big)\bigcap\big(\overline{\{0,1\}\cup\{0\}}\big)\bigcap\big(\overline{\{0,1\}\cup\{0\}}\big)\bigcap\big(\overline{\{0,1\}\cup\{0\}}\big)\cdots\\
&= \{0,1\}\bigcap\{0,1\}\bigcap\{0,1\}\cdots=\{0,1\},
\end{aligned}$$

d'où, $\limsup_{n\to\infty} A_n=\{0,1\}$.

2)

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n\geq 1}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k\big)\\
&= \big(\bigcap_{k\geq 1} A_k\big)\bigcup\big(\bigcup_{k\geq 2} A_k\big)\bigcup\big(\bigcap_{k\geq 3} A_k\big)\bigcup\cdots\\
&= \big(\{0,1\}\cap\{0\}\big)\bigcup\big(\{0,1\}\cap\{0\}\big)\bigcup\big(\{0,1\}\cap\{0\}\big)\bigcup\big(\{0,1\}\cap\{0\}\big)\cdots\\
&= \{0\}\bigcup\{0\}\bigcup\{0\}\cdots=\{0\},
\end{aligned}$$

d'où, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\}$.

<u>Exercice n°3.</u>

1) Pour montrer que F est s.c.i sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que $F^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$. En effet, soit V un ouvert de $\mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
F^{-1}(V) &= \big\{x\in\mathbb{R}:\ F(x)\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[:\ [-1,1]\cap V\neq\emptyset\big\}\cup\big\{x=0:\ \{0\}\cap V\neq\emptyset\big\}\\
&= \big\{x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[:\ [-1,1]\cap V\neq\emptyset\big\}\cup\big\{x=0:\ 0\in V\neq\emptyset\big\}.
\end{aligned}$$

i) Si $0\in V$ et donc $[-1,1]\cap V\neq\emptyset \Longrightarrow F^{-1}(V)=\mathbb{R}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.
ii) Si $0\notin V$ et $[-1,1]\cap V\neq\emptyset \Longrightarrow F^{-1}(V)=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.
iii) Si $[-1,1]\cap V=\emptyset$ et donc $0\notin V \Longrightarrow F^{-1}(V)=\emptyset$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.
Par suite, F est s.c.i.
Montrons maintenant qu'elle n'est pas s.c.s au point $x_0=0$. Il suffit de montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $F(x_0)\subset U$ et pour tout voisinage Ω de x_0, il existe $x\in\Omega$ et $F(x)\not\subseteq U$.
En effet, soit $U=]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, nous avons $F(0)=\{0\}\subset U$, mais pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, par exemple $x=\frac{\varepsilon}{2}$, et $F(x)=[-1,1]\not\subseteq]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[=U$.
Il s'en suit que F n'est pas s.c.s au point $x_0=0$.

2) On dit que la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une sélection de F si $f(x)\in F(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Par exemple les fonctions $x\longmapsto f(x)=\sin x$, $x\longmapsto g(x)=\frac{|x|}{1+|x|}$ sont des sélections de F.