Chapitre 03

Dynamique relativiste

1) **Introduction**

Compte tenu de la relativité de l'espace et du temps, il est impératif de réexaminer plusieurs concepts tels que la masse et l'impulsion. Ainsi, en se basant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste, nous allons voir quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte sur ces concepts par rapport au traitement de la dynamique de Newton.

2) **Notion de quadri-vecteur**

On peut considérer l'ensemble des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement comme les composantes d'un rayon vecteur quadri-dimensionnel noté $\underline{r}$ (4-*vecteur de position*) dans un espace quadri-dimensionnel. Si on note x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ ces composantes avec

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \ ,$$

on écrit alors le 4-vecteur de position:

$$\underline{r} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, \overrightarrow{r}) \ , \tag{1}$$

où $\overrightarrow{r}$ est le vecteur de position ordinaire.

Ce 4-vecteur se transforme donc selon une transformation de Lorentz comme

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

qui s'écrit simplement comme

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu_{\ \nu} x^\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

où $L^\mu_{\ \nu}$ est un élément de matrice de Lorentz:

$$[L^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ., \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \text{indice de la ligne} \\ \nu = \text{indice de la colonne} \end{array} \right.$$

Définition: On général, on appelle quadri-vecteur $\underline{a}$ de composantes a^{μ}, $\mu = 0,1,2,3$ un objet défini dans l'espace de Minkowski, qui se transforment selon la transformation de Lorentz comme

$$a'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu}$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit deux types de composantes des quadivecteurs, qu'on désigne par les lettres a^{μ} et a_{μ} (indices placés en haut et en bas). On doit ainsi tenir compte des égalités suivantes:

$$a^{0} = a_{0}, \quad a_{i} = -a^{i}, \quad i = 1,2,3$$

Le produit scalaire de deux 4-vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est défini comme

$$\begin{aligned}
\underline{a}.\underline{b} &= \sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu} b_{\mu} \\
&= a^{0} b_{0} + a^{1} b_{1} + a^{2} b_{2} + a^{3} b_{3} \\
&= a^{0} b^{0} - a^{1} b^{1} - a^{2} b^{2} - a^{3} b^{3} \\
&= a^{0} b^{0} - \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}
\end{aligned}$$

Le carré du 4-vecteur de position est donné par l'expression

$$\begin{aligned}
\underline{r}^{2} = \underline{r}.\underline{r} &= \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu} x_{\mu} \\
&= \left(x^{0}\right)^{2} - \left(x^{1}\right)^{2} - \left(x^{2}\right)^{2} - \left(x^{3}\right)^{2} \\
&= c^{2} t^{2} - \overrightarrow{r}^{2}.
\end{aligned}$$

qui est une quantité invariante par transformation de Lorentz.

Les composantes a^{α} (indice en haut) sont dites composantes *contravariantes* et les quantités a_{α} (indice en bas) composantes *covariantes.*

Convention: On désigne généralement la somme précédente par

$$\sum_{\alpha=0}^{3} a^{\alpha} b_{\alpha} = a^{\alpha} b_{\alpha}.$$

Le signe de sommation étant omis. Cela correspond à la rêgle générale selon laquelle la répétition d'un indice dans une expression sous-entend une sommation (convention d'Einstein). Attention ! : on n'applique la convention de sommation qu'entre une paire d'indices dont l'un est covariant et l'autre contravariant.

3) **Quadri-vitesse**

On défini la vitesse quadri-dimensionnelle (4-vitesse) $\underline{\upsilon}$ d'une particule comme

$$\underline{\upsilon} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} \ , \tag{3}$$

où $\underline{r}$ est un 4-vecteur et $d\tau$ et le temps propre de la particule. Les composantes de $\underline{\upsilon}$ sont alors

$$\upsilon^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Soit un référentiel $(\mathcal{R})$ supposé fixe. On peut introduire à tout instant un référentiel $(\mathcal{R}')$ rigidement lié à la particule en mouvement. Pendant l'instant dt on peut supposer que $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ sont Galiléens. Notons que, par rapport au référentiel $(\mathcal{R}')$ la particule mobile est au repos; c'est-à-dire $dx' = dy' = dz' = 0$.

Les intervalles dans les deux référentiels s'écrivent:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ \text{et} \ \ ds'^2 &= c^2 d\tau^2. \end{aligned}$$

En vertu de l'invariance de l'intervalle, $ds^2 = ds'^2$, on a

$$c^2 d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ ,$$

c'est-à-dire

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) \ ,$$

comme:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \overrightarrow{\upsilon}^2 = \upsilon^2,$$

$\overrightarrow{\upsilon}$ est la vitesse de la particule dans l'espace à trois dimensions. Donc

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \ ,$$

or $\gamma_p = 1/\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$, il vient:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_p} \ , \tag{4}$$

Ainsi, les composantes υ^α sont:

$$\begin{aligned}
\upsilon^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma_p \frac{cdt}{dt} = \gamma_p c \\
\upsilon^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^1}{dt} = \gamma_p \frac{dx}{dt} = \gamma_p \upsilon_x \\
\upsilon^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^2}{dt} = \gamma_p \frac{dy}{dt} = \gamma_p \upsilon_y \\
\upsilon^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^3}{dt} = \gamma_p \frac{dz}{dt} = \gamma_p \upsilon_z \ .
\end{aligned}$$

La 4-vitesse s'écrit aussi

$$\underline{\upsilon} = \left(\upsilon^0, \upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3\right) = \gamma_p \left(c, \overrightarrow{\upsilon}\right). \tag{5}$$

On peut montrer que les composantes υ^α se transforment comme un 4-vecteur par rapport aux transformations de Lorentz.

Calculons maintenant le produit scalaire $\underline{\upsilon}^2$:

$$\begin{aligned}
\underline{\upsilon}^2 &= \upsilon^\alpha \upsilon_\alpha = \upsilon^0 \upsilon_0 + \upsilon^i \upsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, 3. \\
&= (\gamma_p)^2 c^2 - (\gamma_p)^2 \left(\overrightarrow{\upsilon}\right)^2 = c^2 (\gamma_p)^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \quad ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\underline{\upsilon}^2 = \upsilon^\alpha \upsilon_\alpha = c^2.} \tag{6}$$

Cette quantité positive est bien invariante.

4) **<u>Quadri-vecteur accélération</u>**

Le quadri-vecteur accélération $\underline{a}$ est défini comme étant la dérivée du quadri-vecteur vitesse par rapport au temps propre:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{\upsilon}}{d\tau} \ , \tag{7}$$

ses composantes a^α sont données par :

$$a^\alpha = \frac{d\upsilon^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Il existe une propriété remarquable entre les 4-vecteurs vitesse et accélération:

$$\underline{a}.\underline{\upsilon} = a^\alpha.\upsilon_\alpha = \frac{d\upsilon^\alpha}{d\tau} \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\upsilon^\alpha \upsilon_\alpha\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(c^2\right) = 0.$$

En d'autres termes, la 4-accélération d'une particule est toujours orthogonale à sa 4-vitesses.

5) **Quadri-quantité de mouvement**

On définit le quadri-vecteur quantité de mouvement $\underline{p}$ (4-impulsion) comme suit:

$$\underline{p} = m\underline{v} \tag{8}$$

de composantes

$$p^\alpha = m v^\alpha$$

où m est la masse de la particule, ses composantes sont explicitement données par:

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_p mc \\ \gamma_p m \overrightarrow{v} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $v^\alpha v_\alpha = c^2$, on a:

$$\underline{p}^2 = p^\alpha p_\alpha = m^2 v^\alpha v_\alpha = m^2 c^2$$
$$\Rightarrow \boxed{p^\alpha p_\alpha = (p^0)^2 - (\overrightarrow{p})^2 = m^2 c^2}.$$

Autrement dit, le carré du 4-impulsion est une quantité invariante. La norme de $\underline{p}$ est donc

$$\boxed{\|\underline{p}\| = mc.} \tag{9}$$

6) **Energie relativiste**

Si on écrit la première composante du 4-impulsion comme:

$$p^0 = \frac{\text{énergie}}{\text{vitesse}} = \frac{E}{c} = m\gamma_p c, \tag{10}$$

où E est une énergie, il vient

$$E = m\gamma_p c^2 \quad \text{c'est-à-dire} \; \boxed{E = \tfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}. \tag{11}$$

On peut écrire également

$$p^\alpha p_\alpha = \left(p^0\right)^2 - (\overrightarrow{p})^2 \Rightarrow m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - (\overrightarrow{p})^2 \ ,$$

d'où la formule

$$\boxed{E^2 = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ .} \tag{12}$$

A la limite des faibles vitesses, $\upsilon << c$, on a:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = mc^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = mc^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) + ...$$
$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + ...$$

Cette formule remarquable montre qu'en mécanique relativiste l'énergie d'une particule libre ne s'annule pas pour $\upsilon = 0$ et possède une valeur finie égale à

$$\boxed{E_0 = mc^2\ ,} \tag{13}$$

c'est *l'énergie au repos* de la particule (dite aussi énergie de masse). C'est donc l'énergie associé à la masse m seule, indépendamment de tout mouvement. Un calcul numérique simple montre que cette énergie est considérable, soit par exemple:

$$m = 1kg \quad \text{alors} \quad E_0 = 9\times 10^{16}\ \ \text{J}\ \ !$$

L'énergie de masse traduit donc une *équivalence fondamentale* entre la masse et l'énergie (énergie $\leftrightarrows$ masse).

En outre, notons que

$$\begin{aligned} E &= m\gamma_p c^2 = mc^2 - mc^2 + m\gamma_p c^2 \\ &= mc^2 + (\gamma_p - 1)\, mc^2, \end{aligned}$$

ainsi, on définit l'énergie cinétique relativiste par

$$\boxed{T = (\gamma_p - 1)\, mc^2.} \tag{14}$$

7) **Cas des particules de masse nulle**

La masse est en relation d'équivalence avec l'énergie : l'une peut se transformer en l'autre et réciproquement. Alors, sous certaines conditions, la totalité de la masse d'une particule peut se convertir en énergie pure. Alors rien n'interdit d'imaginer une particule de masse nulle.

Ecrivons encore une fois l'équation

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

on constate alors que lorsque $v = c$ (cas du photon) l'énergie E devient infinie sauf si $m = 0$. Un photon est une particule de masse nulle (sans masse) et d'une énergie finie. Le vecteur 4-impulsion associé s'écrit:

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma_p mc \\ \gamma_p m v_x \\ \gamma_p m v_y \\ \gamma_p m v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\frac{v_x}{c} \\ \frac{E}{c}\frac{v_y}{c} \\ \frac{E}{c}\frac{v_z}{c} \end{pmatrix},$$

si cet photon se propage selon l'axe des x, alors

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

La formule $E^2 = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ de l'énergie s'écrit dans le cas du photon comme

$$\boxed{E = pc} \tag{16}$$

D'autre part, l'énergie est attribuée à la fréquence de l'onde électromagnétique ν par la relation de Max Planck

$$\boxed{E = h\nu} \tag{17}$$

où $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. On déduit des deux dernières relations la formule de De Broglie traduisant la dualité onde-corpuscule:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{18}$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde du rayonnement. Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est

$$E = \hbar\omega, \qquad \overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}$$

où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation et $\overrightarrow{k}$ le vecteur d'onde de module $k = 2\pi/\lambda = \frac{\omega}{c}$. Ainsi, le 4-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar\overrightarrow{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar k \\ \hbar\overrightarrow{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{p}^2 = p^\alpha p_\alpha = 0. \tag{19}$$

La norme du 4-vecteur énergie-impulsion d'un photon est nulle qui est en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

8) **Relation fondamentale de la dynamique relativiste**

On définit le quadri-vecteur force ou en bref la 4-force comme:

$$\underline{f} = \frac{d\underline{p}}{d\tau}, \tag{20}$$

où $d\tau = dt/\gamma$ est le temps propre, $\underline{p}$ est la 4-impulsion

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v}.$$

Donc on a

$$\underline{f} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\gamma \frac{d\gamma}{dt} \\ \gamma \overrightarrow{f} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{f} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

mais on peut montrer que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \overrightarrow{a} . \overrightarrow{v}, \qquad \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \text{accélération},$$

Ainsi, les composantes de la 4-force sont

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f^0 \\ \gamma \overrightarrow{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\frac{\gamma^4}{c^2} \overrightarrow{a} . \overrightarrow{v} \\ \gamma \overrightarrow{f} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

9) **Conservation de la quadri-quantité de mouvement**

Postulat: *Pour un système isolé la quadri-quantité de mouvement* $\underline{p}$ *est une quantité conservée au cours du temps.*

Exemple:

Considérons deux particules identiques de masse $2m$, l'une à une vitesse $\overrightarrow{v}$ suivant l'axe des x et l'autre est au repos. Ces particules entre en choc parfaitement mou pour former une particule de masse M de vitesse $\overrightarrow{v}'$ (suivant l'axe des x). Donner l'expression de la masse M.

Solution:

Avant le choc la masse totale est $2m$. Les 4-impulsions des deux particules sont

$$(\underline{p})_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_1} mc \\ \gamma_{p_1} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (\underline{p})_2 = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

après le choc la masse est M , alors on a

$$\underline{(p)}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} Mc \\ \gamma_{p_3} Mv' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur 4-impulsion est une quantité conservée (avant et après le choc) d'où

$$\underline{(p)}_1 + \underline{(p)}_2 = \underline{(p)}_3$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} (\gamma_{p_1} + 1)\, mc \\ \gamma_{p_1} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} Mc \\ \gamma_{p_3} Mv' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui donne

$$\begin{aligned} (\gamma_{p_1} + 1)\, m &= \gamma_{p_3} M \\ \gamma_{p_1} m\beta &= \gamma_{p_3} M\beta', \end{aligned}$$

prenons le carré puis faisons la différence

$$\left[(\gamma_{p_1} + 1)^2 - (\gamma_{p_1})^2 \beta^2\right] m^2 = \left[1 - (\beta')^2\right] (\gamma_{p_3})^2 M^2.$$

on aura

$$M = \sqrt{(2\gamma_{p_1} + 2)} m \geq 2m.$$

Une partie d'énergie cinétique s'est transformée en énergie de masse.

10) **Effet Compton**

Compton a observé que lorsqu'un faisceau des rayons X dur monochromatique (des photons très énergétiques) est diffusé par un bloc de graphite, le rayonnement diffusé se compose de deux composantes, l'une ayant la même longueur d'onde que le rayonnement incident et l'autre ayant une longueur d'onde légèrement plus longue. Compton a expliqué la présence du rayonnement de longueur d'onde plus longue en considérant la diffusion comme une collision élastique entre un photon unique et un électron libre au repos initialement. La collision est élastique dans le sens où l'énergie cinétique obtenue par l'électron est égale à l'énergie perdue par le photon.

Supposons un photon venant de la gauche et se dirigeant vers la droite suivant un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. Le photon est diffusé par un électron au repos dans une direction faisant un angle θ par rapport à la direction initiale (voir figure).

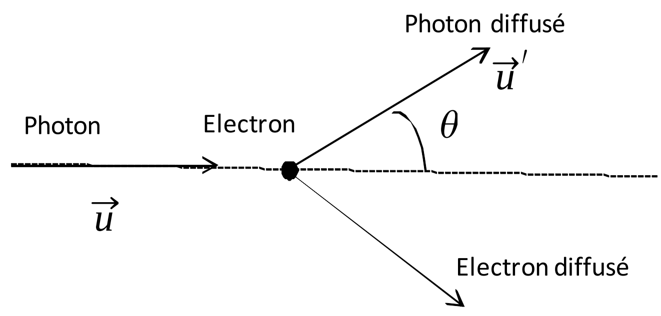


Fig. (09): $\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e'^-$

Pour déterminer la variation de la longueur d'onde du photon dû à la collision, nous allons utiliser la conservation de la 4-quantité de mouvement avant et après la collision

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma + \left(\underline{p}\right)_e = \left(\underline{p}'\right)_\gamma + \left(\underline{p}'\right)_e \tag{22}$$

Avant la collision:

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\overrightarrow{u} \end{pmatrix}, \quad \left(\underline{p}\right)_e = \begin{pmatrix} m_e c \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}.$$

Après la collision:

$$\left(\underline{p}'\right)_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix}, \quad \left(\underline{p}'\right)_e = \begin{pmatrix} \gamma_e m_e c \\ \overrightarrow{p'} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma + \left(\underline{p}\right)_e - \left(\underline{p}'\right)_\gamma = \left(\underline{p}'\right)_e \ ,$$

puis prenons le carré

$$\left[\left(\underline{p}\right)_\gamma + \left(\underline{p}\right)_e - \left(\underline{p}'\right)_\gamma\right]^2 = \left(\underline{p}'\right)_e^2 \ ,$$

explicitement:

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma^2 + \left(\underline{p}\right)_e^2 + \left(\underline{p}'\right)_\gamma^2 + 2\left(\underline{p}\right)_\gamma \cdot \left(\underline{p}\right)_e - 2\left(\underline{p}\right)_\gamma \cdot \left(\underline{p}'\right)_\gamma - 2\left(\underline{p}\right)_e \cdot \left(\underline{p}'\right)_\gamma = \left(\underline{p}'\right)_e^2 \ ,$$

mais pour un photon le carré du 4-vecteur quantité de mouvement (4-impulsion) est nul, c'est-à-dire:

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma^2 = 0, \qquad \left(\underline{p}'\right)_\gamma^2 = 0,$$

et pour l'électron on a:

$$\left(\underline{p}\right)_e^2 = m_e^2 c^2, \qquad \left(\underline{p}'\right)_e^2 = m_e^2 c^2 \ ,$$

il vient

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma . \left(\underline{p}\right)_e - \left(\underline{p}\right)_\gamma . \left(\underline{p}'\right)_\gamma - \left(\underline{p}\right)_e . \left(\underline{p}'\right)_\gamma = 0. \tag{23}$$

Effectuons les produits scalaires:

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma . \left(\underline{p}\right)_e = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\overrightarrow{u} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m_e c \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} = m_e E$$

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma . \left(\underline{p}'\right)_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\overrightarrow{u} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix} = \frac{EE'}{c^2} - \frac{EE'}{c^2}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}'$$

$$\left(\underline{p}\right)_\gamma . \left(\underline{p}'\right)_\gamma = \frac{EE'}{c^2}\left(1 - \cos\theta\right).$$

$$\left(\underline{p}\right)_e . \left(\underline{p}'\right)_\gamma = \begin{pmatrix} m_e c \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix} = m_e E' \ ,$$

remplaçons dans (23), il vient:

$$m_e E - \frac{EE'}{c^2}\left(1 - \cos\theta\right) - m_e E' = 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$m_e \left(E - E'\right) = \frac{EE'}{c^2}\left(1 - \cos\theta\right) \ ,$$

qui s'écrit aussi comme:

$$\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right) = \frac{1}{m_e c^2}\left(1 - \cos\theta\right).$$

L'énergie E est donnée en fonction de la constante de Planck et la fréquence par:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \ ,$$

on obtient finalement

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right) \ ,$$

ou bien

$$\boxed{\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \ ,} \tag{24}$$

où $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ est la longueur d'onde de Compton qui est de l'ordre de $2,4 \times 10^{-12} m$.

Après la diffusion, le photon dispersé à une énergie inférieure, et selon la relation de Planck a une fréquence plus faible c'est-à-dire et a une plus longue longueur d'onde. Cette expérience a mis clairement en évidence l'aspect corpusculaire de la lumière.

11) **<u>Référentiel du centre de masse</u>**

Le centre de masse (le barycentre) d'un ensemble de points matériels dans un référentiel $(\mathcal{R})$ d'origine O est donné par l'expression

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_i m_i}. \tag{25}$$

Si on prend le point G comme origine d'un nouveau référentiel noté $(\mathcal{R}^*)$, on a:

$$\overrightarrow{GG} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0} \ ,$$

puis dérivons par rapport au temps

$$\sum_i m_i \underbrace{\frac{\overrightarrow{GM}_i}{dt}}_{\overrightarrow{v}^*} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{v}^* = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i \overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{0} \ .} \tag{26}$$

Soit un système isolé de N particules indépendantes en mouvement dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Ainsi, il est possible de définir la somme des énergies et la somme des impulsions des différentes particules dans $(\mathcal{R})$

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i, \qquad \overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_i \ . \tag{27}$$

Par définition, le référentiel du centre de masse de ce système est le référentiel $(\mathcal{R}^*)$ en <u>translation</u> par rapport à $(\mathcal{R})$, dans lequel l'impulsion du système est nulle

$$\boxed{\overrightarrow{p}^* = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_i^* = \overrightarrow{0}.} \tag{28}$$

Le 4-vecteur énergie-impulsion du système dans $(\mathcal{R}^*)$ s'écrit alors

$$\underline{p}^* = \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} \ ,$$

avec $E^* = \sum_{i=1}^{N} E_i^*$ est l'énergie du système dans $(\mathcal{R}^*)$.

Remarque: puisque des particules comme le photon n'ont pas de masse, il s'ensuit que le terme "centre de masse" peut être ambigu. Il n'est donc pas possible de définir comme en mécanique classique, la position du centre de masse. Cette position sera définie par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{N} E_i}. \tag{29}$$

Soit $\overrightarrow{V}$ la vitesse de $(\mathcal{R}^*)$ par rapport à $(\mathcal{R})$ selon l'axe Ox. La transformation de Lorentz permet de passer de $(\mathcal{R})$ à $(\mathcal{R}^*)$. Si on suppose que $\overrightarrow{p}$ n'a qu'une composante suivant cet axe Ox, comme c'est effectivement le cas dans les accélérateurs de particules, alors

$$\begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

avec: $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, $\quad \beta = V/c$.

La deuxième équation du système (30) donne la vitesse de $(\mathcal{R}^*)$ par rapport à $(\mathcal{R})$:

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \frac{c^2}{E}\overrightarrow{p} \quad ,} \tag{31}$$

$\overrightarrow{V}$ est constante car E et $\overrightarrow{p}$ sont constantes puisque le système est isolé $\Rightarrow$ Le référentiel du centre de masse est donc galiléen. L'énergie du système dans $(\mathcal{R}^*)$ s'écrit en considérant maintenant la première équation du système (30) comme suit

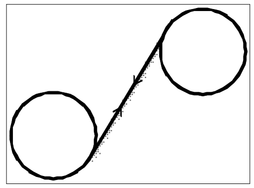
$$E^* = \frac{E}{\gamma} \Rightarrow \boxed{E^* < E}$$

$\Rightarrow$ La valeur d'énergie E^*, mesurée dans le référentiel du centre de masse, est inférieure à celle que l'on mesure dans $(\mathcal{R})$. La norme du 4-vecteur énergie-impulsion du système s'écrit

$$\frac{E^{*2}}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2. \tag{32}$$

on voit que l'énergie du système est <u>minimale</u> dans le référentiel du centre de masse.

Dans les collisionneurs de particules, pour fournir le minimum d'énergie à deux particules entrant en collision dans le référentiel du laboratoire $(\mathcal{R})$, il faut s'arranger pour que $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}^*)$ coïncident. Ceci est possible en utilisant des anneaux collisionneurs dont le principe est indiqué sur la figure ci-dessous:



Collision de deux particules venant en sens inverse

Dans ce cas les particules ont des vitesses opposées, et si $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ alors $E^* = E$.

12) **Collisions de particules**

Définitions:

i) Une collision entre particules est dite *élastique* si la nature et le nombre des particules sont conservés avant et après la collision.

ii) Une collision entre particules est dite *inélastique* si la nature et/ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Energie de seuil d'une collision inélastique

Définition: L'énergie de *seuil* de production de Q particules lors d'une collision inélastique, est l'énergie cinétique minimale $T_{\min}$ des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse $(\mathcal{R}^*)$.

Soit, par exemple, deux particules; le projectile A_1 et une cible A_2 au repos par rapport au référentiel fixe $(\mathcal{R})$. Supposons qu'après la collision apparaissent plusieurs particules A_3, A_4, A_5, ...etc, c-à-d:

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 + A_5 + ... \ , \tag{33}$$

pour que cette réaction de production ait lieu, il faut que l'énergie E^* du système de particules incidentes dans $(\mathcal{R}^*)$ soit supérieure ou égale à l'énergie au repos du système des particules formées

$$\boxed{E^* \geq \sum_f m_f c^2 \ ,} \tag{34}$$

où ici m_f , $f = 3, 4, 5, ...$ sont les masses des particules formées (après la collision).

Exercice d'application: Un faisceau de proton (P^+), d'énergie cinétique T, bombarde une cible de cuivre dont, les noyaux contiennent des protons pratiquement immobiles dans le référentiel $(\mathcal{R})$ du laboratoire. On obtient des antiprotons (P^-) particules de même masse

$M = 938$ Mev$/c^2$ que les protons mais de charge opposée, suivant la réaction nucléaire:

$$\underbrace{P^+}_{\text{proton accéléré}} + \underbrace{P^+}_{\text{proton au repos}} \to P^+ + P^+ + P^+ + P^-$$

1) Exprimer l'énergie totale E^* du système de particule dans le référentiel du centre de masse $(\mathcal{R}^*)$ en fonction de T et Mc^2.

2) En déduire, dans $(\mathcal{R})$, l'énergie cinétique minimale $T_{\min}$ des protons incidents pour produire des antiprotons suivant la réaction envisagée.

Solution:

1) Les 4-vecteurs énergie-impulsion avant la collision sont:

- Dans $(\mathcal{R})$: $\quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix}, \quad$ avec $E = T + 2Mc^2 =$ énergie totale.

et $\overrightarrow{p}$ l'impulsion totale qui est, ici, l'impulsion du proton incident.

- Dans $(\mathcal{R}^*)$: $\quad \underline{p}^* = \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$

Calculons $\left(\underline{p}\right)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \overrightarrow{p}^2$ et $\left(\underline{p}^*\right)^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2$. Comme $\left(\underline{p}\right)^2 = \left(\underline{p}^*\right)^2$ (invariance du carré scalaire du quadri-vecteur), il vient:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \overrightarrow{p}^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} E^{*2} &= E^2 - \overrightarrow{p}^2 c^2 \\ &\Rightarrow E^{*2} = \left(T + 2Mc^2\right)^2 - \overrightarrow{p}^2 c^2 \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Calculons $\overrightarrow{p}$: Pour le proton incident seul on a:

$$\begin{aligned} \left(\underline{p}\right)_1 = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix} &\Rightarrow \left[\left(\underline{p}\right)_1\right]^2 = \frac{(E_1)^2}{c^2} - \overrightarrow{p}^2 = M^2 c^2 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{p}^2 c^2 = E_1^2 - M^2 c^4, \end{aligned}$$

et $E_1 = T + Mc^2$ c-à-d:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \overrightarrow{p}^2 c^2 = \left(T + Mc^2\right)^2 - M^2 c^4 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{p}^2 c^2 = T\left(T + 2Mc^2\right). \end{aligned} \tag{36}$$

D'après (35) et (36) on déduit l'énergie E^*:

$$
\begin{aligned}
E^{*2} &= \left(T + 2Mc^2\right)^2 - T\left(T + 2Mc^2\right) \\
\Rightarrow E^* &= \sqrt{2Mc^2\left(T + 2Mc^2\right)} \qquad (37)
\end{aligned}
$$

2) Pour que la réaction de production de l'antiproton ait lieu, il faut que l'énergie du système de particules dans $(\mathcal{R}^*)$ soit supérieure ou égale à l'énergie au repos du système des 4 particules formées:

$$E^* \geq 4Mc^2$$

D'après (37) on a:

$$2Mc^2\left(E_c + 2Mc^2\right) \geq 16M^2c^4$$

donc

$$T \geq 6Mc^2$$

Le seuil d'énergie cinétique des protons incidents est donc:

$$T_{\min} = 6Mc^2$$

Application numérique: $T_{\min} = 5,63$ Gev.