Chapitre 3

Tenseur des déformations

1. Vecteur de déplacement

Au cours d'une transformation imposée par des sollicitations externe, le solide passe d'une configuration initiale notée C_0 à une configuration courante C_t à l'instant t. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des variations de longueur et des angles.

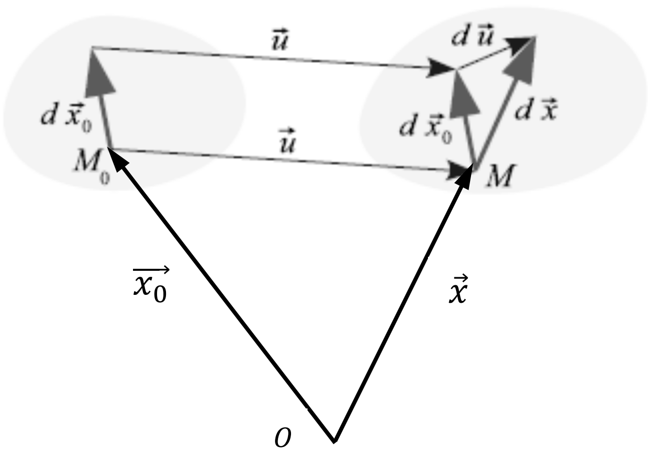
Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_0}$ valent :

$$\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{x_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur déplacement $\vec{u}$ du point M_0 est donné par :

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{u}(M_0) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$



Ainsi, les coordonnées du point M sont :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0, y_0, z_0) \\ y(x_0, y_0, z_0) \\ z(x_0, y_0, z_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{Bmatrix}$$

2. Tenseur des déformations

2.1. Tenseur gradient de transformation

Le vecteur déplacement infiniment petit $d\vec{u}$ se relie aux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}$ et $d\overrightarrow{x_0}$ par :

$$d\vec{x} = d\overrightarrow{x_0} + d\vec{u}$$

Ceci s'écrit sous forme matricielle :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\}$$

$$\{dx\} = [F]\{dx_0\} = ([L] + [I])\{dx_0\}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{bmatrix} \; ; \; [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

$[F]$ est le tenseur gradient de transformation (ou de déformation).

$[L]$ est le tenseur gradient de déplacement.

Le tenseur $[L]$peut être décomposé en sa composante symétrique $[\varepsilon]$ et sa composante antisymétrique $[\Omega]$:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T)$$

$$[\Omega] = \frac{1}{2}([L] - [L]^T)$$

2.2. Tenseur des dilatations

Le produit scalaire de deux vecteurs dans la configuration courante est donné par :

$$d\vec{x}.d\vec{x}' = \{dx\}^T\{dx'\} = \{dx_0\}^T[F]^T[F]\{dx_0'\} = \{dx_0\}^T[C]\{dx_0'\}$$

$[C] = [F]^T[F]$ est le tenseur des dilatations de Cauchy.

2.3. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Les longueurs des vecteurs $d\vec{x}$et $d\overrightarrow{x_0}$ sont respectivement ds et ds_0.

$$\begin{aligned} ds^2 - {ds_0}^2 &= d\vec{x}.d\vec{x} - d\overrightarrow{x_0}.d\overrightarrow{x_0} = \{dx\}^T\{dx\} - \{dx_0\}^T\{dx_0\} \\ &= \{dx_0\}^T([C] - [I])\{dx_0\} = 2\{dx_0\}^T[E]\{dx_0\} \end{aligned}$$

$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I])$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

Le tenseur de Green-Lagrange peut en deux composantes linéaire et non-linéaire :

$$[E] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T) + \frac{1}{2}([L]^T[L])$$

Linéaire Non linéaire

Les déplacements étant petits par rapport aux dimensions du solide, les dérivées partielles des déplacements étant petites devant l'unité ; le tenseur des déformations de Green-Lagrange $[E]$ se réduit en sa composante linéaire qui est la composante symétrique du tenseur gradient de déplacement $[\varepsilon]$.

$$[E] = [\varepsilon] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

3. Transformation des longueurs et des angles

Les longueurs des vecteurs $d\vec{x}$et $d\overrightarrow{x_0}$ sont respectivement ds et ds_0.

3.1. Dilatation

La dilatation λ en M_0dans la direction $\overrightarrow{n_0}$ est la quantité :

$$\lambda(\overrightarrow{n_0}) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^T[C]\{n_0\}}$$

Si $\overrightarrow{n_0} = \vec{\imath}$; $\lambda(\vec{\imath}) = \sqrt{C_{xx}}$

3.2. Déformation de Green-Lagrange

La déformation de Green-Lagrange ε_{GL} en M_0 dans la direction $\overrightarrow{n_0}$ est la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(\overrightarrow{n_0}) = \frac{ds^2 - {ds_0}^2}{2{ds_0}^2} = \{n_0\}^T[E]\{n_0\}$$

Si $\overrightarrow{n_0} = \vec{\imath}$; $\varepsilon_{GL}(\vec{\imath}) = E_{xx}$

3.3. Déformation nominale

La déformation nominale ε en M_0 dans la direction $\overrightarrow{n_0}$ est la quantité :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n_0}) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda - 1 = \sqrt{\{n_0\}^T[C]\{n_0\}} - 1$$

Si $\overrightarrow{n_0} = \vec{\imath}$; $\varepsilon(\vec{\imath}) = \sqrt{C_{xx}} - 1$

3.4. Transformation des angles

Soient deux vecteurs infiniment petits $d\overrightarrow{x_0}, d\overrightarrow{x_0}'$ de longueurs ds_0, ds_0' portés par les deux directions orthogonales $\overrightarrow{n_0}, \overrightarrow{n_0}'$. Ces vecteurs deviennent $d\vec{x}, d\vec{x}'$ de longueurs ds, ds' dans la configuration courante et font un angle φ entre eux.

Le glissement γ en M_0 dans les directions $\overrightarrow{n_0}, \overrightarrow{n_0}'$ est la quantité :

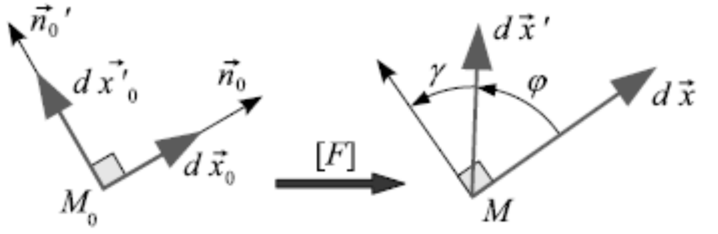
$$\gamma\left(\overrightarrow{n_0}, \overrightarrow{n_0}'\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$d\vec{x}.d\vec{x}' = ds_0\, ds_0' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = ds_0\, ds_0' \sin\varphi$$

Ainsi, on obtient :

$$\gamma\left(\overrightarrow{n_0}, \overrightarrow{n_0}'\right) = arcsin\frac{\{n_0\}^T[C]\{n_0'\}}{\lambda(\overrightarrow{n_0})\lambda(\overrightarrow{n_0}')}$$

Si $\overrightarrow{n_0} = \vec{\imath}\ et\ \overrightarrow{n_0}' = \vec{\jmath}\ ;\gamma(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = arcsin\frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx}}\sqrt{C_{yy}}}$



4. Déformations principales

Le tenseur des déformations linéarisé $[\varepsilon]$ étant symétrique à coefficients réels, il a trois valeurs propres. Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont orthogonaux entre eux.

Il existe donc en un point M d'un solide un repère orthonormé $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ dit repère principal. Les directions $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ sont les directions principales dans lequel le tenseur des déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les déformations principales. Elles sont les racines de l'équation caractéristique :

$$P\left(\varepsilon_p\right) = det\left(\varepsilon(M) - \varepsilon_p[I]\right) = 0$$

Soit :

$$det\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_1 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_2 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_3 \end{bmatrix} = 0$$

L'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$-\varepsilon_p{}^3 + I_1\varepsilon_p{}^2 - I_2\varepsilon_p + I_3$$

Où I_1, I_2, I_3 sont les invariants scalaires des déformations. Ils s'expriment par :

$$I_1 = tr[\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((tr[\varepsilon])^2 - tr[\varepsilon]^2) = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - {\varepsilon_{xy}}^2 - {\varepsilon_{xz}}^2 - {\varepsilon_{yz}}^2$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$I_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xx}{\varepsilon_{yz}}^2 - \varepsilon_{yy}{\varepsilon_{xz}}^2 - \varepsilon_{zz}{\varepsilon_{xy}}^2$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Les déformations principales doivent vérifier la relation suivante :

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon$$

6. Tenseur sphérique et déviateur

Pour un tenseur de second ordre quelconque, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs sphérique et déviateur. Ainsi pour le tenseur des déformations linéarisé $[\varepsilon]$, on écrit :

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_S] + [\varepsilon_D]$$

Où $[\varepsilon_S]$ est le tenseur sphérique des déformations.

$$[\varepsilon_S] = \left(\frac{tr[\varepsilon]}{3}\right)$$

Et $[\varepsilon_D]$ est le tenseur déviateur des déformations.

$$[\varepsilon_D] = ([\varepsilon] - [\varepsilon_S])$$