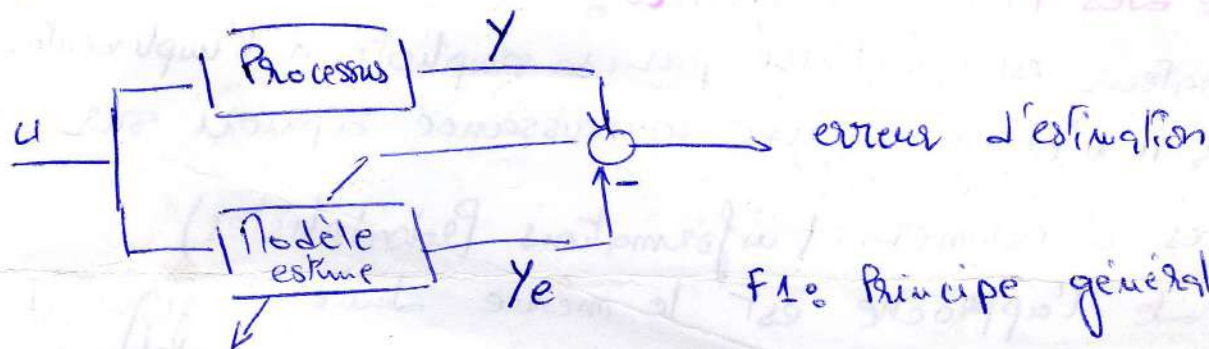


Chapitre 01 : identification basée sur l'erreur d'équation Normales carrées

L'identification est la recherche des paramètres de modèle mathématique d'un système donnée à partir de données et de connaissances disponibles a priori. Les paramètres peuvent avoir une signification physique ou non.
L'objectif de l'identification est de rendre les réponses du processus et le modèle estimé identiques pour des séquences d'entrées données comme suit :



F1: Principe générale d'identification

2- **Approche classique d'estimation** : cette approche est utilisable dans le cas où les paramètres à estimer sont de nature déterministe

3- **Approche bayésienne d'estimation** est la moins intuitive, on l'utilise lorsque on possède des connaissances a priori sur les paramètres à estimer (densité de probabilité)

1- **Modèle de mesure** : la relation qui relie la mesure y , les perturbation b et les paramètres à estimer θ s'appelle modèle de mesure, ce modèle a la forme :

$$y = h(\theta, b) \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}^m \\ b \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

L'apparition des perturbation $\Rightarrow$ impossible de déterminer la valeur exacte de θ à partir la mesure $y \Rightarrow$ estimation de θ par $\hat{\theta}(y)$.

obj: chercher la fonction d'estimation

4- Biais d'un estimateur: soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ , si le dernier est de nature déterministe, on appelle le biais d'un estimateur la fonction $B(\hat{\theta})$ de la forme:

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta \quad \text{--- (2)}$$

~~le biais permet alors est la différence~~
 $\Rightarrow$ un estimateur de bonnes qualités a un biais $\rightarrow$ valeur faible la plus possible

5- Variance d'un estimateur: elle la forme suivante.

$$V(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}\hat{\theta}^T] - E[\hat{\theta}]E[\hat{\theta}^T] \quad \text{--- (3)}$$

6- Méthode des Moindres carrés:

cette estimateur est caractérisé par sa simplicité à l'implémentation de plus il n'oblige aucune connaissance a priori sur les paramètres à estimer (informations probabilistes)
 le principe de l'approche est le même dans la figure ①

L'erreur d'estimation : $e = (y - h(\theta)) \quad \text{--- (4)}$

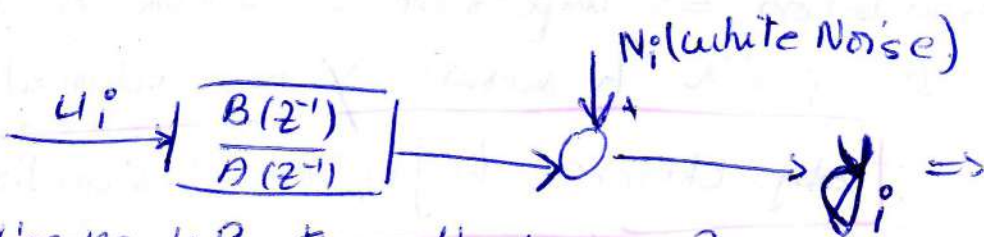
l'objectif est de chercher les paramètres qui minimise

le critère suivant : $J = (y - h(\theta))^T W (y - h(\theta)) \quad \text{--- (5)}$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

avec W : Matrice symétrique définie positive $W = W^T > 0$

Le cas linéaire / fonction



Δ m: l'ordre de A et n l'ordre de B

$$A y_i = B u_i + A N_i \longrightarrow (7)$$

si on possède N mesures consécutives on peut écrire $(N-m) \times$
 l'équation (7) : comme suit : (si $n > m$)

$$\begin{bmatrix} y_N \\ y_{N-1} \\ y_{N-2} \\ y_{N-3} \\ \vdots \\ y_{m+2} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{N-1} & -y_{N-2} & \dots & -y_{N-m} & u_N & \dots & u_{N-m} \\ -y_{N-2} & -y_{N-3} & \dots & -y_{N-m-1} & u_{N-1} & \dots & u_{N-m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{m+1} & -y_m & \dots & -y_{m-m+1} & u_{m+1} & \dots & u_{m-m+1} \\ -y_m & -y_{m-1} & \dots & -y_{m-m} & u_m & \dots & u_{m-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$+ [b_N \ b_{N-1} \ \dots \ b_{m+2} \ b_{m+1}]^T \longrightarrow (8)$$

$$\text{soit } y = H\theta + b \longrightarrow (9)$$

$$\text{le critère } J = (y - H\theta)^T (y - H\theta)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T y \longrightarrow (10)$$

L'estimateur des moindres carrés est alors linéaire en y
 Aucune information sur l'estimateur est nécessaire.

A. Calcul du biais de l'estimateur

$$B(\hat{\theta}) = E[(H^T H)^{-1} H^T b] \longrightarrow (11)$$

cet estimateur est non biaisé si :

x et b sont non corrélés et b est centré.

Dans ce cas : $B(\hat{\theta}) = (H^T W H)^{-1} H^T W E[b] = 0$ — (12)

⇒ L'estimateur fournit une estimation non décalée
Par rapport aux vraies valeurs.

B- la variance

$$V(\hat{\theta}) = E[(H^T W H)^{-1} H^T b b^T H (H^T W H)^{-1}]^T \quad \text{--- (13)}$$

⇒ la variance est nulle si b a une fonction d'auto
corrélation nulle

⇒ Pour un bruit b non corrélé à la Matrice H :

$$V(\hat{\theta}) = [(H^T W H)^{-1} W H^T E[b b^T] H W (H^T W H)^{-1}] \quad \text{--- (14)}$$

C- Pondération de Gauss

$$J = (y - H\theta)^T W (y - H\theta) \quad \text{--- (15)} \quad W = W_0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (H^T W H)^{-1} H^T W y \quad \text{--- (16)}$$

si on prend la Matrice de Pondération $W = \Gamma_b^{-1}$

avec $E[b b^T] = \Gamma_b$ on peut minimiser
l'effet de bruit de mesure élevés

$$\hat{\theta} = [H^T \Gamma_b^{-1} H]^{-1} H^T \Gamma_b^{-1} y \quad \text{--- (17)}$$

c'est l'estimateur à Maximum de vraisemblance.

7. Moindres carrés récurrents.

inconvénients de la Méthode NC classique:

- l'ajout d'une $(N+1)^{\text{ème}}$ mesure impose de recommencer la totalité du calcul fait. Néanmoins, Puisque $\bar{y}_N = [y_1 \dots y_N]^T$ et $\bar{y}_{N+1} = [y_1 \dots y_{N+1}]^T$ ne diffèrent que par une seule valeur de la mesure. il serait intéressant d'utiliser le calcul déjà fait et de l'adapter avec la connaissance de cette nouvelle mesure.

$$\hat{\theta}_N = (H_N^T H_N)^{-1} H_N^T y_N = R_N^{-1} Q_N$$

$$P_N = H_N^T H_N \text{ et } Q_N = H_N^T y_N$$

$$\Rightarrow y_{N+1} = \begin{bmatrix} y_{N+1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{N+1}^T \\ H_N \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons que : } \hat{\theta}_{N+1} = (H_{N+1}^T H_{N+1})^{-1} H_{N+1}^T y_{N+1}$$

$$\text{avec : } H_{N+1}^T H_{N+1} = H_N^T H_N + h_{N+1}^T h_{N+1}$$

$$H_{N+1}^T y_{N+1} = H_N^T y_N + h_{N+1}^T y_{N+1}$$

$$\text{alors : } \hat{\theta}_{N+1} = (H_N^T H_N + h_{N+1}^T h_{N+1})^{-1} (H_N^T y_N + h_{N+1}^T y_{N+1})$$

$$P_{N+1} = (H_N^T H_N + h_{N+1}^T h_{N+1})^{-1} = P_N - P_N h_{N+1} (1 + h_{N+1}^T P_N h_{N+1})^{-1} h_{N+1}^T P_N$$

$$\text{selon lemme d'inversion : } \begin{cases} A = B + C \\ B^{-1} C B^{-1} (I - B^{-1} C)^{-1} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = B^{-1} -$$

$$P_{N+1} = (I - K_{N+1} h_{N+1}^T) P_N$$

avec $K_{N+1} = P_N h_{N+1} (\Delta + h_{N+1}^T P_N h_{N+1})^{-1}$

Dans ce cas :

$$\hat{\theta}_{N+1} = (P_N - K_{N+1} h_{N+1}^T P_N) (H_N^T Y_N + h_{N+1} Y_{N+1})$$

→ Réurrence finie.

$$K_{N+1} = P_N h_{N+1} (\Delta + h_{N+1}^T P_N h_{N+1})^{-1}$$

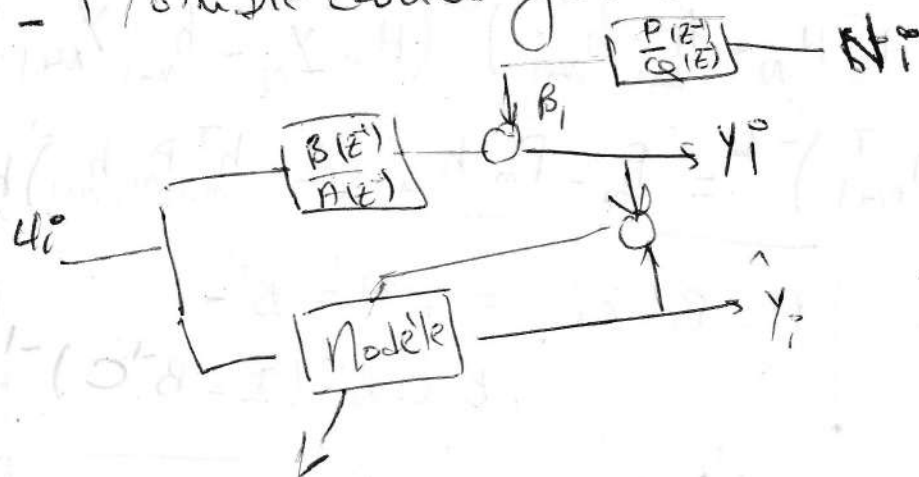
$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} (Y_{N+1} - h_{N+1}^T \hat{\theta}_N)$$

$$P_{N+1} = (I - K_{N+1} h_{N+1}^T) P_N$$

2- Moindres carrés généralisés:

le bruit b Dans le modèle de mesure n'est pas blanc $\Rightarrow$ L'estimateur des NC est biaisé. Pour rendre le bruit ml, 2 méthodes seront présentées: la première est la NCG et la deuxième est Méthode des variables instrumentales.

- Moindres carrés généralisé.



Alors l'éq : $AFy_i = BFu_i + \frac{Q}{p} B_i$

$$\Rightarrow Ay_i^* = Bu_i^* + N_i$$

avec : y_i^* et u_i^* sont les sorties et les commandes respec-

- tivement filtrées par $F = \frac{Q}{P}$

Dans ce cas l'application de la méthode des NC simple sur le Modèle ci-dessus $\Rightarrow$ un bruit nul car le bruit N_i est blanc

- il reste la détermination de filtre F .

on a : $Fb_i = g_i$ avec : $b_i = A\beta_i$

avec F de la forme $F = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_m z^{-m}$

$$\begin{bmatrix} e_N \\ \vdots \\ e_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{N-1} & e_{N-2} & \dots & e_{N-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_m & e_{m-1} & \dots & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_N \\ \vdots \\ N_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$F\beta_i = N_i$$