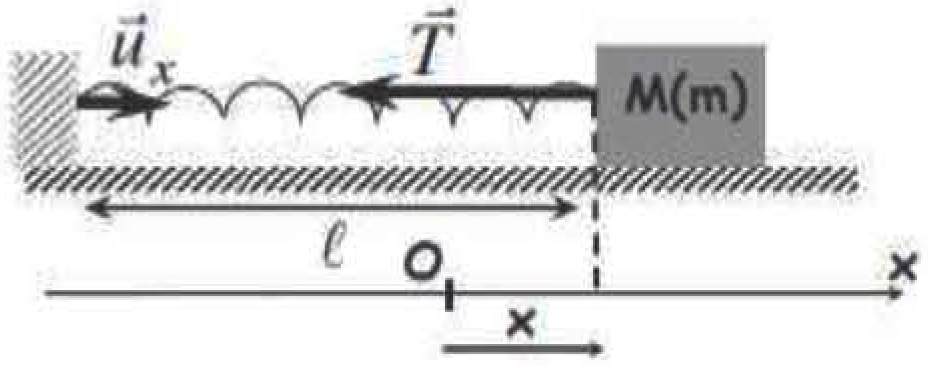
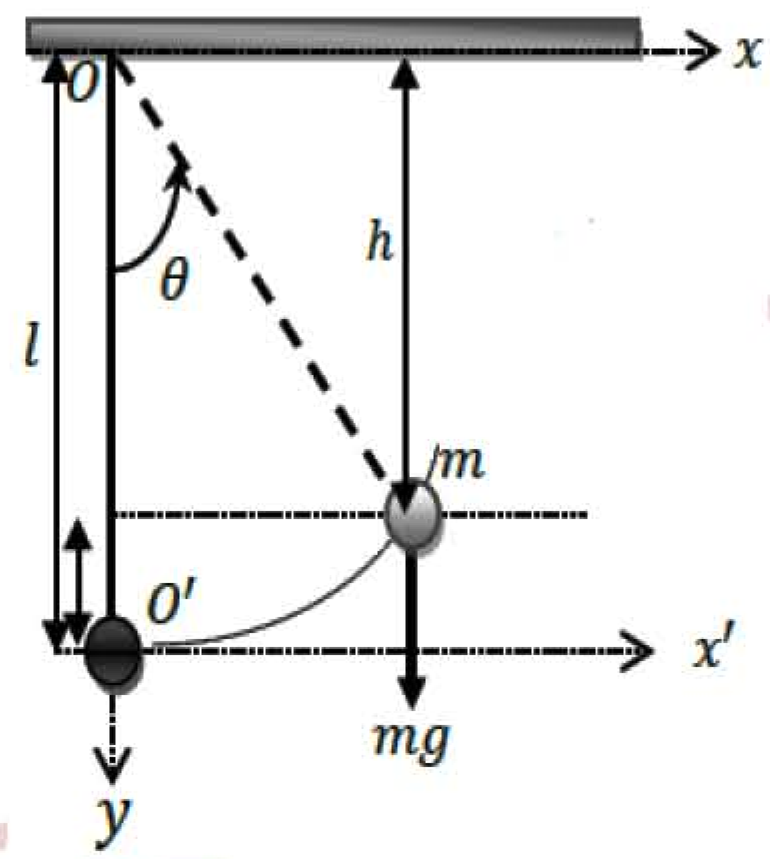
1.1. Définition d'une oscillation (vibration)

On appelle **oscillation**, un mouvement qui s'effectue de part et d'autre d'une position d'équilibre stable. On désigne par le terme, ***vibration***, les oscillations rapides des systèmes mécaniques.

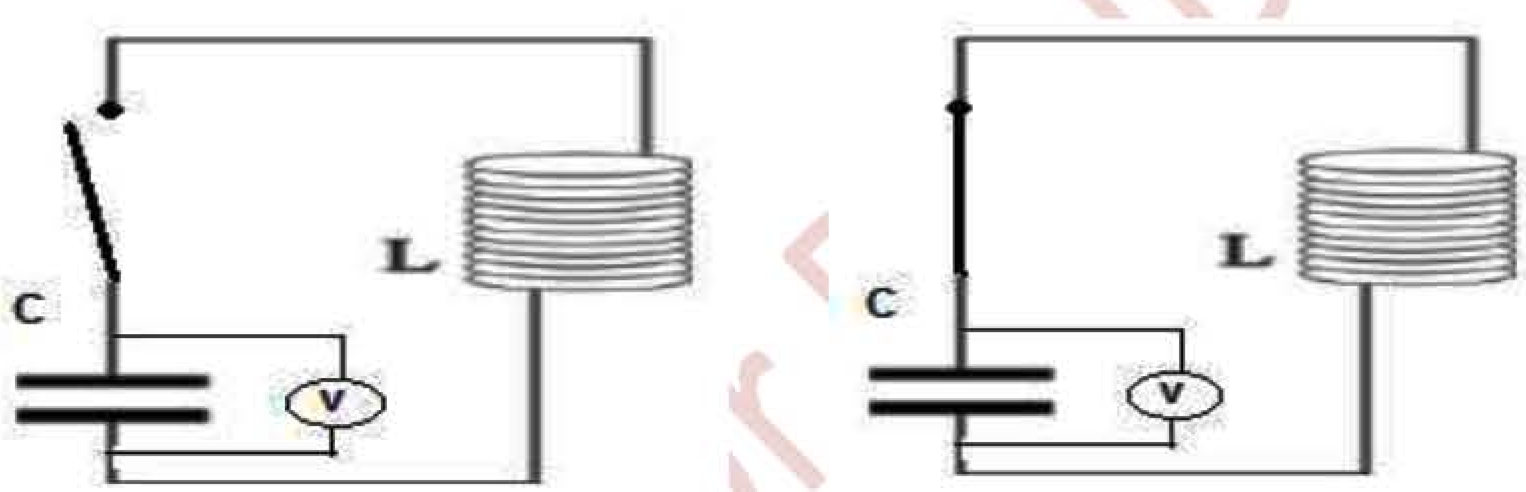
Exemples



a-Système masse-ressort horizontal
(ou dans une position verticale)



b-Pendule simple dans le champ de Pesanteur **g.**



c- Circuit LC oscillant (ou circuit RC ou circuit RLC).

1.2. Définition d'un mouvement périodique

Un mouvement est dit périodique s'il se répète identique à lui même pendant des intervalles de temps égaux.

- Le plus petit intervalle de répétition est appelé période (notée T, mesurée en secondes "s"). C'est aussi, le temps mis par le système pour revenir à une position identique quelque soit le choix de cette position.
- Le nombre de répétitions (*nombre d'oscillations complètes dans le sens aller-retour*) se produisant par seconde, est appelé fréquence (notée f, mesurée en Hertz ou s^{-1}.) Elle est reliée à la période par :

$$T = \frac{1}{f} \quad et \quad f = \frac{1}{T}$$

Le nombre de tours effectués par seconde est appelé pulsation, notée **ω** et mesurée en rad/s). Elle est donnée par :

$$\omega = 2\pi f \text{ ou } \omega = 2\pi/T$$

Mathématiquement : une fonction f est périodique de période T, si et seulement si :

$$\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)$$

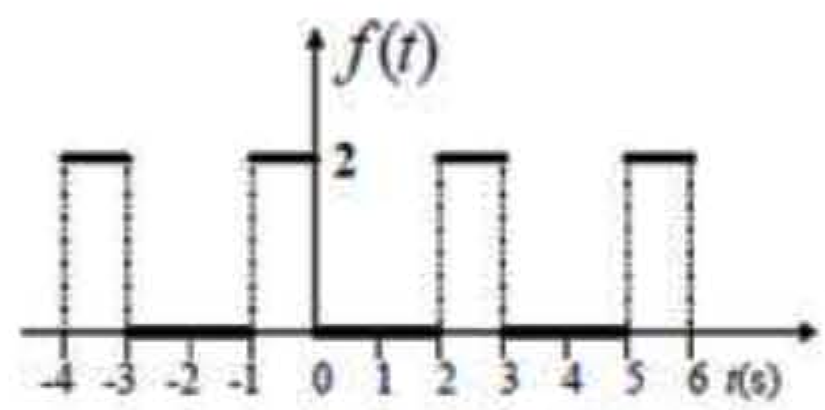
T : désigne la périodicité de la fonction f.

Exemples

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π ;
- la fonction tangente est périodique de période π ;
- Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique.

Applications

1. Soit la grandeur périodique $f(t)$ représentée ci-contre.



- Définir les grandeurs suivantes : T, f et ω.

2. Soit la grandeur sinusoïdale g(t) définie par l'équation : $g(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

- Donner les grandeurs T, f et ω pour cette fonction ;
- Schématiser la fonction g(t).

Solutions

1. Pour la fonction périodique f(t)

$T = 3$ (s) $\quad f = \frac{1}{T} = 0.33$ (Hz) $\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$ (rad/s).

2. Pour la fonction périodique sinusoïdale g(t)

$\omega = \frac{\pi}{2}$ (rad/s) $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 4$ (s) $\quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$ (Hz)

Schématisation de la fonction g(t)

La fonction g(t) est sinusoïdale de forme $g(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$, A est l'amplitude et Φ la phase initiale.

Alors $\mathbf{g(t) = 2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \mathbf{t \approx 0.5\ (s)}$

à $\mathbf{t = 0}$, $g(0) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\times\frac{1}{2} = \mathbf{1}$

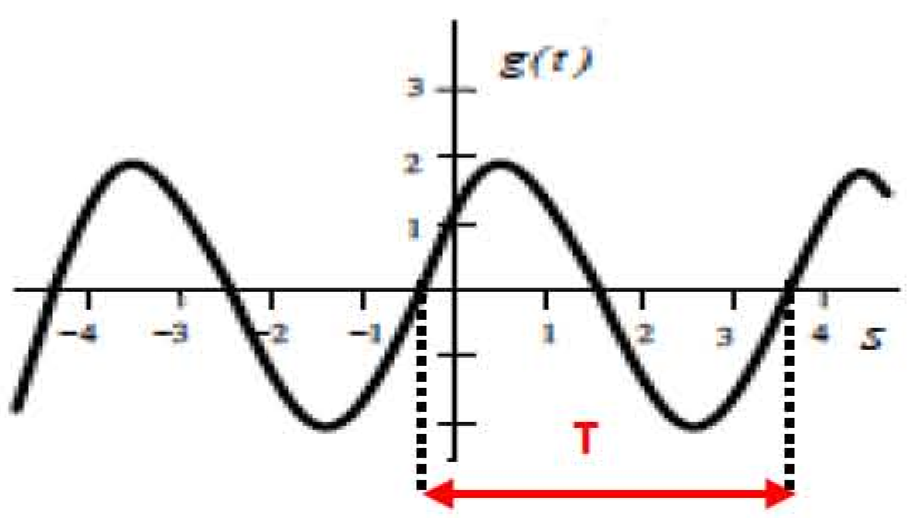
$\mathbf{g(t) = 0} \Rightarrow g(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Rightarrow \mathbf{t \approx 1.5\ (s)}$

On classe ces résultats dans le tableau ci-contre

T (s)	0	0.5	1.5
g(t)	1	2	0

Schématique de g(t)



1.3. Mouvement vibratoire sinusoïdal

Un mouvement vibratoire est dit sinusoïdal, si tout point vibrant possède à l'instant t, une élongation (un écart) du type :

$$X(t) = A \sin(\omega t + \phi) \text{ ou } X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Avec

A est l'amplitude du mouvement qui présente l'élongation maximale qui varie entre A et –A ;

ω est la pulsation du mouvement exprimée en (rad/s) ;

ϕ est la phase initiale du mouvement (à l'instant initial t = 0), exprimée en radian ;

(ωt+ ϕ) est la phase instantanée du mouvement ou angle de phase (à l'instant t), exprimée en radian ;

X(t) est appelée, la position (ou l'élongation) instantanée du système.

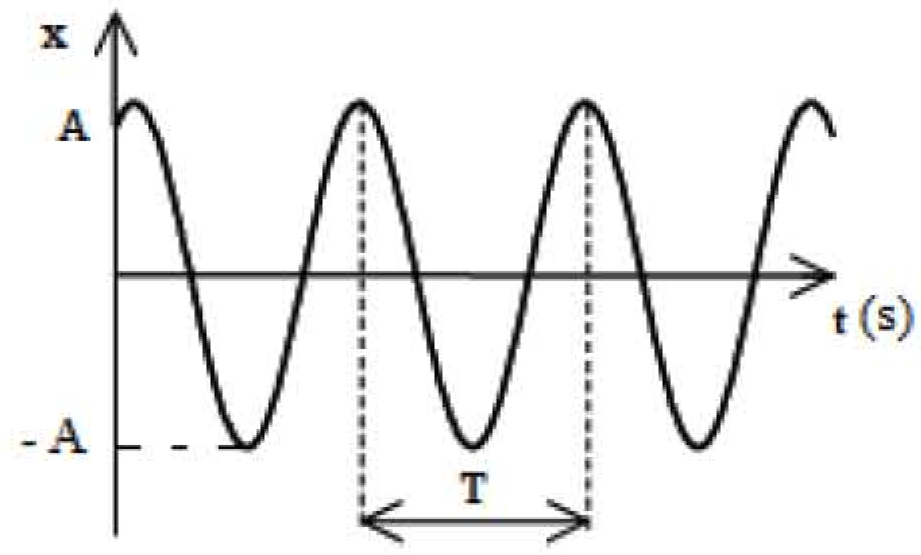


Figure 1.5. Tracé d'un mouvement vibratoire sinusoïdal.

1.4. Représentation complexe - Formules d'Euler (1748)

Pour faciliter les calculs, nous transformons les grandeurs sinusoïdales en des exponentielles qui sont plus simples à manipuler. Ceci est possible grâce à la formule d'Euler. Celle-ci est une *égalité mathématique* attribuée au mathématicien suisse Leonhard Euler (1748). Elle relie les fonctions trigonométriques à l'exponentielle complexe.

Soit Z une grandeur sinusoïdale définie par la formule :

$$\mathbf{Z(t) = Z_0 \cos(\omega t+ \phi) = Z_0 \cos \theta(t) \;/\; \theta(t) = (\omega t+ \phi)}$$

Avec

$\mathbf{Z_0}$ est l'amplitude de Z ;

$\boldsymbol{\omega}$ est la pulsation et ϕ la phase initiale ;

$\boldsymbol{\theta(t) =(\omega t+ \phi)}$ est l'angle de phase

On peut transformer la grandeur sinusoïdale Z à la forme exponentielle suivante :

$$Z(t) \rightarrow \bar{Z} = |\bar{Z}| e^{j\theta}$$

Avec

$|\bar{Z}| = \mathbf{Z_0}$ est le module de $\bar{Z}$ (nombre complexe) ;

$\boldsymbol{\vartheta =(\omega t+ \phi)}$ est l'argument de $\bar{Z}$;

j un nombre imaginaire tel que $\mathbf{j^2} = -1$.

On appelle la nouvelle forme $|\bar{Z}| e^{j\theta}$, *formule d'Euler* de grandeur sinusoïdale Z.

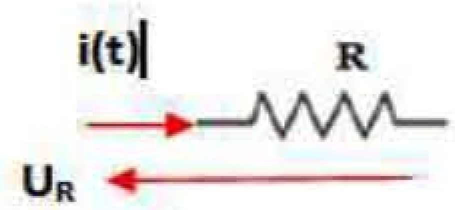
Rappel mathématique

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ , x E R}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Applications

1.Soit le mouvement périodique défini parle déplacement $x(t) = x_0 \cos(3t+5)$. Trouver à l'aide de la représentation complexe la vitesse $\dot{x}\,(t)$ et l'accélération $\ddot{x}\,(t)$.

2.Soit une résistance R et un courant électrique sinusoïdal $i(t) = i_0 \cos\omega t$. Trouver l'impédance complexe $\overline{Z_R} = \frac{\overline{U_R}}{\overline{\imath}}$. On rappelle que $U_R(t) = R\, i(t)$ est la différence de potentiel (DP) aux bornes de la résistance R.



Solutions

1.On a : $x(t) = x_0 \cos(3t+5) \xrightarrow[d'Euler]{foumule} \overline{x(t)} = |\bar{x}| e^{j(3t+5)} = x_0\, e^{j(3t+5)}$

La vitesse

La vitesse en représentation complexe est $\overline{\dot{x}(t)} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0\, e^{j(3t+5)})$

$$\overline{\dot{x}(t)} = 3j\, x_0\, e^{j(3t+5)} = 3\, x_0\, e^{j(3t+5)} e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$= 3\, x_0\, e^{j\left(3t+5+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Revenons maintenant à la représentation sinusoïdale, on doit écrire que

$$\dot{x}\,(t) = 3\, x_0 \cos\left(3t+5+\frac{\pi}{2}\right) = -3\, x_0 \sin(3t+5)$$

Rappel : **$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$, $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$**

L'accélération

L'accélération en représentation complexe est $\overline{\ddot{x}(t)} = \frac{d\dot{\bar{x}}}{dt} = \frac{d}{dt}(3j\, x_0\, e^{j(3t+5)})$

$$= 9\, j^2\, x_0\, e^{j(3t+5)} = -9\, x_0\, e^{j(3t+5)}$$

Soit donc, l'accélération en représentation sinusoïdale

$$\boxed{\ddot{x}\,(t) = -9\, x_0 \sin(3t+5)}$$

2.$i(t) = i_0 \cos\omega t \xrightarrow[d'Euler]{foumule} \overline{\imath(t)} = |\bar{\imath}| e^{j\omega t} = i_0\, e^{j\omega t}$

$$U_R(t) = R\, i(t) = R\, i_0 \cos\omega t \xrightarrow[d'Euler]{foumule} \overline{U_R(t)} = \left|\overline{U_R(t)}\right| e^{j\omega t} = R i_0\, e^{j\omega t}$$

Comme

$\overline{Z_R} = \frac{\overline{U_R}}{\overline{I}} = \frac{R\, i_0\, e^{j\omega t}}{i_0\, e^{j\omega t}}$, donc $\boxed{\overline{Z_R} = R}$

1.5. Superposition des grandeurs périodiques

L'addition de deux ou plusieurs grandeurs de même nature est appelée superposition (ou somme).

1.5.1. Grandeurs sinusoïdales de même pulsation

Soient $S_1 = a \cos(\omega t + \phi_1)$ et $S_2 = b \cos(\omega t + \phi_2)$, deux vibrations de même pulsation **ω**. La somme de ces deux mouvements est une vibration de pulsation **ω** qui peut être exprimée sous la forme:

$$S = A \cos(\omega t + \phi)$$ **(démonstration. TD)**

Avec

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\Phi_1 - \Phi_2)}$$ **(démonstration. TD)**

Et

$$\tan\phi = \frac{a \sin\Phi_1 + b \sin\Phi_2}{a \cos\Phi_1 + b \cos\Phi_2}$$ **(démonstration .TD)**

A et ϕ sont respectivement, l'amplitude et la phase initiale de la somme (superposition) S.

1.5.2. Grandeurs sinusoïdales de même amplitude

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même amplitude est une grandeur sinusoïdale à ***amplitude modulée (variable)*** si les deux pulsations ***<u>sont différentes</u>***.

<u>Exemple</u>

Soient $S_1 = a\cos(\omega_1 t)$ et $S_2 = a\cos(\omega_2 t)$, deux vibrations de même amplitude **a** et de pulsations différentes $\boldsymbol{\omega_1}$ et $\boldsymbol{\omega_2}$. La somme de ces deux mouvements est une vibration à *amplitude modulée* (variable) qui peut être exprimée sous la forme:

$$S = \underbrace{2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}_{\textit{Amplitude modulée de la somme S}}\ \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\textit{pulsation de la somme S}}t\right)$$

Démonstration

$S = S_1 + S_2 = a\cos(\omega_1 t) + a\cos(\omega_2 t)$

$\quad = a(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$

Profitons de la formule d'Euler, on peut écrire que :

$$\bar{S} = a\left(e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}\right) = a\left(e^{\frac{j(\omega_1+\omega_1)t}{2}} + e^{\frac{j(\omega_2+\omega_2)t}{2}}\right)$$

$$= a\left(e^{\frac{j\omega_1 t}{2}} e^{\frac{j\omega_1 t}{2}} + e^{\frac{j\omega_2 t}{2}} e^{\frac{j\omega_2 t}{2}}\right) = a\left(e^{\frac{j\omega_1 t}{2}} e^{\frac{j\omega_1 t}{2}} e^{\frac{j\omega_2 t}{2}} e^{\frac{-j\omega_2 t}{2}} + e^{\frac{j\omega_2 t}{2}} e^{\frac{j\omega_2 t}{2}} e^{\frac{j\omega_1 t}{2}} e^{\frac{-j\omega_1 t}{2}}\right)$$

$$= a\left(e^{j\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}} e^{j\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}} + e^{j\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}} e^{-j\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}}\right)$$

$$= a\left[e^{j\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}} \left(e^{j\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}} + e^{-j\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}}\right)\right]$$

Mathématiquement, on a: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

Soit donc : $S = 2a\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}$

Information :

Les phénomènes physiques sont classés en deux grandes catégories : mécanique et électrique. Dans le cas mécanique, les phénomènes sont régis par les lois de ***la gravitation et de l'inertie***, en relation avec la masse des objets et le champ gravitationnel associé. Dans le cas électrique, c'est ***le champ électromagnétique*** lié à la propriété de ***charge électrique*** de certaines particules constituant la matière. En pratique, les systèmes que nous réalisons et que nous utilisons sont à la fois mécaniques et électriques, et quelque soit notre spécialité d'ingénierie, nous devons étudier les deux situations. Mais pour la clarté de l'exposé il convient de se placer soit dans un cas mécanique, soit dans un cas électrique. Les situations « mécaniques » sont relativement intuitives et assez faciles à « comprendre ». Les situations électriques sont moins et sont le plus souvent basées sur la bonne application de conventions, qui si elles sont bien respectées, mènent au bon résultat, mais qui ne sont pas faciles à suivre à toutes les étapes.