2.1. Mouvement vibratoire libre

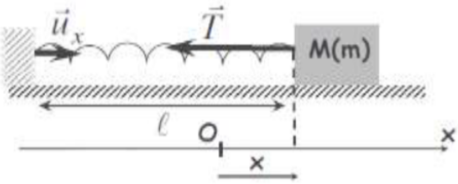
Définition : les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.

Exemples : Une masse accrochée à un ressort - un pendule simple - le balancier d'une horloge …..etc.

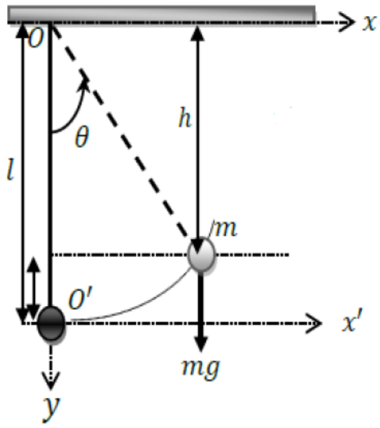
2.2. Oscillateur libre

Un oscillateur libre est un dispositif (système) mécanique ou électrique oscille ou vibre librement (en l'absence de toute ***force d'excitation***) autour d'une position d'équilibre bien définie.

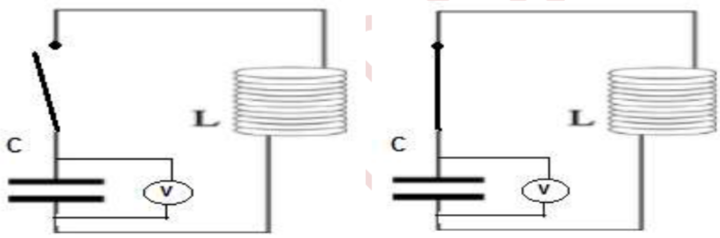
Exemples



a-*Système masse-ressort horizontal ou dans une position verticale)*



b-*Pendule simple dans le champ de Pesanteur **g.***



c- *Circuit LC oscillant (oscillateur électrique)*

2.3. Degré de liberté n

Définition : le degré de liberté d'un oscillateur noté **n** est le nombre de ***coordonnées indépendantes, N nécessaires*** pour repérer la position du système à tout instant, soit donc : **n = N**

Ou, le nombre de ***coordonnées liées*, N intervenant** pour repérer la position du système à tout instant moins le nombre de relations mathématiques (liaisons physiques) r, reliant ces coordonnées entre elles. Soit donc ;

n = N- r

Avec : **n** est le degré de liberté du système ;

N est le nombre de coordonnées indépendantes ou liées intervenant pour repérer la position du système dans l'espace ;

2.7. Condition d'équilibre

Par définition, on dit que $x = x_0$ est une position d'équilibre pour un système mécanique en oscillation, si et seulement si :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0$$

Avec **U(x)** est l'énergie potentielle totale du système. Cette équation indique que l'énergie potentielle à cette position est minimale **($U(x = x_0) = U_0$ <<).**

On distingue deux types d'équilibre des systèmes mécaniques, stable te instable :

2.7.1. Equilibre stable (ou stationnaire)

L'équilibre d'un système est dit ***stable*** si le système retourne à son état initial d'équilibre. Ça c'est possible, si le système oscille sous l'action d'une force de rappel.

On a vu au début qu'une force de rappel unidimensionnelle étant donnée par la relation $\vec{F} = -C\,\vec{x}$ avec **C >0**. De cette relation, on peut tirer l'expression de la constante C comme suit :

$$C = -\partial F/\partial x > 0$$

$$= -\partial/\partial x\,(-\partial U/\partial x) > 0 \Rightarrow \partial^2 U/\partial x^2 > 0$$

Car **F** est dérivée d'un potentiel scalaire (***force conservative***). On aura donc un équilibre stable du système à **($x = x_0$)** si et seulement si :

$$\underbrace{[(\partial^2 U/\partial x^2)_{x=x_0} > 0]}_{\text{Condition d'oscillation du système}} \text{ et } (\partial U/\partial x)_{x=x_0} = 0$$

Cette relation indique que l'énergie potentielle du système ***U est minimale.***

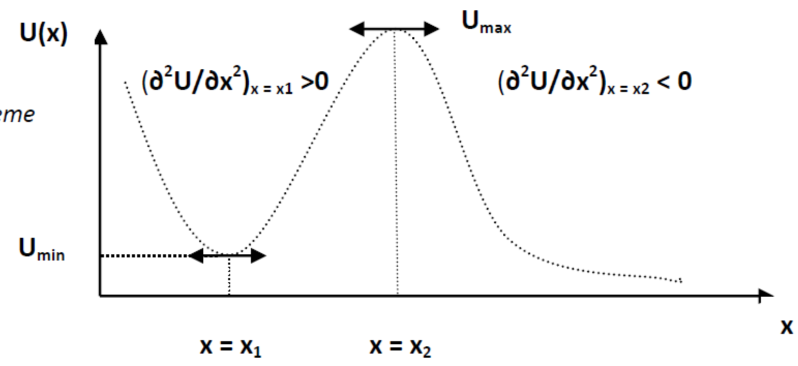
2.7.2. Equilibre instable (ou perturbant)

L'équilibre d'un système est dit ***instable*** si le système ne regagne pas son état initial d'équilibre. Ça c'est possible, si **C < 0** *(F n'est pas une force de rappel)* et ça conduit à l'équation suivante :

$$[(\partial^2 U/\partial x^2)_{x=x_0} < 0] \text{ et } (\partial U/\partial x)_{x=x_0} = 0$$

Cette relation indique que l'énergie potentielle du système ***U est maximale.***

*Variations de l'énergie potentielle **U** d'un système en fonction de l'écartement **x**.*



Remarque

Dans le cas d'un mouvement rotationnel, les équations précédentes deviennent :

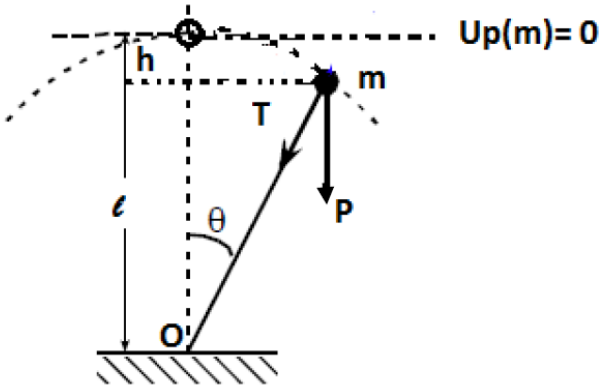
$$[(\partial^2U/\partial\theta^2)_{\theta=\theta0} > 0] \text{ et } (\partial U/\partial\theta)_{\theta=\theta0} = 0 \quad \text{Pour l'équilibre stable}$$

$$[(\partial^2U/\partial\theta^2)_{\theta=\theta0} < 0] \text{ et } (\partial U/\partial\theta)_{\theta=\theta0} = 0 \quad \text{Pour l'équilibre instable}$$

Application

Trouver les positions d'équilibre et leur nature pour le système ci-contre (pendule simple inversé).

Solution



L'énergie potentielle du système lors d'un écartement θ de la position verticale est :

$U_p = U_{pm} = - mgh = - mg (\ell - \ell \cos\theta)$

Les positions d'équilibre sont données par :

$\partial U/\partial\theta = 0 \Rightarrow - mg\, \ell\sin\theta = 0$

$\Rightarrow$ **$\sin\theta = 0$.............(*)**

Les positions d'équilibre sont donc les solutions de l'équation (*) : **$\theta = 0$ et $\theta = \pi$**

Nature d'équilibre :

Nous calculons tout d'abord : $(\partial^2U/\partial\theta^2)$

$(\partial^2U/\partial\theta^2) = \partial/\partial\theta\, (\partial U/\partial\theta) = \partial/\partial\theta\, (- mg\ell \sin\theta) = - mg\ell \cos\theta$

Pour $\theta = 0$, $(\partial^2U/\partial\theta^2)_{\theta=0} = - mg\ell < 0$; donc cette position est une position d'équilibre instable pour le système ;

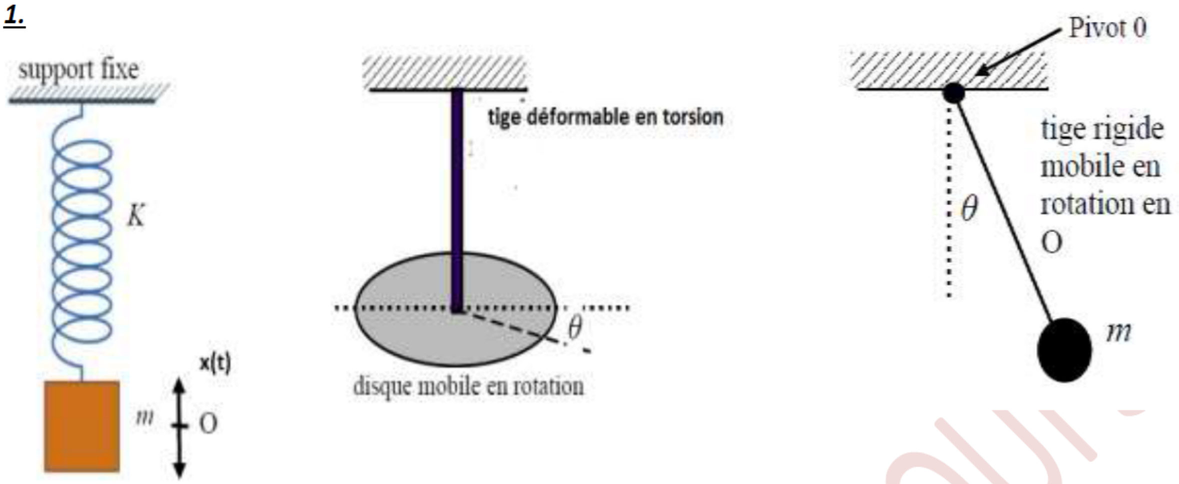
Pour $\theta = \pi$, $(\partial^2U/\partial\theta^2)_{\theta=\pi} = mg\ell > 0$; donc cette position est une position d'équilibre stable pour le système donné.

> ***Information :***
>
> **L'énergie** est une grandeur fondamentale en Physique. La **matière** et le **rayonnement électromagnétique** (ém) qui constituent la partie de l'univers que nous pouvons observer sont deux formes de cette entité fondamentale. Les développements de la physique au 20ème siècle, stimulés par les idées du Physicien Einstein, ont fait apparaître une équivalence entre matière et rayonnement. Cette découverte est résumée dans la célèbre formule ***$E = mc^2$*** : une quantité de matière de masse ***m*** est caractérisée par une l'énergie ***E***, ***c*** étant la célérité des ondes électromagnétiques dont la forme qui nous est la plus familière est la lumière.

r est le nombre de relations mathématiques reliant les coordonnées entre elles.

Exemples

1.



(a) *Oscillateur en translation* **(b)** *Oscillateur en rotation* **(c)** *Pendule simple*

Ces trois systèmes (a, b et c) ont un seul degré de liberté (**n = 1**).

Système (a) : une seule coordonnée indépendante x(t) ;

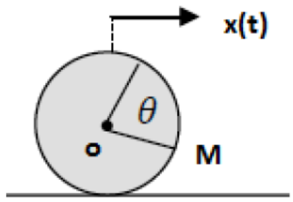
Système (b) : une seule coordonnée indépendante θ(t) ;

Système (c) : une seule coordonnée indépendante θ(t).

X(t) et θ(t) sont les écarts par rapport à la position d'équilibre.

2.

Un disque de masse m et de rayon R, roule sans glisser sur un plan horizontal.



Dans cet exemple, la position du système est décrie à chaque instant t par deux coordonnées **x(t)** et **θ(t)** liées à chaque instant par la relation mathématique suivante : **$x = R\theta$**

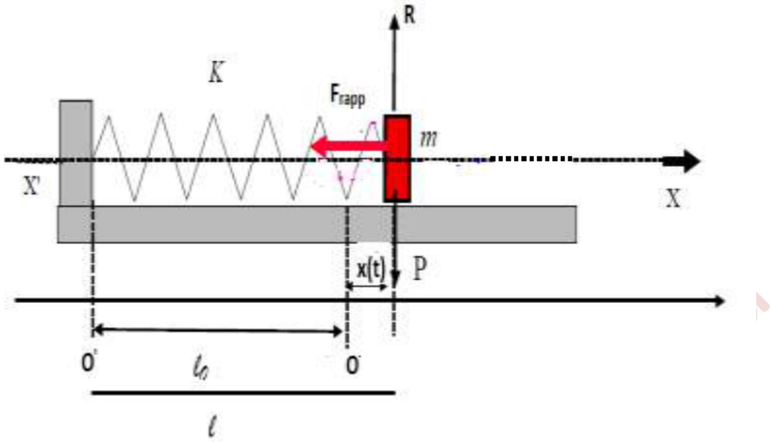
Donc : N = 2 (x et θ), r = 1 ($x = R\theta$). Soit donc **n =1**

2.4. Oscillateur linéaire

En mécanique, on appelle **oscillateur linéaire,** un oscillateur qui dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'un écartement x (ou d'un angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à cet écartement. Cela signifie que la force de rappel s'écrit **:** $\vec{F} = -C\vec{x}$ telle que **C** est une constante positive. Cette hypothèse est vraie en général pour les petits écarts ($x << 1$, $\theta \leq 10^{\circ}$).

Exemples

1. *Système masse-ressort horizontal*



Considérons l'oscillateur mécanique constitué d'un objet ponctuel en O de masse *m* fixée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur *K* et pouvant glisser sur un plan horizontal. Le ressort est supposé idéal, c'est-à-dire de masse négligeable par rapport à la masse *m* qui est fixée à l'une de ses extrémités.

Cet oscillateur est un oscillateur linéaire, car la force de rappel F_{rapp} est de forme : $\overrightarrow{F_{rapp}} = -k\, x(t)\, \vec{i}$

Avec :

K > 0 (obligatoire)

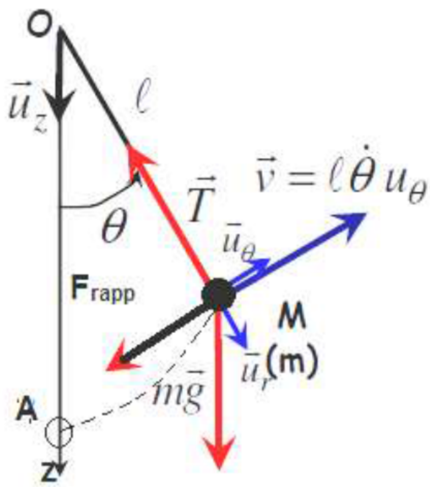
Ici, le point **O** désigne l'équilibre du système. Si une force extérieure temporaire **Fext** agit sur O, celui-ci s'écarte de sa position d'équilibre. Soit **x(t)** cet écart à un instant t.

Remarque : Le signe (-) indique que le rappel se fait dans le sens opposé à l'écart (si x est positif, la force de rappel agit dans le sens des x négatifs.

2. *Le pendule simple*

Le pendule simple est un oscillateur constitué d'un fil inextensible et sans masse de longueur **ℓ =OM** à laquelle est accrochée une masse **m** considérée comme ponctuelle en M. La tige est attachée avec le bâti au pivot O. Lorsque l'on écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ vers le sens de $\overrightarrow{U_\theta}$, il oscille librement sous l'action de la force de rappel : $\overrightarrow{F_{rapp}} = \overrightarrow{p_\theta} = -\, mg \sin\theta\, \overrightarrow{U_\theta}$

Cet oscillateur devient linéaire lorsque θ est très petit ($\theta \leq 10^\circ$), car pour $\theta \leq 10^\circ$: $\sin\theta \approx \theta$ (en radian) et $\overrightarrow{F_{rapp}} \approx -\, mg\, \theta \overrightarrow{U_\theta}$



Remarque : L'état d'équilibre du pendule simple est la position A (où **θ =0** à l'instant **t = 0**).

2.5. Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un oscillateur dont l'équation de mouvement est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1)$$

Cette équation admet comme solution, une solution linéaire sinusoïdale q(t) de forme :

$$q(t) = A\cos(\omega_0 + \phi) \qquad (2)$$

L'équation (2) est appelée, ***l'équation horaire du mouvement*** de l'oscillateur harmonique avec :

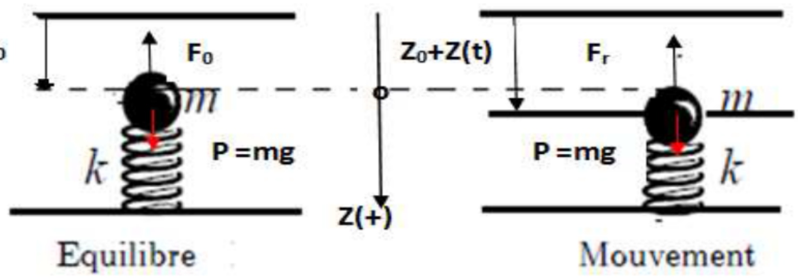
- **q** est la coordonnée généralisée repérant la position du système à l'instant t ;
- **A** est l'amplitude d'oscillation de l'oscillateur ;
- ω_0 est une constante positive appelée pulsation propre ou pulsation naturelle du système, car elle ne dépend que des grandeurs propres à l'oscillateur ;
- ϕ est la phase initiale du mouvement.

Remarques

1. L'amplitude A et la phase initiale ϕ dépendent des conditions initiales de mouvement ;
2. Pour que le système (l'oscillateur) puisse osciller, il faut que le facteur à côté de **q** dans l'équation (1) soit positif. C'est la condition d'oscillation.
3. En mécanique : q = x, y, z (en translation), θ en rotation.
4. En électricité : q = i, U, q(la charge électrique).

Application

1. Trouver à l'aide de PFD, l'équation de mouvement du système ci- contre ;
2. Calculer sa pulsation propre pour (m = 1 Kg) et k = 3 N/m ;
3. Donner son équation horaire du mouvement ;
4. Trouver l'amplitude A et la phase initiale ϕ sachant qu'initialement la masse est poussée 2 cm vers le bas puis lancée vers le haut à une vitesse de 2 cm/s.



Système masse –ressort vertical comprimé

Solution

a)-1. *En appliquant le PFD en équilibre :* $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{F}_0 = \vec{0}$

Projection /Z (+) : mg –k Z_0 = 0, C'est la condition d'équilibre du système.

$\vec{F}_0$: est la force de rappel du ressort à l'équilibre. Le ressort à l'équilibre était comprimé à une distance Z_0 qui n'est pas donnée dans le texte de l'exercice.

En appliquant maintenant le PFD en mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{F}_r = m\vec{a}$

$\vec{F}_r$ est la force de rappel du ressort en mouvement.

Z(t) est le déplacement instantané de la masse qui égal au même temps la nouvelle déformation du ressort à l'instant t, soit donc **[Z_0 + Z (t)]** est la déformation totale du ressort.

Projection /Z (+) : mg –k (Z_0 + Z(t)) = m $\ddot{Z}(t)$

$$mg - k Z_0 - k Z(t) = m \ddot{Z}(t)$$

$$(mg - k Z_0) - k Z(t) = m \ddot{Z}(t)$$

$$0 - k Z(t) = m \ddot{Z}(t)$$

$$\Rightarrow m \ddot{Z}(t) + k Z(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{Z}(t) + \frac{k}{m} Z(t) = 0 \text{..............................(*)}$$

L'équation (*) est de forme : $\ddot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = 0$ ....(**)

2. L'analogie des deux équations (*) et (**) donne : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre du système.

A.N. $\omega_0 = \sqrt{3}$ rad/s

3 et 4. L'équation (*) admet une solution sinusoïdale de forme : Z(t)= Acos (ω_0+ϕ)= Acos ($\sqrt{3}$t+ϕ)...(***)

A et ϕ, sont des constantes qui peuvent être définies à l'aide des conditions initiales suivantes :

$$\text{à } t = 0 \begin{cases} Z(0) = 2\ cm \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dot{Z}(0) = v_0 = \frac{dZ}{dt}(t=0) = -2\frac{cm}{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

D'autre part (remplaçons t = 0 dans l'équation (***)):

$$\begin{cases} Z(0) = Acos\ \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \dot{Z}(t) = -\sqrt{3}\,A\sin(\omega t + \emptyset) \Rightarrow \dot{Z}(0) = -\sqrt{3}\,A\ sin\emptyset \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

Avec : $\dot{Z}(t) = -\sqrt{3}\,A\sin(\omega t + \emptyset)$ est la vitesse du système à l'instant t.

$$\frac{(4)}{(3)} = \frac{-\sqrt{3}\,A\ sin\emptyset}{Acos\ \emptyset} = -\sqrt{3}\ tan\emptyset \qquad \text{et} \quad \frac{(2)}{(1)} = -1$$

Mais $\frac{(4)}{(3)} = \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow -\sqrt{3}\,tan\emptyset = -1 \Rightarrow tan\emptyset = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \emptyset = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$

Remplaçons dans l'équation (3) ou (4), nous trouvons que $A = \frac{Z\,(0)}{\cos\emptyset} = \frac{2\ cm}{0.866} = 2.3$ cm

Finalement on trouve que $Z(t) = 2.3\cos(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{6})$ ou $Z(t) = 2.3\sin(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = 2.3\sin(\sqrt{3}\,t + \frac{2\pi}{3})$ cm

2.3. L'énergie d'un oscillateur harmonique

En mécanique, l'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétique **T** et potentielle $\mathbf{U_p}$:

$$\mathbf{E = T + U_P}$$

L'énergie se manifeste sous de multiples formes. Les formes d'énergie suivantes interviennent dans les phénomènes de vibrations :

- ***Énergie cinétique de translation :*** *c'*est l'énergie d'un objet de masse **m** se déplaçant en ligne droite à la vitesse constante ***v*** dans un repère donné, elle est définie par la relation : $\mathbf{T_{C\,Trans} = 1/2mv^2}$

- ***Énergie cinétique de rotation :*** c'est l'énergie cinétique de rotation d'un objet de moment cinétique **J** et de vitesse angulaire **ω**, elle définie par la relation : $\mathbf{T_{C\,Rot} = ½\,J\,\omega^2 = ½\,J\,\theta'^2}$ où : $\mathbf{\omega = d\theta/dt = \theta'}$

- ***Énergie potentielle de déformation d'un ressort à boudin*:** c'est la variation d'énergie potentielle de déformation d'un objet élastique allongé du type ressort, de raideur *K*, dont la longueur a varié d'une quantité *x*. Elle est donnée par : $\mathbf{Up_{res} = ½\,\mathit{K}\,\mathit{x}^2}$

- ***Énergie potentielle de pesanteur (de gravitation):*** c'est la variation d'énergie potentielle de pesanteur d'un corps de masse **m** soumis à la pesanteur terrestre **g** et dont l'altitude (sur une petite distance) est **h.** Elle est définie par la relation : $\mathbf{Up_m = \pm\,mg\,h}$

  $\mathbf{Up_m = +\,mg\,h}$ lors d'une montée d'une hauteur h

  $\mathbf{Up_m = -\,mg\,h}$ lors d'une descente d'une hauteur h

  (g = 9,81N.kg-1)

- ***Énergie électrique :*** c'est l'énergie du champ électrique crée par des charges *q* stockées dans un condensateur de capacité **C.** Elle est donnée par : $\mathbf{E_{él} = ½\,q^2/C = ½\,C\,U^2}$

  U : est la tension aux bornes du condensateur.

Remarque :
Les systèmes étudiés dans un cours sur les **vibrations** correspondent aux situations dans lesquelles une partie de l'énergie varie périodiquement d'une forme à une autre : de cinétique à potentielle dans les *systèmes mécaniques*, d'électrique à magnétique dans *les systèmes électriques*. L'énergie reste localisée si le système est isolé. Dans le cas contraire, l'énergie s'échappe vers les éléments voisins et se propage dans le milieu environnant sous la forme d'**ondes**.

2.5. Equation de conservation

L'énergie mécanique (totale) d'un oscillateur est conservée durant le mouvement de celui-ci. Ça veut dire que $\mathbf{dE/dt = 0 \Rightarrow dT/dt = - dU_p/dt}$. Cela signifie que l'énergie cinétique du système se transforme à une énergie potentielle pendant le mouvement et lorsque l'énergie cinétique du système diminue, son énergie potentielle augmente et vis versa. On appelle l'équation précédente, ***l'équation de conservation*** de l'énergie totale de l'oscillateur harmonique qui donne l'équation de mouvement des systèmes conservés.

Démonstration

En écrivant l'élongation ou l'écartement sous la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, on a les valeurs suivantes pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle instantanée pour un écart x par rapport à la position d'équilibre :

$$E_{cin}(t) = 1/2\, m\, v^2(t) = 1/2 m (dx/dt)^2$$

$$= 1/2\, m\, [- A\, \omega_0 \sin((\omega_0 t + \varphi)]^2 = 1/2\, m(-A\, \omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\mathbf{E_{cin}(t) = 1/2\, k\, A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)} \qquad \text{avec } \mathbf{k = m\omega_0^2}$$

L'énergie potentielle est obtenue en calculant le travail de la force exercée par le ressort, soit l'équation :

$$dw = F_r\, dx = - kx\, dx$$

$$dw = - dE_p = - kx\, dx$$

$$\Rightarrow E_p = {}_0\!\int^x k\, x dx = 1/2\, k\, x^2$$

$$\mathbf{E_p(t) = 1/2k\, A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}$$

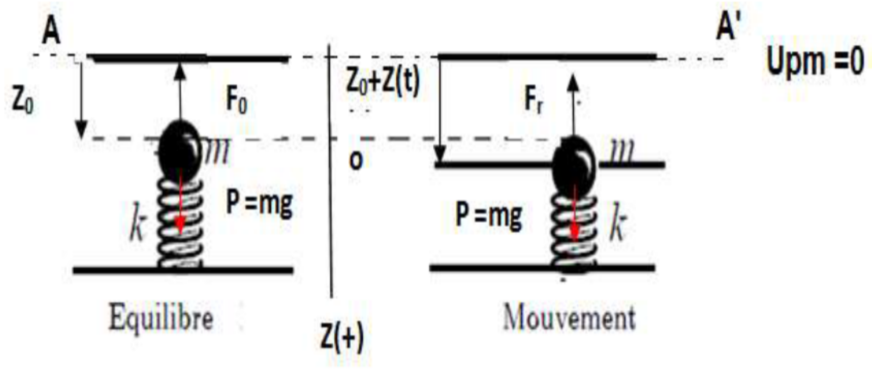
$$E_T(t) = E_{cin}(t) + E_p(t) = 1/2\, k\, A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + 1/2k\, A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= 1/2\, k\, A^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = 1/2\, k\, A^2 \text{ ou } 1/2\mathbf{m\omega_0}^2 A^2 \qquad / \mathbf{k = m\omega_0^2}$$

$$\mathbf{E_T(t) = 1/2m\omega_0^2 A^2 = Cte \Rightarrow dE_T/dt = 0}$$

Exemple

Trouver à l'aide de l'équation de conservation, l'équation de mouvement du système ci-contre.



Système masse –ressort vertical comprimé

Solution

On a besoin de définir les énergies du système.

$T = T_{tr} = ½\ m\ v^2 = ½\ m\dot{Z}(t)^2$

$U_p = U_{pres} + U_{Pm}$

$= ½\ k\ (Z + Z_0)^2 – mg\ (Z + Z_0)$

On a choisi une référence pour l'énergie potentielle de pesanteur ($U_{pm} = 0$) au niveau AA'.

Donc : $E = T + U_P = ½\ m\dot{Z}(t)^2 + ½\ k\ (Z + Z_0)^2 – mg\ (Z + Z_0)$

$E = ½\, m\dot{Z}(t)^2 + ½\, k\, Z^2 + ½\, k\, Z_0^2 + k\, Z\, Z_0 – mg\, Z – mg\, Z_0$

$= ½\, m\dot{Z}(t)^2 + ½\, k\, Z^2 + ½\, k\, Z_0^2 - mg\, Z_0 – Z\overbrace{(mg - k\, Z_0)}^{0}$

$$\boxed{E = ½\, m\dot{Z}(t)^2 + ½\, k\, Z^2 + Cte}$$

Avec : $Cte = ½\, k\, Z_0^2 - mg\, Z_0$ et $(mg - kZ_0) = 0$ est la condition d'équilibre

dE/dt = 0 $\Rightarrow m\ddot{Z}(t) + kZ = 0$ ou $\ddot{Z}(t) + k/m\, Z = 0$

2.6. Formalisme de Lagrange(1788)

Le formalisme de Lagrange est une équation mathématique différentielle proposée par le physicien mathématicien Lagrange en 1788 qui se repose sur ***la fonction de Lagrange*** ou ***le Lagrangien du système L*** définie par la relation : **L = T- U**

Pour un système à un degré de liberté (ddl = 1), l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$$

*Pour un mouvement de translation unidimensionnel x, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

*Pour un mouvement rotationnel θ, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$$

Exemple

Refaire la solution de l'exercice précédent en utilisant le formalisme de Lagrange.

Solution

$T = ½\, m\dot{Z}(t)^2$, $U = ½\, k\, Z^2 + Cte$,

$L = T – U = ½\, m\dot{Z}(t)^2 - ½\, k\, Z^2 + Cte$

L'équation de Lagrange du système est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Z} = 0$

Avec : $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}\right) = m\ \dot{Z} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}\right) = m\ddot{Z}$

$\frac{\partial L}{\partial Z} = - k\, Z$

Remplaçons dans l'équation de Lagrange, on obtiendra donc : $m\ddot{Z}(t) + kZ = 0$ ou $\ddot{Z}(t) + k/m\, Z = 0$