3.1. Introduction

Dans le chapitre 2, nous n'avons pas pris en considération de certaines réalités physiques. En effet, nous n'avons pas tenu compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme ***de chaleur***. Dans ce chapitre, nous allons tenir compte les forces de frottement et en considérant le cas simple où les pertes d'énergie sont dues à ***des frottements visqueux***, pour lesquels les forces de frottement qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse du déplacement du système.

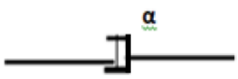
3.2. Oscillateur amorti

Définition : On appelle *oscillateur libre amorti,* un oscillateur abandonné à lui-même et est soumis à un amortissement dû à l'existence d'une ***force de frottement fluide ou visqueux*** (force visqueuse). Cette force de frottement dissipe l'énergie mécanique de l'oscillateur lors du mouvement sous forme de chaleur. La force de frottement visqueux est de la forme : $\overrightarrow{F_{frot}} = -\alpha\,\vec{v} = -\alpha\,\dot{x}\,\overrightarrow{U_x}$ Tel que :

α est une constante positive appelée coefficient de frottement et qui a pour unité **(N.s.m^{-1}).**

$\vec{v}$ est la vitesse du système en **(m.s^{-1}).**

En mécanique : nous représentons les forces de frottement par un amortisseur schématisé par le symbole :

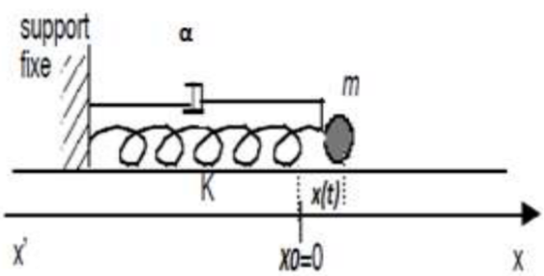


Horizontal ou vertical

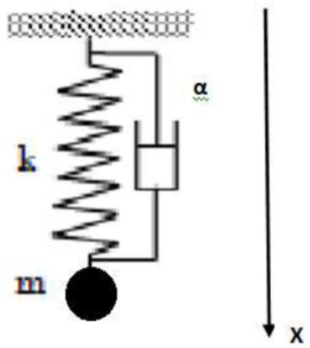
Dans ce cas, la vitesse $\vec{v}$ est ***la vitesse relative des deux bras de l'amortisseur*** notée $\vec{v}_{amort}$. Selon le point de fixation de l'amortisseur, on caractérise deux cas :

- Si l'amortisseur est placé (fixé) directement sur la masse m (cas d'un oscillateur masse-ressort ou pendule simple), dans ce cas : $\vec{v}_m = \vec{v}_{amort}$;
- Si l'amortisseur est placé loin de la masse m, dans ce cas : $\vec{v}_m \neq \vec{v}_{amort}$

Exemples



$\vec{v}_m = \vec{v}_{amort}$



a-*Système masse –ressort amorti horizontal* **b**-*Système masse –ressort amorti vertical*

Figure 3.1. Représentation d'un système masse-ressort, amorti par le frottement (Modèle *mkα*). L'état de l'oscillateur (a) est défini par l'écart **x** de la masse par rapport à une position d'origine $x_0 = 0$ correspondant à la position d'équilibre statique.

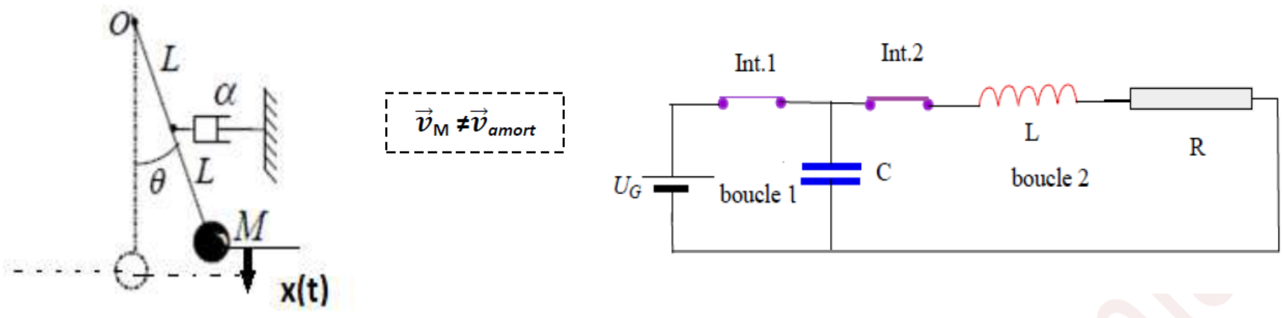


Figure 3.2. Autres oscillateurs amortis à un degré de liberté.

a- Pendule simple amorti (l'amortisseur est placé loin de la masse).

*b- Oscillateur électrique élémentaire amorti type RLC (la résistance **R** dans ce circuit joue le rôle de la force de frottement).*

3.3. Equation de mouvement d'un oscillateur amorti

3.3.1. PFD

Dans un système masse-ressort (figure.3), les frottements visqueux provoquent une force proportionnelle et opposée en sens à la vitesse :

$\vec{F}_{frot} = -\alpha\,\vec{v} = -\alpha\frac{dx}{dt}\overrightarrow{U_x} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{U_x}$

α étant le coefficient de frottement. L'équation de mouvement dérivée de la loi de Newton s'écrit alors (suivant la direction $\overrightarrow{U_x}$) :

$-F_{frot} - F_{rap} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$

$-\alpha\dot{x} - k\,x = m\ddot{x} \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ (1)

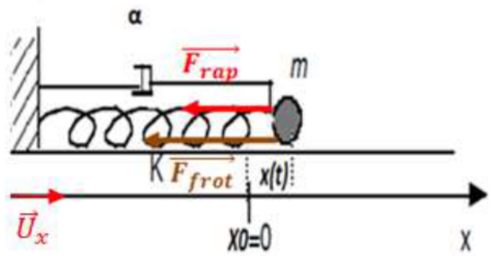


Figure 3.3. Oscillateur masse-ressort-amortisseur

Le mouvement suit donc une variation obtenue par résolution d'une équation pouvant être écrite sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \qquad (2)$$

Avec ; $\boldsymbol{\delta = \frac{\alpha}{2m}}$ est un coefficient qui caractérise la **décroissance de l'oscillation** en raison des frottements appelé **facteur d'amortissement** mesuré en **(s^{-1})**.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre ou naturelle des oscillations libres non amorties.

3.3.2. Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange pour le système précédent s'écrit ; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\alpha\dot{x}$ (1*)

En introduisant, **la fonction de dissipation D de l'énergie mécanique** du système qui est égale à la demi-puissance dissipée sous forme de chaleur lors du mouvement ; $D = \frac{1}{2} P_d = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

où ∂Q est la quantité de chaleur fournie par les forces de frottement pendant ∂t.

L'équation (1*) se simplifie en ; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$ (2*) car $F_{frot} = -\alpha\dot{x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

On peut généraliser l'équation (2*) pour tous les systèmes amortis, comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \qquad (3^*)$$

Avec : q est la coordonnée généralisée ;

<u>*En translation :*</u> q = x, y , z et $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

<u>*En rotation :*</u> q = θ, φ.... et $D = \frac{1}{2} \alpha(\ell\dot{\theta})^2$

<u>*En électricité :*</u> q = u, i, q (charge électrique) et $D = \frac{1}{2} R i^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$

Le développement de l'équation de Lagrange (éq. 3*) conduit à l'équation de mouvement des systèmes amortis à un degré de liberté suivante ; $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ **(3)** avec **L = T-U**

3.4. Résolution de l'équation de mouvement de l'oscillateur amorti

On cherche une solution de l'équation (3), sous la forme suivante ; $q(t) = C e^{rt}$

Tel que : **r** est une racine de l'équation (3) et **C** une constante.

Le report de q(t) et de ses dérivées successives ($\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$) par rapport au temps dans l'équation (4) conduit à l'équation :

$$C r^2 e^{rt} + 2\delta C r e^{rt} + \omega_0^2 C e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow C (r^2 + 2\delta r + \omega_0^2) e^{rt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \text{ou} \\ r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

La résolution de l'équation (4) appelée ***équation caractéristique*** de l'équation (3) conduit à calculer son *discriminant réduit :*

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$$

Les solutions de cette équation du second degré sont complexes et dépendent de la valeur du discriminant réduit Δ' (< 0, 0 ou > 0) et en fait de l'importance du facteur d'amortissement δ.

On distingue alors 3 types de réponses en fonction de δ

- <u>*Premier cas*</u> ; **Δ' =0,** c'est-à- dire **$\delta = \omega_0$ (Amortissement critique)**

Lorsque le discriminant réduit Δ' est nul, la solution **r** de l'équation caractéristique (4) est donnée par la racine double **$r = -\delta$** et la solution q(t) de l'équation de mouvement (4) est donnée par :

$$q(t) = (At + B)e^{rt}$$

Soit donc : **$q(t) = (At + B)e^{-\delta t}$**

A et B sont des constantes dépendent des conditions initiales. Ce cas correspond au ***<u>régime critique</u>***, où le système après avoir été écarté de sa position d'équilibre statique, il revient le plus rapidement à cette position sans osciller.

- <u>*Deuxième cas*</u> ; **$\Delta' > 0$,** c'est-à- dire **$\delta > \omega_0$ (Amortissement fort)**

Dans ce cas, l'équation caractéristique admet deux racines réelles **r_1** et **r_2** telles que $\begin{cases} r_1 = -\delta - \sqrt{\Delta'} \\ r_2 = -\delta + \sqrt{\Delta'} \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} r_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

La solution **q(t)** de l'équation de mouvement s'écrit dans ce cas : $q(t) = A\,e^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

Soit donc : **$q(t) = e^{-\delta t}\left(A\,e^{-t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} + Be^{t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}\right)$**

Ce cas correspond au ***<u>régime apériodique ou suramorti</u>***. Le système n'oscille pas.

Remarque

Dans le cas d'un amortissement fort, le retour du système à l'état d'équilibre se fait asymptotiquement pour un temps infini, sans que jamais le mobile ne passe par la position d'équilibre.

Exemple

La figure ci-contre représente les variations de **q** en fonction du temps pour les deux régimes : apériodique et critique d'un oscillateur dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. Le régime critique permet un retour plus rapide à la position d'équilibre que les autres régimes.

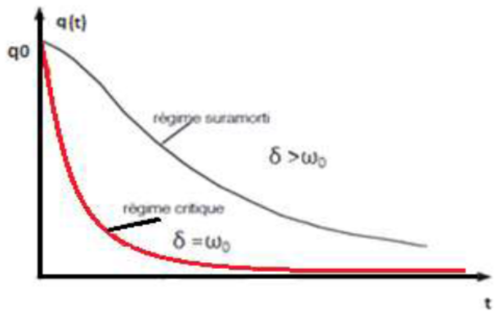


Figure 3.4. Régimes apériodique et critique d'un oscillateur amorti.

- <u>*Troisième cas*</u> ; **$\Delta' < 0$,** c'est-à- dire **$\delta < \omega_0$**

  (Amortissement faible)

Dans ce cas, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ telles que $\begin{cases} r_1 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ r_2 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{cases}$

Pour simplifier les notations précédentes, nous choisissons ; $\boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Nous obtiendrons donc : $\begin{cases} r_1 = -\delta - j\omega_a \\ r_2 = -\delta + j\omega_a \end{cases}$

La solution **q(t)** de l'équation de mouvement s'écrit dans ce cas : $q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

Après développement et simplification de l'expression précédente de **q(t),** on obtiendra la formule simple suivante ; $\mathbf{q(t) = A_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)}$ **ou** $\mathbf{q(t) = A_0\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \phi)}$

Le régime correspondant est appelé ***régime pseudo périodique*** dans lequel on observe des oscillations mais avec une amplitude qui décroît dans le temps. La réponse n'est donc plus harmonique. $\boldsymbol{\omega_a}$ est la pulsation propre de l'oscillateur amorti ou **pseudo pulsation.**

Le système passe périodiquement par la position d'équilibre, mais avec une amplitude d'oscillation qui décroît d'une période à l'autre. $\boldsymbol{\phi}$ et $\mathbf{A_0}$ sont respectivement, la phase et l'amplitude initiales (à t=0) ; ces deux paramètres dépendent des conditions choisies à cet instant.

Le mouvement pseudo périodique peut être aussi caractérisé par sa période propre appelée pseudo période notée $\mathbf{T_a}$ définie par : $\boldsymbol{T_a} = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$ ou par sa pseudo fréquence : $\boldsymbol{f_a} = \frac{1}{T_a} = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Exemple

La figure ci- dessous représente les variations de $\mathbf{q(t) = A_0\, e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \phi)}$ en fonction du temps pour un régime pseudo - périodique d'un oscillateur faiblement amorti dans le cas particulier où $q(0) = A_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. Le mouvement est un mouvement *oscillant* dont l'amplitude décroît avec *une constante de temps* $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\delta}$ qui est la durée au bout de laquelle, l'amplitude est divisée par e. Cette constante de temps augmente si l'amortissement diminue.

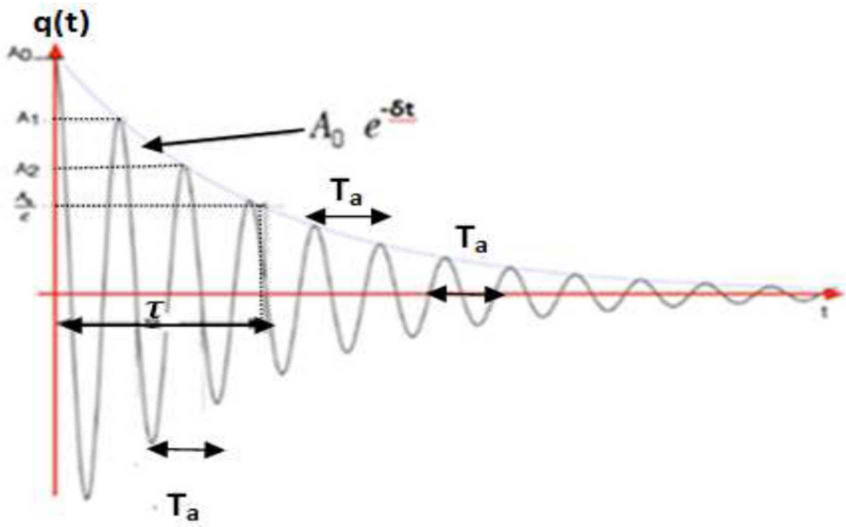


Figure 3.5. Amplitude d'un oscillateur amorti en fonction du temps en régime pseudo périodique.

Remarque

L'allure de la solution $q(t) = A_0\, e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \phi)$ est obtenue de la multiplication des fonctions $A_0\cos(\omega_a t + \phi)$ et les fonctions exponentielles ($\pm\, e^{-\delta t}$), comme le montre la figure 3.6.

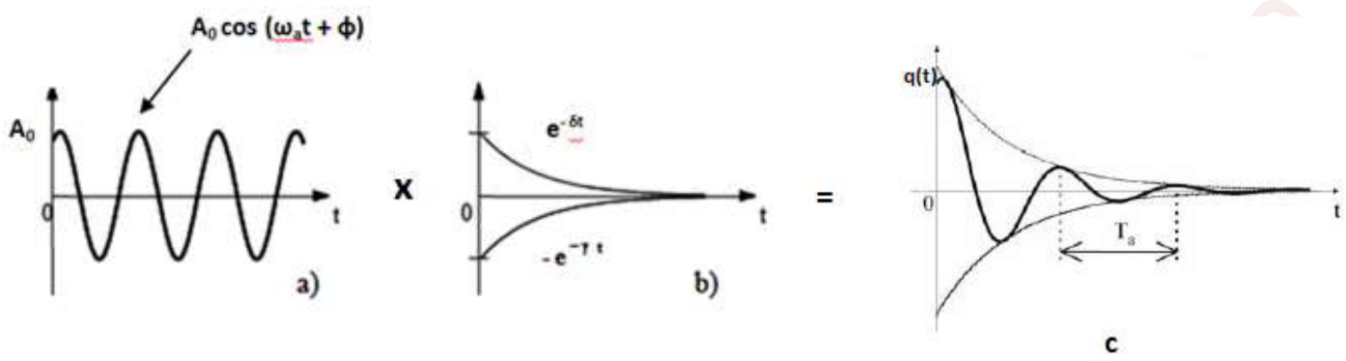


Figure 3. 6. Multiplication des fonctions $A_0\, e^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\phi)$ et ($\pm\, e^{-\delta t}$).

3.5. Décrément logarithmique du mouvement pseudo-périodique

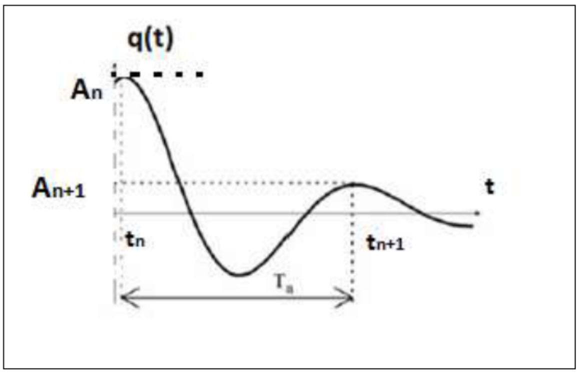
La décroissance de façon exponentielle de l'amplitude d'oscillation d'un oscillateur amorti en régime pseudo - périodique, peut être définie en calculant ***la constante de temps*** $\tau = \frac{1}{\delta}$ (ou ***temps de relaxation*** en amplitude) qui indique le temps nécessaire pour que l'amplitude passe de **$A_{Max} = A_0$ à $t = 0$** à **$A_{MAX}/e = 0.37\ A_{MAX}$ à $t = \tau$**. On utilise aussi parfois le ***décrément logarithmique*** **D** comme paramètre caractéristique de la décroissance de l'oscillation. Ce paramètre est donné par la relation suivante :

$$D = Ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = Ln\left(\frac{A_0 e^{-\delta t_n}}{A_0 e^{-\delta t_{n+1}}}\right)$$

$$= Ln\ e^{\delta (t_{n+1} - t_n)}$$

$$= \delta\,(t_{n+1} - t_n)$$

$$D = \delta\, T_a = \frac{T_a}{\tau} \quad \textbf{(sans unité)}$$



Avec :

A_n est la nième élongation (amplitude)

A_{n+1} est l'élongation successive (du même côté).

($\frac{A_n}{A_{n+1}}$) est ***le rapport entre deux maximums (ou minimums) successifs*** : ($\frac{A_n}{A_{n+1}}$) = $e^{\delta T_a}$

La mesure du décrément logarithmique permet d'accéder au facteur de qualité de l'oscillateur.

3.6. Facteur de qualité du mouvement pseudo - périodique Q

Le facteur de qualité d'un système amorti est une grandeur qui tient compte de la faculté du système considéré à osciller ; il est défini par

$$Q = \omega_0 / (2\delta) \qquad \text{(sans unité)}$$

Par suite ;

- Si $\delta > \omega_0$, c'est –à- dire si **Q < 1/2,** le régime est apériodique ;
- Si $\delta = \omega_0$, c'est –à- dire si **Q = 1/2,** le régime est critique ;
- Si $\delta < \omega_0$, c'est –à- dire si **Q > 1/2,** le régime est pseudo – périodique.

En utilisant l'expression du facteur de qualité introduite plus haut, on peut déduire la relation entre *la pulsation propre des oscillations non amorties* $\boldsymbol{\omega_0}$ et la pulsation propre des *oscillations amorties ou pseudo – pulsation* $\boldsymbol{\omega_a}$ d'un système comme suit ;

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2\left(1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La même chose pour T_a et T_0 ;

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$$T_a = T_0 / \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \Rightarrow \quad f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{1}{T_0}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Remarque

En pratique, ω_a et ω_0 peuvent être confondues pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$ *(donc Q est grand).*

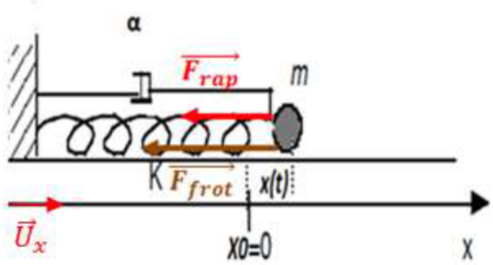
3.7. Décroissance de l'énergie mécanique de l'oscillateur amorti au cours du temps (énergie non conservée)

Etudions comme exemple, le cas de l'oscillateur masse-ressort-amortisseur figuré ci-contre.

L'énergie totale de cet oscillateur étant donnée par ;

$$E_T = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad \textbf{(1)}$$



D'autre part, son équation de mouvement est ;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = -\alpha\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(2)}$$

Dérivons l'énergie totale ;

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\, m\, (\frac{dx}{dt})^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2\right]$$

$$= m\, \frac{dx}{dt}\, (\frac{d^2x}{dt^2}) + \frac{1}{2}\, kx(\frac{dx}{dt})$$

$$= \left[m\, \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \, kx\right]\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(3)}$$

Or, d'après l'équation du mouvement (éq.2), nous avons : $m\frac{d^2x}{dt^2} + k\, x = -\alpha\, \frac{dx}{dt} = f_{Frot}$

Remplaçons donc dans l'équation (3), nous obtiendrons l'équation simplifiée suivante ;

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = f_{Frot}\frac{dx}{dt} = P_f \qquad \textbf{(4)}$$

Le terme à gauche de cette équation correspond à la variation de l'énergie totale du système à un instant donné. Le terme à droite désigné par P correspond à la puissance instantanée des forces de frottement. On a donc :

$$dE_{tot} = P_f\, dt \qquad \textbf{(5)}$$

Cette équation indique que, La force de frottement transforme l'énergie de l'oscillateur en chaleur. L'énergie dissipée pendant un temps Δt correspond au travail de la force de frottement pendant ce temps. Le travail de la force de frottement est :

$$dw_f = f_{Frot}dx = -\alpha\, \frac{dx}{dt}\, dx \qquad \textbf{(6)}$$

Démontrons maintenant que l'énergie totale n'est plus conservée au cours du temps $(\frac{dE}{dt} \neq 0)$, en partant de l'expression : $x(t) = A_0\, e^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\phi) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -A_0\, e^{-\delta t}[\delta\cos(\omega_a t+\phi) + \omega_a \sin(\omega_a t+\phi)]$

- $E_C(t) = \frac{1}{2}\, m\, (\frac{dx}{dt})^2 = \frac{1}{2}\, m\, A_0^2\, e^{-2\delta t}\, [\delta^2\cos^2(\omega_a t+\phi) + \omega_a^2 \sin^2(\omega_a t+\phi) + 2\,\delta\,\omega_a \cos(\omega_a t+\phi)\sin(\omega_a t+\phi)]$

La valeur instantanée n'est pas très intéressante, considérons la valeur moyenne de $E_C(t)$ sur une période T_a et en considérant le facteur $e^{-\delta t}$ constant (ce facteur varie très peu sur une période). On aura donc :

$$\langle E_c(t)\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{Ta} E_C\,(t)dt = \frac{1}{2}\, [\frac{1}{2} m\, A_0^2\, e^{-2\delta t}(\delta^2 + \omega_a^2)]$$

$$\langle E_c(t)\rangle = \frac{1}{4} m\, A_0^2\, e^{-2\delta t}(\delta^2 + \omega_a^2)$$

$$\langle E_c(t)\rangle = \frac{1}{4} m\, A_0^2\, \omega_0^2 e^{-2\delta t} \;/\; \omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\langle E_c(t)\rangle = \frac{1}{4} K\, A_0^2\, e^{-2\delta t} \;/\; m\,\omega_0^2 = K \qquad \textbf{(7)}$$

La même chose pour l'énergie potentielle du système ;

- $E_p(t) = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega_a t+\phi)$

La valeur moyenne est égale à (avec la même hypothèse que ci-dessus) :

$$\langle E_p(t)\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{T_a} E_p(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\delta t}\right)$$

$$\langle E_p(t)\rangle = \frac{1}{4} K A_0^2 e^{-2\delta t} \qquad (8)$$

On a bien : $\langle E_c(t)\rangle = \langle E_p(t)\rangle$ et l'énergie totale est ;

$$\langle E_T(t)\rangle = \langle E_c(t)\rangle + \langle E_p(t)\rangle = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\delta t}$$

$$\langle E_T(t)\rangle = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau_{énergie}}} \qquad (9)$$

L'énergie décroît donc avec un temps caractéristique (ou **temps de relaxation**) : $\tau_{énergie} = \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{2}\tau_{amplitude}$

Donc : $$\frac{d\langle E_T(t)\rangle}{dt} = -\frac{K A_0^2}{2\,\tau_{énergie}} e^{-\frac{t}{\tau_{énergie}}} \neq 0 \qquad (10)$$

L'énergie mécanique d'un oscillateur amorti n'est plus conservée au cours du mouvement.

Information :

Le contact de l'oscillateur avec l'environnement peut se traduire par une ***perte d'énergie*** due au travail résistant des forces d'interaction entre les parties en mouvement et l'environnement. Il apparaît donc dans l'équation dynamique un nouveau terme de force F(v) qui dépend, entre autres, de la vitesse et qui s'oppose au mouvement. En général, cette fonction F(v) est compliquée et s'exprime par un développement en puissance de v. Dans le cas particulier très important des conducteurs ohmiques, cette force est strictement proportionnelle à la «*vitesse*». Dans de nombreuses situations hydro- ou aérodynamiques, on se contente de ce qu'on appelle une force visqueuse proportionnelle à la vitesse, mais il ne s'agit là que d'une approximation essentiellement valable ***aux faibles vitesses***.