

#### 4.1. Oscillateur forcé (entraîné) – Force d'excitation externe

**Définition :** Lorsque le système en mouvement soumis à une force extérieure *fonction du temps* (pas nécessairement sinusoïdale), ses oscillations produites ne sont plus libres. On les appelle donc **oscillations forcées** et la force extérieure appliquée au système est dite : **force d'excitation externe** (ou extérieure).

#### Exemples

- Oscillateur mécanique lié à un moteur ;
- Circuit électrique en présence d'un générateur de courant alternatif (filtre passif) ;
- Electrons liés à un atome et soumis à un champ électromagnétique, etc.

#### 4.2. Équation du mouvement d'un oscillateur forcé

**Modèle choisi : oscillateur masse-ressort amorti vertical**

Une masse ponctuelle  $m$  est suspendue à un ressort de masse négligeable et de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient de frottement  $\alpha$ . Un mécanisme (non représenté sur le schéma) soumet la masse  $m$  à une force  $\vec{F}(t)$  (figure 4.1) *sinusoïdale* de pulsation  $\omega$  de la forme  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ . La position de la masse  $m$  est repérée par l'abscisse  $x(t)$  dont l'origine est prise à la position d'équilibre de la masse (représentée en pointillé).

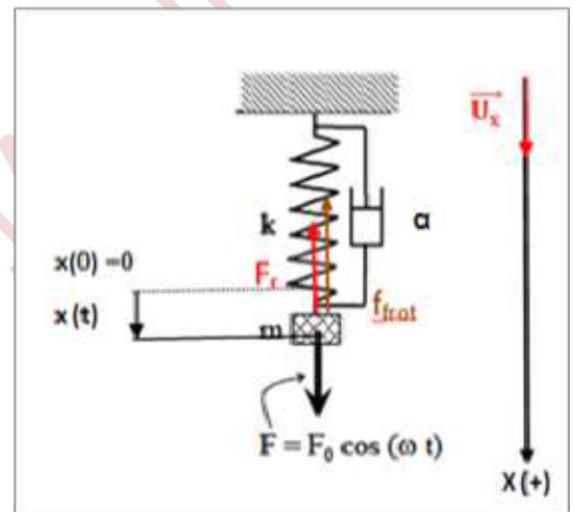


Figure 4.1. Oscillateur masse-ressort-amortisseur vertical.

##### 4.2.1. PFD

Il convient comme dans le cas de l'oscillateur libre, de donner l'état du système par l'intermédiaire de son écart  $x$  par rapport à sa position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{P} + \vec{F}_r + \vec{f}_{\text{frot}} + \vec{F}(t) = m\vec{a} \quad (4.1)$$

Avec

$$\vec{f}_{\text{frot}} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{U}_x = -\alpha \dot{x} \vec{U}_x, \vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{U}_x$$

$$\vec{F}_r = -k[(l_{\text{éq}} - l_0) + (l - l_{\text{éq}})] \vec{U}_x$$

$$\vec{F}_r = -k(x_0 + x) \vec{U}_x, \vec{P} = mg \vec{U}_x$$

$x_0 = (l_{\text{éq}} - l_0)$  est la prolongation à l'équilibre du ressort ;

$x = (l - l_{\text{éq}})$  sa prolongation en mouvement.

$(x_0 + x)$  est la prolongation totale du ressort à l'instant  $t$ .

$l_0, l_{eq}$  et  $l$ , sont respectivement, la longueur du ressort à vide, à l'équilibre et en mouvement. La projection suivant la direction  $\vec{U_x}$  de l'équation (1) donne :

$$\begin{aligned} mg - k(x_0 + x) - \alpha \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) &= m\ddot{x} \\ \Rightarrow (mg - kx_0) - kx - \alpha \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

Et comme

$$(mg - kx_0) = 0, \text{ la condition d'équilibre}$$

L'équation précédente se simplifie en :

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Ou bien

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (4.2)$$

Soit

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre (2<sup>ème</sup> partie), où :

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre des oscillations non amorties ;  $\delta = \alpha/(2m)$  et  $f_0 = F_0/m$

#### Remarques

- Il ne faut pas confondre la notation  $\omega_0$  qui désigne la pulsation propre des oscillations libres non amorties du système, et la notation  $\omega$  qui désigne la pulsation des oscillations forcées ;
- Il convient également de noter que le terme «sinusoïdal» désigne une fonction circulaire qui peut être soit la fonction cosinus, soit la fonction sinus. C'est la fonction cosinus qui est choisie dans nos applications par commodité, mais la fonction sinus aurait tout aussi bien pu être utilisée.

#### 4.2.2. Équation de Lagrange

L'équation de Lagrange pour le système forcé précédent s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \frac{\partial D}{\partial x} + F(t) \quad (4.4)$$

Et le Lagrangien  $L$  du système est défini par :  $L = T - U_p$

Avec

$$T = 1/2m\dot{x}^2, U_p = 1/2kx^2 + \text{cte}, D = 1/2\alpha\dot{x}^2$$

Donc

$$L = 1/2mx^2 - 1/2kx^2 + \text{cte}' \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -kx, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -\alpha\dot{x}$$

L'équation (4) se simplifie donc en ;  $m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} + F_0 \cos(\omega t)$

Ou

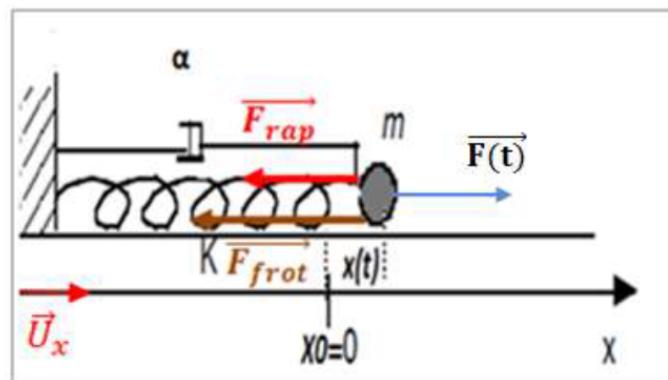
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Cette équation est bien que celle obtenue à l'aide du PFD.

### Remarque1

On peut aussi choisir le modèle de l'oscillateur masse-ressort amorti horizontal étudié dans le chapitre 3 pour trouver l'équation du mouvement des systèmes forcés.

**Figure 4.2.** Oscillateur masse-ressort-amortisseur horizontal.



### Remarque2

L'équation de Lagrange pour les systèmes forcés effectuant un mouvement de rotation est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \theta} + M(t)$$

$M(t)$  est le moment de la force externe  $F(t)$ .

### 4.3. Résolution de l'équation du mouvement de l'oscillateur forcé

La solution générale  $x(t)$  de l'équation (3) (ou la réponse du système forcé), est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre notée  $x_p$  et de la solution homogène de l'équation homogène associée (c'est – à- dire avec second membre nul) notée  $x_h$ . Ce qui conduit à :

$$x(t) = x_h + x_p \quad (4.5)$$

#### 4.3.1. La solution homogène

Elle est dite aussi la solution transitoire car elle s'éteint au cours du temps (correspond au régime transitoire). Elle présente la solution de l'équation (3) sans second membre et c'est pour ça le nom homogène. Donc,  $x_h$  vérifie l'équation :

$$\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (4.6)$$

La solution  $x_h$  de l'équation homogène a déjà été étudiée dans le troisième chapitre et elle est donnée selon les valeurs relatives de  $\delta$  et  $\omega_0$  par l'une des équations suivantes :

Si  $\delta = \omega_0$

$$x_h(t) = (At + B)e^{-\delta t}$$

Si  $\delta > \omega_0$

$$x_h(t) = e^{-\delta t} (A e^{-t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} + B e^{t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}})$$

Si  $\delta < \omega_0$

$$x_h(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

Où les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $A_0$  et  $\phi$  sont déterminées par les conditions initiales portant sur la solution totale :  $[x(t) = x_h + x_p]$  de l'équation (3).

#### 4.3.2. La solution particulière

Elle est dite aussi la *solution permanente* car elle dure tout au long du mouvement (correspond au régime permanent). Elle présente la solution de l'équation (3) avec second membre.  $x_p$  vérifie l'équation :

$$\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = f_0 \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

La solution homogène n'existe que pendant un régime transitoire dont la durée dépend de la quantité d'amortissement présent dans l'oscillateur. Cette durée est caractérisée par le temps de décroissance de l'énergie de déformation initiale en régime libre ou **temps de relaxation** :  $\tau_{énergie} = \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{2} \tau_{amplitude}$

Au bout d'un temps de quelques fois (4 à 5)  $\tau_{éner}$ , on peut considérer qu'on a un régime permanent auquel il convient de s'intéresser plus particulièrement. Dans ce régime, la solution homogène devient négligeable devant la solution permanente.

#### 4.4. Recherche d'une solution particulière à l'aide de la représentation complexe

On cherche une solution particulière de la forme  $x_p = C \cos(\omega t + \varphi)$ . Cette solution s'applique d'autant plus vite que l'amortissement est important avec :

- $\omega$  est un paramètre que l'on fait varier et il est le même que celui de la force d'excitation;
- $C$  est l'amplitude des oscillations forcées du système en régime permanent ;
- $\varphi$  est le déphasage des oscillations de ce système par rapport à celle de la source.

$C$  et  $\varphi$  dépendent de  $\omega$ ,  $K$ ,  $\alpha$  et  $m$ , mais ne dépendent pas des conditions initiales.

Au début de l'excitation, on observe donc un régime transitoire pendant lequel les deux solutions coexistent. Le régime transitoire est suivi du régime forcé permanent (au bout d'un temps de 4 à 5  $\tau_{éner}$ ).

#### 4.4.1. Amplitude et phase en régime permanent

En régime permanent, la réponse correspond à une solution particulière de la forme :

$$x(t) \approx x_p = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.8)$$

A l'aide de la formule d'Euler, cette expression s'écrit sous la forme complexe suivante :

$$\bar{x}(t) = C e^{j(\omega t + \varphi)} = C e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} = \bar{C} e^{j(\omega t)} \quad (4.9)$$

dont la partie réelle correspond au phénomène physique. La grandeur  $\bar{C}$  est l'amplitude complexe ; ce terme contient l'information sur l'amplitude et le déphasage entre la réponse et l'excitation :

$$\bar{C} = C e^{j\varphi} \quad (4.10)$$

Par suite, les dérivées première et seconde de la nouvelle expression (4.9) s'écrivent respectivement :

$$\dot{\bar{x}} = j\omega \bar{C} e^{j(\omega t)} = j\omega \bar{x} \text{ et } \ddot{\bar{x}} = j^2 \omega^2 \bar{C} e^{j(\omega t)} = -\omega^2 \bar{x}$$

En introduisant la forme complexe de la solution dans l'équation (4.7), nous obtenons donc :

$$[-\omega^2 + j2\delta\omega + \omega_0^2] \bar{C} e^{j(\omega t)} = \mathbf{f}_0 e^{j(\omega t)}, \forall t \geq 0$$

Cette équation a la solution algébrique suivante :

$$\bar{C} = \frac{\mathbf{f}_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega]} = C e^{j\varphi} \quad (4.11)$$

La solution réelle est donnée par  $x(t) = C(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$  où  $C(\omega)$  est l'amplitude du mouvement harmonique observé, et  $\varphi(\omega)$ , le déphasage de ce mouvement de la masse  $m$  par rapport à la force d'excitation qui est à l'origine. On a :

$$\begin{aligned} C(\omega) &= |\bar{C}| = \left| \frac{\mathbf{f}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega} \right| \\ &= \frac{\mathbf{f}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ C(\omega) &= \frac{\mathbf{F}_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'expression (4.11) peut sous mettre sous la forme suivante :

$$\bar{C} = \frac{\mathbf{f}_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega]} = \frac{\mathbf{f}_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega]} \times \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\delta\omega}$$

$$\bar{C} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2) - j(2\delta f_0 \omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2} - j \frac{2\delta f_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2}$$

Ou

$$\bar{C} = \operatorname{Re}(\bar{C}) + j \operatorname{Im}(\bar{C}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{C}) = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2} \\ \operatorname{Im}(\bar{C}) = -\frac{2\delta f_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2} \end{cases}$$

La phase  $\varphi(\omega)$  peut être déduite de l'équation :  $\tan \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im}(\bar{C})}{\operatorname{Re}(\bar{C})} = -\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Soit donc

$$\varphi(\omega) = \arctan \left[ -\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \quad (4.13)$$

Enfin, La solution réelle comme nous l'avons dit plus haut est :  $x(t) = C(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

Ou

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctan \left[ -\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]) \quad (4.14)$$

#### 4.4.2. Représentations schématiques de l'amplitude et de la phase de réponse d'un système forcé

Dans le but de généraliser les expressions (4.12) et (4.13), il est commode d'introduire les paramètres relatifs ci-après afin d'obtenir des expressions indépendantes des caractéristiques de l'oscillateur (la masse m, la raideur du ressort k, la pulsation propre des oscillations libres non amorties  $\omega_0$  et le facteur d'amortissement  $\delta$ ) :

$$\Omega = \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \text{ la pulsation relative} \quad (4.15-a)$$

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\alpha}{2m\omega_0}, \text{ le facteur d'amortissement} \quad (4.15-b)$$

$$C_0 = C(\omega = 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}, \text{ l'amplitude en l'absence d'excitation} \quad (4.15-c)$$

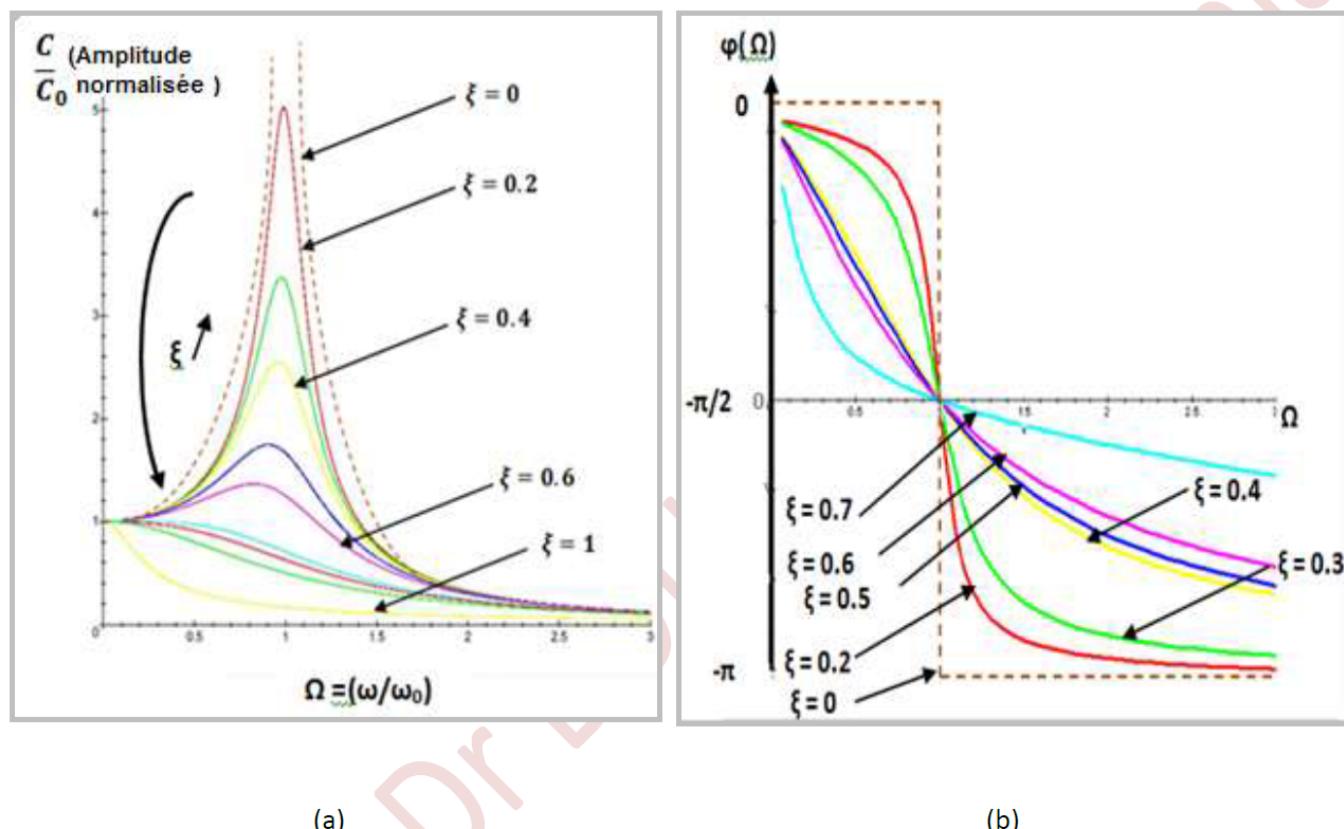
Ces paramètres relatifs conduisent aux expressions suivantes :

$$\frac{C}{C_0}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \quad (4.16)$$

et

$$\varphi(\Omega) = \arctan \left( -\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2} \right) \quad (4.17)$$

Les figures (4. 3) présentent les courbes représentatives, de l'amplitude normalisée ( $C/C_0$ ) et de la phase  $\varphi$  en fonction de la pulsation réduite (ou relative)  $\Omega$ , pour différentes valeurs d'amortissement  $\xi$  (régime critique pour  $\xi = 1$ , régime apériodique pour  $\xi > 1$ , régime pseudo - périodique pour  $\xi < 1$  et oscillateur non amorti pour  $\xi = 0$ ). On remarque que l'amplitude d'oscillation du système forcé augmente lorsque  $\xi$  diminue et vice versa. Le pic de l'amplitude devient aigu lorsque  $\omega$  s'approche de  $\omega_0$  ( $\Omega$  s'approche de 1).



**Figure 4. 3.** Représentation schématique de l'amplitude normalisée ( $C/C_0$ ) : (a) et de la phase  $\varphi$  : (b) en fonction de la pulsation réduite  $\Omega$  pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement  $\xi$ .

La courbe de la phase  $\varphi(\Omega)$  de la figure (4.3.b) a été schématisée à l'aide de l'étude mathématique suivante :

$$\tan\varphi(\Omega) = \left(-\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\Omega} [\tan\varphi(\Omega)] = \frac{\partial}{\partial\Omega} \left(-\frac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right) = -2\xi \frac{1+\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2} < 0$$

Donc,  $\tan\varphi(\Omega)$  est une fonction décroissante.

✓  $\lim \tan\varphi(\Omega) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ , donc :  $x(t)$  et  $F(t)$  sont en phase

$$\Omega = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow 0 \text{ (c'est - à- dire, } \omega = 0)$$

✓  $\lim \tan\varphi(\Omega) = -\infty \Rightarrow \varphi = -\pi/2$ , donc :  $x(t)$  et  $F(t)$  sont en quadrature de phase

$$\Omega = \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \rightarrow 1 \text{ (c'est - à- dire, } \omega = \omega_0)$$

✓  $\lim \tan \varphi(\Omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\pi$ , donc :  $x(t)$  et  $F(t)$  sont en opposition de phase

$$\Omega = \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \rightarrow \infty \text{ (c'est - à- dire, } \omega \rightarrow \infty)$$

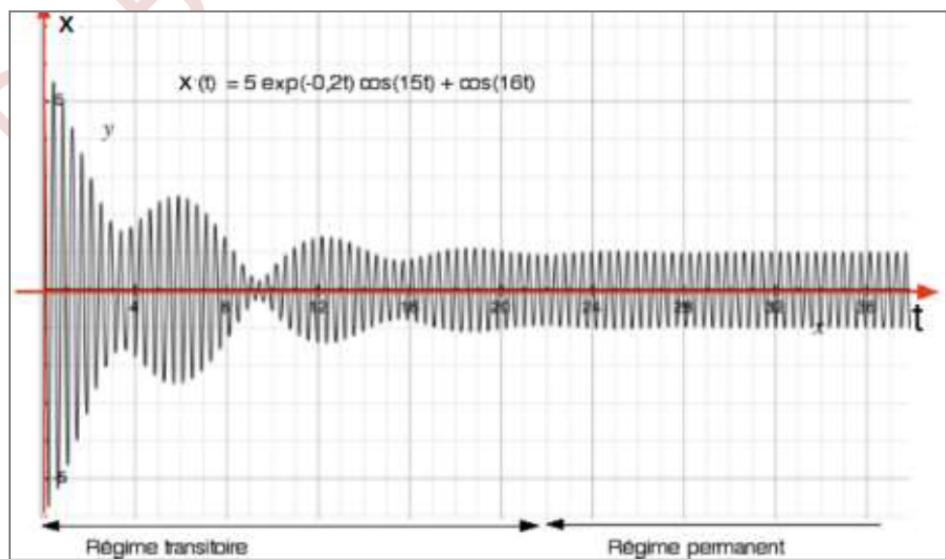
Les résultats sont résumés dans le tableau ci- contre :

$\Omega$	0	1	$\infty$
$\omega$	0	$\omega_0$	$\infty$
$\varphi$	0	$-\pi/2$	$-\pi$

### Remarque

- Si l'oscillateur est non amorti et forcé (c'est - à- dire,  $\alpha = 0 \Rightarrow \delta = 0$ , donc  $\xi = 0$ ) pour une pulsation (ou une fréquence) d'excitation différente de la pulsation propre (fréquence propre) du système ( $\omega \neq \omega_0$ ), la solution générale  $x(t)$  est la somme de deux mouvements sinusoïdaux : mouvement propre + mouvement d'excitation qui ne disparaissent jamais au cours du temps, il n'y a pas de régime transitoire et le régime est immédiatement un régime permanent.
- Si l'oscillateur est non amorti et forcé à une pulsation (ou une fréquence) d'excitation très proche de la pulsation propre (fréquence propre) du système ( $\omega \approx \omega_0$ ), nous verrons qu'il y a des battements. Si la pulsation d'excitation est égale à la pulsation propre du système ( $\omega = \omega_0$ ), l'amplitude tend vers l'infini.

Figure 4. 4. Exemple de réponse d'un oscillateur amorti et forcé



### 4. 5. Résonance d'amplitude

**Définition.** La résonance d'un oscillateur amorti et forcé est s'établie, lorsque l'amplitude des oscillations forcées  $C(\omega)$  atteinte son maximum  $C_{\text{Max}}$ . On appelle donc, la pulsation d'excitation externe  $\omega$  pour laquelle l'amplitude  $C(\omega)$  devient maximale, pulsation de résonance notée  $\omega_r$ .

L'amplitude  $C(\omega)$  est maximale, lorsque  $\frac{\partial C(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Par anticipation sur l'équation (4.12), } \frac{\partial C(\omega)}{\partial \omega} = 0 &\Rightarrow \frac{[-4 \omega (\omega_0^2 - \omega^2) + 8 \delta^2 \omega] F_0/m}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{3/2}} = 0 \\ &\Rightarrow -4 \omega [(\omega_0^2 - \omega^2) + 8 \delta^2] = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow C(0) = C_0 = F_0/m \omega_0^2 \\ \text{ou} \\ -4 (\omega_0^2 - \omega^2) + 8 \delta^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution de la deuxième équation donne la *pulsation de résonance*  $\omega_r$ , soit donc :

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \delta^2} \quad (4.18)$$

Ou bien, en utilisant les paramètres relatifs  $\Omega$  et  $\xi$  définis plus haut :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{d'où} \quad \Omega_r = \sqrt{1 - 2 \xi^2} \quad (4.19)$$

La pulsation de résonance  $\omega_r$  est donc, la pulsation de la force d'excitation pour laquelle l'oscillateur répond avec une amplitude maximale,  $C_{\text{Max}}$  donnée par anticipation sur l'équation (4.12) :

$$C_{\text{Max}} = C(\omega = \omega_r) = \frac{F_0/m}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (4.20)$$

Ou bien, l'amplitude maximale normalisée en fonction de  $\xi$ :

$$\frac{C_{\text{Max}}}{C_0} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.21)$$

#### Condition de résonance d'amplitude :

En tenant compte des équations (4.18) et (4.19), la résonance d'un système forcé apparaît donc lorsque :

$$\omega_0^2 - 2 \delta^2 > 0 \text{ ou bien } 1 - 2 \xi^2 > 0$$

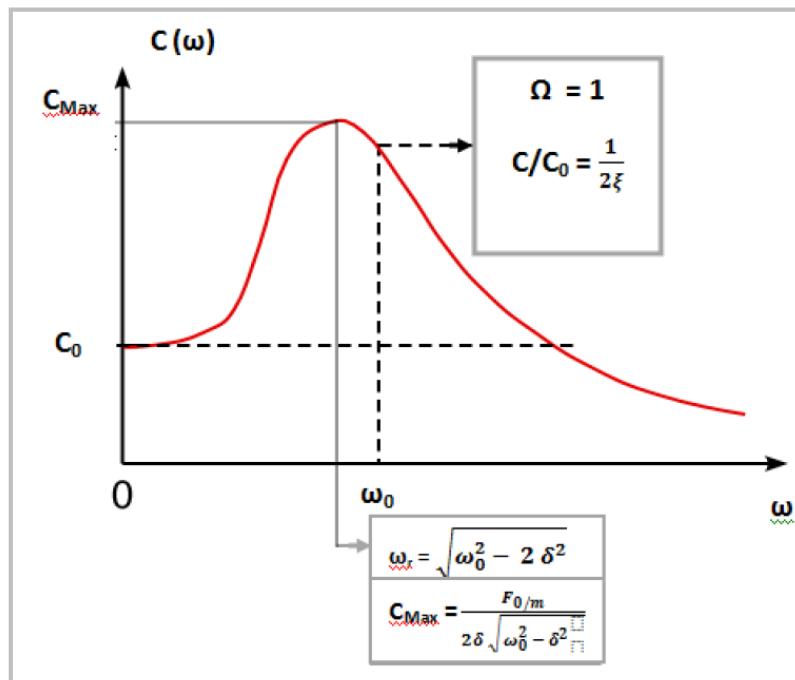
$$\text{Ce qui implique : } \xi < 1/\sqrt{2} \quad (4.22)$$

En introduisant la notion du facteur de qualité  $Q$  d'un oscillateur amorti et non forcé ( $Q = \omega_0/2\delta$ ), la résonance donne lieu lorsque :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - 2 \delta^2 > 0 &\Rightarrow 2 \left(\frac{\omega_0}{2\delta}\right)^2 - 1 > 0 \\ &\Rightarrow 2 Q^2 > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q > 1/\sqrt{2} > 1/2 \quad (4.23)$$

Et ça implique que l'amortissement doit être faible ( $\delta \ll \omega_0$ ). Donc, la résonance d'un oscillateur amorti et entraîné apparaît pour une pulsation d'excitation extérieure  $\omega$  proche de la pulsation propre des oscillations libres non amorties  $\omega_0$  du système ( $\omega \approx \omega_0$ ). La figure ci-après résume ce résultat.



**Figure 4.5.** Courbe de la réponse en amplitude d'un oscillateur à une excitation extérieure de pulsation  $\omega$ .

Le maximum d'amplitude (ou résonance d'amplitude) est obtenu pour une pulsation légèrement inférieure à la pulsation propre  $\omega_0$ .

### Remarques

- Pour un oscillateur non amorti et forcé, le phénomène de résonance est atteint lorsque la pulsation  $\omega$  de l'excitation externe est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  des oscillations libres non amorties. Dans ce cas, la pulsation de résonance  $\omega_r$  est égale à la pulsation propre des oscillations libres non amorties  $\omega_0$  (c'est à dire,  $\omega_r = \omega_0$ ) et  $C_{\text{Max}} \rightarrow \infty$ .
- La résonance d'un oscillateur amorti et forcé est caractérisée par une courbe aiguë (fine) d'amplitude. Cette finesse augmente lorsque  $\xi$  (ou  $\delta$ ) diminue.
- Il convient de distinguer ;
  - $\omega_0$ , la pulsation propre des oscillations libres non amorties du système ;
  - $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ , la pseudo-pulsation du système amorti en régime pseudo-périodique ;
  - $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ , la pulsation de résonance d'amplitude du système forcé.

#### 4.6. Analogie oscillateur mécanique/ oscillateur électrique

On résume dans les tableaux ci- suivants, l'analogie entre un système mécanique amorti forcé oscillant et un système électrique oscillant alimenté par une tension alternative  $U(t)$ .

##### Analogie entre système mécanique amorti forcé oscillant et système électrique oscillant

Système masse –ressort- amortisseur	Circuit RLC
$F(t) = F_0 \cos \omega t$	$U(t) = U_0 \cos \omega t$

##### Analogie entre grandeurs

Grandeur	réelle	complexe	Grandeur	réelle	complexe
Coordonnée	$x$	$\bar{x}$	Charge	$q$	$\bar{q}$
Vitesse	$\dot{x}$	$\dot{\bar{x}}$	Courant	$i = \dot{q}$	$\bar{i} = \dot{\bar{q}}$
Force	$F(t)$	$\bar{F}(t)$	Tension	$U(t)$	$\bar{U}(t)$

##### Analogie entre éléments et caractéristiques

Ressort	$k$	Capacité inverse	$1/C$
Inertie (masse)	$m$	Inductance	$L$
Frottement	$\alpha$	Résistance	$R$
Pulsion propre	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	Pulsion propre	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Energie potentielle d'un ressort	$\frac{1}{2} k x^2$	Energie d'un condensateur	$\frac{1}{2} q^2/C$
Energie cinétique d'un corps	$\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	Energie d'une bobine	$\frac{1}{2} L i^2$
Puissance dissipée par frottement	$\alpha v^2$	Puissance dissipée par effet Joule	$R i^2$

##### Amplitude maximale de la résonance

$C(W) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \delta = \alpha/2m$ $C_{Max} = C(w = w_r) = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$	$C(W) = \frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \delta = R/2L$ $C_{Max} = C(w = w_r) = \frac{U_0/L}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
---	--