Travaux dirigés sur le calcul vectoriel et tensoriel

Exercice 1

Deux points A et B ont pour coordonnées $A(2,3,-3)$; $B(5,7,-3)$.

1) Déterminer le module, la direction (les cosinus directeurs) et le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan (O,x,y).

Exercice 2

Soient les vecteurs :

$\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}$; $\overrightarrow{V_2} = -3\vec{\imath} + 1.5\vec{\jmath} - 7.5\vec{k}$; $\overrightarrow{V_3} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$

1) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$; $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1}$; $\overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_2}$.

2) Calculer les produits vectoriels : $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$; $\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$; $\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_2}$.

3) Calculer les produits : $\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$; $\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$.

Exercice 03

On donne, dans un repère orthonormé, les composantes des vecteurs :

$\overrightarrow{V_1} = 3\vec{\imath} + 5\vec{k}$; $\overrightarrow{V_2} = 5\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; $\overrightarrow{V_3} = 3\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} - 2\vec{k}$; $\overrightarrow{V_4} = x\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 10\vec{k}$

1) Déterminer y et z pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ soient colinéaires.

2) Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$ soient perpendiculaires.

Exercice 04

Dans un système d'axes $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois vecteurs :

$$\vec{U}(0,1,1)$$
$$\vec{V}(-1,0,1)$$
$$\vec{W}(0,-1,1)$$

1) Déterminer le tenseur $\bar{\bar{T}}$ de façon que l'on ait :

$$\bar{\bar{T}}.\vec{U} = \vec{A}\ ;\ \bar{\bar{T}}.\vec{V} = \vec{B}\ ;\ \bar{\bar{T}}.\vec{W} = \vec{C}$$

$$\vec{A} = \begin{Bmatrix} 2b \\ a+b-c \\ a+b+c \end{Bmatrix}\ ;\ \vec{B} = \begin{Bmatrix} b+c-a \\ -2c \\ c+a-b \end{Bmatrix}\ ;\ \vec{C} = \begin{Bmatrix} 2c \\ b-c-a \\ a-b-c \end{Bmatrix}$$

2) Déterminer les tenseurs symétrique $\bar{\bar{D}}$ et antisymétrique $\bar{\bar{G}}$ composants du tenseur $\bar{\bar{T}}$.

3) Comment choisir les données (a,b,c) pour que le tenseur $\bar{\bar{T}}$ soit symétrique ?

Exercice 05

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base d'un espace vectoriel E_2 et soient deux vecteurs de E_2 :

$$\vec{x} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\ ; \qquad \vec{y} = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

1) Déterminer l'expression du produit tensoriel $\vec{x}\otimes\vec{y}$.

2) Le tenseur suivant :

$$\bar{\bar{U}} = 11\vec{\imath}\otimes\vec{\imath} + 8\vec{\imath}\otimes\vec{\jmath} + 20\vec{\jmath}\otimes\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}\otimes\vec{\jmath}$$

Est-il un produit tensoriel dans E_2 ?

3) Montrer que le tenseur $\bar{\bar{U}}$ est la somme du produit tensoriel $\vec{x}\otimes\vec{y}$ et d'un autre tenseur $\bar{\bar{W}}$ à déterminer.