Travaux dirigés sur le tenseur des contraintes

Exercice 1

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} MPa$$

1) Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.

2) Soit le vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes : $\{n\} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$. Sur la facette $\vec{n}$:

a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$

b) Calculer la contrainte normale σ_n.

c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis son module τ_n.

Exercice 2

On considère à un état de contraintes uniforme dont les composantes cartésiennes sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} MPa$$

1) Déterminer les invariants de contraintes.

2) Calculer les contraintes principales.

3) Vérifier l'exactitude des invariants.

3) Calculer les directions principales normalisées.

Exercice 3

La répartition des contraintes dans un corps solide déformable en équilibre statique sans effet des forces de volume est donnée par le tenseur suivant :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x + y & \sigma_{xy}(x, y) & 0 \\ \sigma_{xy}(x, y) & x - 2y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur unitaire : $\{n\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

- La contrainte agissant au point $M(0,1)$ sur un plan de normale $\vec{n}$ étant une contrainte de cisaillement pur, déterminer $\sigma_{xy}(x, y)$.

Exercice 4

Soit le tenseur des contraintes représenté par la matrice suivante :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ . & 2 & 5 \\ . & . & 3 \end{bmatrix}$$

1) Complète les éléments manquants.

2) Déterminer les tenseurs sphérique et déviateur.