Département de mathématiques, Université de Jijel
3ème année Mathématiques

SÉRIE DE TD N 04
ESPACES DE HILBERT

Exercice 1: Soit $E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que la norme vérifie l'identité du parallélogramme et soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Montrer que:

(1) $\varphi(x, x) = \|x\|^2, \ \forall x \in E$
(2) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \ \forall x, y \in E$
(3) $\varphi(x + y, z) = 2\varphi(x, \frac{z}{2}) + 2\varphi(y, \frac{z}{2}) \ \forall x, y, z \in E$
(4) $\varphi(x, y) = 2\varphi(x, \frac{y}{2}) \ \forall x, y \in E$
(5) $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \ \forall x, y, z \in E$
(6) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y) \ \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$
(7) En déduire que c'est un produit scalaire.

Exercice 2

Soit $H = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f(t)|dt < +\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. En utilisant les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[; \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, 1]$; montrer que la norme n'est pas issue d'un produit scalaire.

Exercice 3

Soit H un espace préhilbertien et A un sous espace vectoriel de H. Montrer que

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \|x - y\| \geq \|x\|, \quad \forall y \in A$$

.

Exercice 4

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\forall(u, v) \in H \times H$

$$< u, v >= \frac{1}{2}[\|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - (1 + i)(\|u\|^2 + \|v\|^2)].$$

Exercice 5

Soit H un espace préhilbertien et soit f une application de H dans H telle que, pour tous vecteurs x et y de H : $< f(x), y >=< x, f(y) >$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 6 Soit H un espace préhilbertien réel. Montrer que pour tous x, y de H,

$$2 + \|x + y\|^2 = 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).$$

Exercice 7

Soit H un espace préhilbertien réel, soit f une application telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in H,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que f conserve le produit scalaire.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 8

Soit $H = C([0, 1]; \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ et soit $F \subset H$; $F := \{f \in H : f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
Indication: vous pouvez utiliser la fonction $g : x \mapsto g(x) = xf(x)$.

Exercice 9

Soit $H = C([0, 1]; \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Soit l'application φ définie sur H par $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.
1. Montrer que φ est linéaire continue.
2. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de H défini par $f_n(x) = ne^{-nx}, x \in [0, 1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_1$.
3. On pose $|||\varphi||| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\varphi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\varphi|||$.

Exercice 10 Soit H un espace préhilbertien réel et A un convexe fermé de H, on définit la projection de $x \in H$ sur A par

$$p = Proj_A(x) \Leftrightarrow \forall y \in A,\ < x - p, y - p > \leq 0.$$

1. Montrer que si A est un sous espace vectoriel (fermé) de H, alors
$$p = Proj_A(x) \Leftrightarrow \forall y \in A, \ < x - p, y >= 0.$$
2. Montrer que $Proj_A : H \to A$ est linéaire continue et $\|Proj_A\| = 1$.

Exercice 11

Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ et soit $F \subset E$; $F := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
Indication: vous pouvez utiliser la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = xf(x)$.

Exercice 12

Soit $H = L^2([0,+\infty[;\mathbb{R}) = \{f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty\}$, muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$, pour tout f et g de H. Soit l'opérateur A définie de H dans H par
$$A(f)(t) = \begin{cases} f(t-1), & \text{si } t \geq 1 \\ 0, & \text{si } t \in [0,1]; \end{cases}$$
pour tout $t \in [0,+\infty[$
1. Montrer que A est linéaire et que A est une isométrie.
2. Calculer A^* l'adjoint de A et montrer que $A^* \circ A = Id_H$.