Solutions des exercices de la série de TD #1 CSL

Solution de l'exercice #1 :

1- La fonction de transfert en boucle ouverte du système $H_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$.

$$H_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{2}{(s+3)^3}}{1 + \frac{2}{(s+3)^3}(s+1)} \times \frac{3}{s} = \frac{6}{(s+3)^3 + 2(s+1)} = \frac{6}{s(s^3 + 9s^2 + 29s + 29)}$$

2- La fonction de transfert en boucle fermée du système $H_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

$$H_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)} = \frac{6}{s(s^3 + 9s^2 + 29s + 29) + 6} = \frac{6}{s^4 + 9s^3 + 29s^2 + 29s + 6}$$

3- Stabilité du système en boucle fermée.

$$H_{BF}(s) = \frac{6}{s^4 + 9s^3 + 29s^2 + 29s + 6}$$

On utilise le critère de Routh, on construit donc la table de Routh :

s^4	1	29	6
s^3	9	29	0
s^2	$\frac{232}{9}$	6	
s^2	$\frac{6242}{9}$	0	
s^0	6		

Les éléments de la première ligne de la table de Routh sont tous du même signe, donc le système en boucle fermée est stable.

4- L'erreur en position et l'erreur en vitesse.

La fonction de transfert du système en boucle est de classe 1, donc :

L'erreur en position est nulle $e_p = 0$ et l'erreur en vitesse $e_v = \frac{1}{K_{BO}}$ avec $K_{BO} = \lim_{s \to 0} sH_{BO}(s)$,

$K_{BO} = \frac{6}{29} \Longrightarrow e_v = \frac{29}{3} = 9.66.$

Solution de l'exercice #2:

1. Calcule du dépassement D% de la réponse du système à une entrée référence de type échelon unitaire.

On a la FTBF du système est :

$$H_{BF}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K}{s(s + \sqrt{2K})}}{1 + \frac{K}{s(s + \sqrt{2K})}} = \frac{K}{s^2 + \sqrt{2K}s + K} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Par identification on a :

$${\omega_n}^2 = K \text{ et } 2\xi\omega_n = \sqrt{2K} \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{K}\ et\ \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

Le dépassement D% :

$$D\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 4.32\%$$

2. Calcul de la marge des valeurs de K pour que le temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) soit inférieur à 1 s.

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} \leq 1\ s \Longrightarrow \frac{3}{0.707\sqrt{K}} \leq 1 \ \Longrightarrow K \geq 18$$

3. Calcul de de la marge des valeurs de K pour que le temps de pic (T_p) soit inférieur à 0.2 s.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.2\ s \ \Longrightarrow \frac{4.44}{\sqrt{K}} \leq 0.2 \Longrightarrow K \geq 492.84$$

Solution de l'exercice #3 :

1) Fonction de transfert

Les pôles du système sont :

$P_1 = -3 + 4j$

$P_1 = -3 - 4j$

La fonction de transfert est donc :

$$H(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{(s-P_1)(s-P_2)} = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2} = \frac{10{\omega_n}^2}{s^2+6s+25} = \frac{250}{s^2+6s+25}$$

2) Pulsation propre non amortie ω_n et le coefficient d'amortissement ξ

D'après la fonction de transfert :

$$ {\omega_n}^2 = 25\ et\ \ 2\xi\omega_n = 6 \Longrightarrow \omega_n = 5\,rad/s\ \ et\ \ \xi = \frac{3}{5} = 0.6$$

3) Signal de sortie $y(t)$ lorsque le système est en régime harmonique avec le signal d'entrée $u(t) = 3sin(5t)$

En régime harmonique le signal de sortie sera un signal sinusoïdal de même fréquence de la forme :

$$Y(t) = Y_0 sin(5t+\phi)\ \ avec\ \frac{Y_0}{3} = |H(j5)|\ et\ \phi = arg(H(j5))$$

Alors :

$$Y_0 = 3|H(j5)| = 3\left|\frac{250}{-25+30j+25}\right| = 3\left|\frac{250}{30j}\right| = 25$$

$$\phi = arg\big(H(j5)\big) = arg\left(\frac{250}{30j}\right) = -90°$$

Donc :

$$Y(t) = 25sin(5t-90) = \ 25cos(5t)$$

4) Réponse impulsionnelle

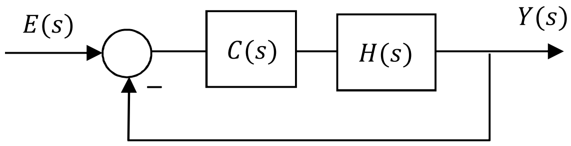
$$Y(s) = \frac{250}{s^2+6s+25} \Longrightarrow y(t) = TL^{-1}\left[\frac{250}{s^2+6s+25}\right] = TL^{-1}\left[\frac{250}{(s+3)^2+16}\right]$$

$$= \frac{125}{2}TL^{-1}\left[\frac{4}{(s+3)^2+16}\right]$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{125}{2}\mathrm{e}^{-3t}\sin(4t)$$

Solution de l'Exercice #4 :

On a le système asservis de la figure avec :



$$H(s) = \frac{10}{(1+2s)^3}$$

1) **Régulation Proportionnelle : $C(s) = K_p$**

a) **Etude la stabilité**

- Par le critère de Routh :

La FTBF est :

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)} = \frac{10K_p}{(1+2s)^3+10K_p} = \frac{10K_p}{8s^3+12s^2+6s+1+10K_p}$$

Table de Routh :

s^3	8	6
s^2	12	$1+10K_p$
s^1	$\frac{16-20K_p}{3}$	0
s^0	$1+10K_p$	

Le système en BF est stable ssi : $16-20K_p > 0$ et $1+10K_p > 0$ donc $0 < K_p < 0.8$.

- Par le critère de Nyquist :

Le système en BO n'a pas de pôle à partie réel positif.

On a :

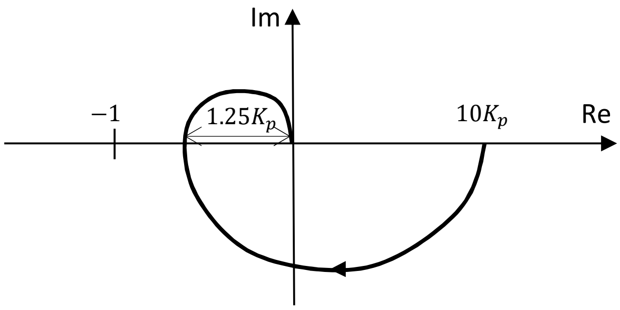
$H_{BOC}(j\omega) = \frac{10K_p}{(1+j2\omega)^3}$, $A(\omega) = |H_{BOC}(j\omega)| = \frac{10\ \ p}{(\sqrt{1+4\omega^2})^3}$ et $\varphi(\omega) = arg\big(H_{BOC}(j\omega)\big) = -3\mathrm{atan}(2\omega)$

Lorsque $\omega \longrightarrow 0 \Longrightarrow \begin{cases} A = 10K_p \\ \varphi = 0 \end{cases}$ et lorsque $\omega \longrightarrow \infty \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \varphi = -270° \end{cases}$

Point d'intersection avec l'axe réel correspond $\varphi = -180°$ alors :

$$\varphi(\omega_\pi) = -3\text{atan}(2\omega_\pi) = -180° \Longrightarrow \text{atan}(2\omega_\pi) = 60° \Longrightarrow \omega_\pi = \frac{1}{2}\tan(60°) = 0.866\, rad/s$$

$$A(\omega_\pi) = \frac{10K_p}{\left(\sqrt{1+4\omega_\pi{}^2}\right)^3} = 1.25K_p$$



D'après de le critère de Nyquist simplifié, le système sera stable en BF ssi en parcourant le lieu de Nyquist dans le sens des ω croissants on laisse le point critique $(-1{,}0)$ à gauche c-à-d :

$$A(\omega_\pi) < 1 \Leftrightarrow 1.25K_p < 1 \Longrightarrow K_p < \frac{1}{1.25} = 0.8$$

Alors : $0 < K_p < 0.8$.

b) Gain K_p pour avoir une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$.

$\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$ avec : $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$

$$45° = 180° + \arg\left(\frac{10K_p}{(1+j2\omega_c)^3}\right) = 180° - 3\text{atan}(2\omega_c) \Longrightarrow 3\text{atan}(2\omega_c) = 135° \Longrightarrow \text{atan}(2\omega_c) = 45°$$

$$\Longrightarrow 2\omega_c = \tan(45°) = 1 \Longrightarrow \omega_c = 0.5\, rad/s$$

$$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{10K_p}{\left(\sqrt{1+4\omega_c{}^2}\right)^3} = 1 \Longrightarrow 10K_p = \left(\sqrt{1+4\omega_c{}^2}\right)^3 \Longrightarrow K_p = 0.1\left(\sqrt{1+4\omega_c{}^2}\right)^3 = 0.283$$

c) Calcul de l'erreur en position

La FTBO corrigé est :

$$H_{BOC}(s) = \frac{2.83}{(1+2s)^3}$$

Le système en BO est class 0 alors l'erreur en position :

$$e_{P.} = \frac{1}{1+K_{BO}} \quad avec\ K_{BO} = H_{BOC}(0) = 2.83 \quad donc\ e_{P.} = \frac{1}{1+2.83} = 0.26$$

2) Régulateur $C(s)$ qui permet d'annuler l'erreur statique en position tout en assurant une marge de phase de $\Delta\varphi = 45°$.

Pour annuler l'erreur statique on propose un régulateur type PI : $C(s) = K_p\frac{1+T_is}{T_is}$ puisque ce régulateur augmente la classe du système en BO d'une unité.

Pour avoir une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$ on pose $T_i = 2$ et on calcul K_p qui assure le cahier de charge.

La FTBO corrigée devient donc :

$$H_{BOC}(s) = C(s)H(s) = K_p\frac{1+2s}{2s}\frac{10}{(1+2s)^3} = \frac{5K_p}{s(1+2s)^2}$$

On a : $180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$ avec : $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$

$$45° = 180° + \arg\left(\frac{5K_p}{j\omega_c(1+2j\omega_c)^2}\right) = 180° - 90 - 2\text{atan}(2\omega_c) \Longrightarrow 2\text{atan}(2\omega_c) = 45°$$

$$\Longrightarrow \text{atan}(2\omega_c) = 22.5° \Longrightarrow 2\omega_c = \tan(22.5°) = 0.414 \Longrightarrow \omega_c = 0.207\, rad/s$$

$$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{5K_p}{\omega_c\left(\sqrt{1+4\omega_c{}^2}\right)^2} = 1 \Longrightarrow 5K_p = \omega_c(1+4\omega_c{}^2) \Longrightarrow K_p = 0.2\omega_c(1+4\omega_c{}^2) = 0.048$$

La FT du régulateur est donc : $C(s) = K_p(1+\frac{1}{2s})$

Solution de l'exercice #5 :

1) **la marge de phase et la marge de gain :**

A partir du diagramme de Bode on relève la marge de gain est la marge de phase :

$\boldsymbol{\Delta\varphi = 26.1°}$ et $\boldsymbol{\Delta G = 10.3\ dB}$

2) **Correction proportionnelle $\boldsymbol{C(s) = K}$ pour avoir une marge de phase égale à 45° :**

- Calcul de K : à partir du diagramme de Bode, on peut constater que pour avoir une marge de phase de 45° il faut que la pulsation de coupure $\omega_0 = 0.026\ rad/s$.

  Alors il faut choisir : $20log(K_P) = -5.8 \Longrightarrow K_P = 10^{-\frac{5.8}{20}} = 0.51$
- La nouvelle marge de gain ΔG_C: $\boldsymbol{\Delta G_C = \Delta G + 5.8 = 10.3 + 5.8 = 16.1\ dB}$

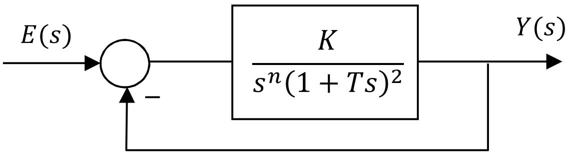
3) **Erreur en position et l'erreur en vitesse avec ce réglage :**

La fonction de transfert en boucle ouverte ($H_{BO}(s) = \frac{5.1e^{-5s}}{(1+80s)^2}$) est de classe 0 donc :

L'erreur en position : $e_p = \frac{1}{1+K_{BO}} = \frac{1}{1+5.1} = \frac{1}{6.1} = 0.16$ et l'erreur en vitesse : $e_v = \infty$.

Solution de l'exercice # 6:

On a le système asservi de la figure :



Détermination des paramètres K, n et T pour que le système en BF satisfait les exigences suivantes: Erreur en vitesse $\varepsilon_v = \frac{1}{50}$, et La marge de gain $\Delta G = 6$ dB .

On a la FTBO est : $H_{BO}(s) = \frac{K}{s^n(1+Ts)^2}$

- **Valeur de $\boldsymbol{n}$:**

On a l'erreur en vitesse est une valeur constante non nulle ($e_v = \frac{1}{50}$), alors la FTBO est de classe 1 donc : $n = 1$.

- **Valeur de $\boldsymbol{K}$:**

$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{50}$: $H_{BO}(s) = \frac{K}{s^n(1+Ts)^2}$ est de classe 1, alors l'erreur en vitesse :

Puisque $e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{50}$ avec $K_v = \lim_{s\to 0} sH_{BOC}(s) = K$, donc : $K = 50$.

- **Valeur de $\boldsymbol{T}$:**

  On a $\Delta G = -20\log(|H_{BO}(j\omega_\pi)|) = 6$ dB avec $\arg(H_{BO}(j\omega_\pi)) = -180°$

$$\arg\big(H_{BO}(j\omega_\pi)\big) = -180 \Longrightarrow \arg\left(\frac{50}{j\omega_\pi(1+jT\omega_\pi)^2}\right) = -180° \Longrightarrow -90 - 2arctg(T\omega_\pi) = -180°$$

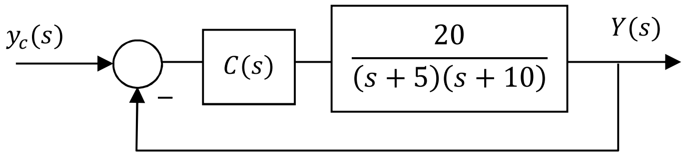
$$\Longrightarrow arctg(T\omega_\pi) = 45 \Longrightarrow T\omega_\pi = 1 \Longrightarrow \omega_\pi = \frac{1}{T}\ rad/s$$

$$\Delta G = -20\log(|H_{BO}(j\omega_\pi)|) = 6\text{ dB} \Longrightarrow -20\log\left(\frac{50}{\omega_\pi(1+(T\omega_\pi)^2)}\right) = 6 \Longrightarrow -20\log(25T) = 6 *$$

$$\Longrightarrow \log(25T) = -\frac{6}{20} \Longrightarrow 25T = 10^{-\frac{6}{20}} \Longrightarrow T = \frac{1}{25}10^{-\frac{6}{20}} \Longrightarrow T = 0.02$$

Solution de l'exercice #7:

On a le système asservi de la figure.



1) **Correcteur Proportionnel** $\boldsymbol{C(s) = K_p}$

- Calcul de K_p qui assure au système une marge de phase $\Phi_m = 45°$.

  On a la FTBO corrigée : $H_{BOC}(s) = \frac{20K_p}{(s+5)(s+10)}$

  On a : $\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$, avec $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$, alors :

  $\Delta\varphi = 45° = 180° + \arg\left(\frac{20}{(j\omega_c+5)(j\omega_c+10)}\right) \Longrightarrow -135° = \arg\left(\frac{20}{50-\ \ c^2+j15\ \ c}\right)$

$\Longrightarrow -135° = -\operatorname{arctg}\left(\frac{15\omega_c}{50-\omega_c{}^2}\right) \Longrightarrow \frac{15\omega_c}{50-\omega_c{}^2} = -1 \Longrightarrow \omega_c{}^2 - 15\omega_c - 50 = 0$

$\Delta = 225 + 200 = 425 \Longrightarrow \omega_c = \frac{15 \quad \sqrt{425}}{2} = 17.81\, rad/s$

$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{20K_p}{(j\omega_c + 5)(j\omega_c + 10)}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{20K_p}{\sqrt{\omega_c{}^2 + 25}\sqrt{\omega_c{}^2 + 100}} = 1 \Longrightarrow 0.053Kp = 1$

$\Rightarrow Kp = 18.89$

- Calcul du temps de réponse à 5% $t_{r5\%}$, du dépassement D et de l'erreur en position.

  On a la FTBF corrigée: $H_{BFC}(s) = \frac{H_{BOC}(s)}{1+H_{BOC}(s)} = \frac{377.76}{s^2+1s+427.8} = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$, c'est un système du 2ème ordre, alors :

  $\begin{cases}\omega_n{}^2 = 427..80 \\ 2\xi\omega_n = 15\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\omega_n = 20.68\, rad/s \\ \xi = 0.36\end{cases}$

  Le temps réponse à 5% : $t_{r5\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.4\, s$; le dépassement $D\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 24\%$

  L'erreur en position ε_p: le système corrigée en BO est de classe 0 donc : $\varepsilon_p = \frac{1}{1+K_pK} = \frac{1}{1+7.12} = 0.12$

2) Correcteur Proportionnel-Intégral $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

- Déterminer les paramètres du correcteur pour obtenir une marge de phase $\Phi_m = 45°$

  On a :

  $H(s) = \frac{0.4}{(0.2s+1)(0.1s+1)}$ et $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)$

  On pose $T_i = T_{max} = 0.2$ donc la FTBO corrigé : $H_{BOC}(s) = \frac{0.4K_p}{0.2s(0.1s+1)} = \frac{2K_p}{s(0.1s+1)}$

  On a : $\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c))$, avec $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$, alors :

  $\Delta\varphi = 45° = 180° + \arg\left(\frac{2K_p}{j\omega_c(j0.1\omega_c+1)}\right) \Longrightarrow -135° = -90 - \operatorname{arctg}(0.1\omega_c)$

  $\Longrightarrow \operatorname{arctg}(0.1\omega_c) = 45° \Longrightarrow 0.1\omega_c = 1 \Longrightarrow \omega_c = 10\, rd/s$

  $|H_{BOC}(j\omega_c)| = \left|\frac{2K_p}{j\omega_c(j0.1\omega_c+1)}\right| = \frac{2K_p}{\omega_c\sqrt{0.01\omega_c{}^2+1}} = 1 \Longrightarrow K_p = \frac{\omega_c\sqrt{0.01\omega_c{}^2+1}}{2} = 7.07$

  La FT du correcteur PI est : $C(s) = 7.07\left(1 + \frac{1}{0.2s}\right)$

- Calcul du temps de réponse à 5% t_r, le dépassement D et l'erreur en position.

  La FTBF corrigée: $H_{BFC}(s) = \frac{H_{BOC}(s)}{1+H_{BOC}(s)} = \frac{141.4}{s^2+10s+141.4} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$, c'est un système du 2ème ordre

  $\begin{cases}\omega_n{}^2 = 141.4 \\ 2\xi\omega_n = 10\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\omega_n = 11.89\ rad/s \\ \xi = 0.42\end{cases}$

  Le temps réponse à 5% : $t_{r5\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.6\, s$; le dépassement $D\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 23\ \%$.

  L'erreur en position ε_p: le système corrigée en BO est de classe 1 donc : $\varepsilon_p = 0$.

3) Correcteur à Retard de Phase $C(s) = K_p\left(\frac{1+T_i s}{1+bT_i s}\right)$:

- Calcul des paramètres du correcteur pour obtenir une marge de phase $\Phi_{md} = 45°$ et une erreur statique $\varepsilon = 0.05$.

  La FTBO cor$H_{BOC}(s)$rigé $= C(s)H(s) = K_p \frac{1+T_i s}{1+bT_i s} \frac{20}{(s+5)(s+10)}$

  On a $\varepsilon = \frac{1}{1+K_pK} = 0.05 \Longrightarrow K_p = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \frac{1}{0.4\times0.05} \Longrightarrow K_p = 47.5$

  $\Delta\varphi = \Phi_{md} + \varphi_s = 45° + 5° = 50°$;

  $\Delta\varphi = 180° + \arg(H(j\omega_c) \Leftrightarrow 50° = 180° + \arg\left(\frac{950}{(j\omega_c + 5)(j\omega_c + 10)}\right)$

  $\Leftrightarrow -130° = \arg\left(\frac{950}{50-\omega_c{}^2+j15\omega_c}\right) \Longrightarrow 130° = \operatorname{arctg}\left(\frac{15\omega_c}{50-\omega_c{}^2}\right) \Longrightarrow \frac{15\omega_c}{50-\omega_c{}^2} = -1.19$

  $\Longrightarrow 1.19\omega_c{}^2 - 15\omega_c - 59.5 = 0$

  $\Delta = 225 + 223.22.22 = 508.22 \Longrightarrow \omega_c = \frac{15 \quad \sqrt{508.22}}{2\times1.19} = 15.77\, rad/s$

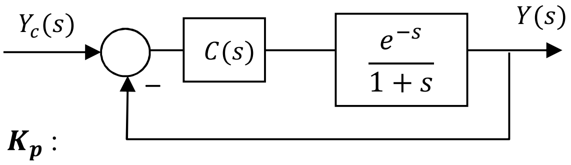
  $b = |K_pH(j\omega_c)| = \left|\frac{950}{(j\omega_c+5)(j\omega_c+10)}\right| = \frac{950}{\sqrt{\omega_c{}^2+25}\sqrt{\omega_c{}^2+100}} = 3.06 rad/s$

  $T_i = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{7.89} = 0.63$

La FT du correcteur à retard de phase est : $C(s) = 47.5\left(\frac{1+0.63s}{1+1.94s}\right)$

Solution de l'exercice # 8:

On a le système asservi de la figure.



1) **Correction proportionnelle $C(s) = K_p$:**

Calcul de K_p permettant d'avoir une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$

On a : $\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$, avec $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$,

La FTBO corrigé est : $H_{BOC}(s) = \frac{K_p e^{-s}}{1+s}$

Alors :

$\Delta\varphi = 45° = 180° + \arg\left(\frac{K_p e^{-j\omega_c}}{1+j\omega_c}\right) \Rightarrow -135° = -\omega_c \times \frac{180}{\pi} - \mathrm{arctg}(\omega_c)$

$\Rightarrow \omega_c \times \frac{180}{\pi} + \mathrm{arctg}(\omega_c) - 135° = 0$ C'est une équation non linéaire, il n'existe pas de solution analytique, par des essais successifs avec des valeurs de ω_c (essai/erreur) on trouve : $\omega_c \approx 1.4$ rad/s

$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{K_p e^{-j\omega_c}}{1+j\omega_c}\right| = \frac{K_p}{\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow K_p = \sqrt{1+\omega_c^2} = 1.72$

2) **Calcul de l'erreur en position**

La fonction de transfert en boucle ouverte ($H_{BO}(s) = \frac{1.72\ ^{-s}}{1+s}$) est de classe 0 donc :

L'erreur en position : $e_p = \frac{1}{1+K_{BO}}$ avec $K_{BO} = H_{BO}(0) = 1.72$ alors :

$$e_p = \frac{1}{1+1.72} = \frac{1}{6.1} = 0.37 = 37\%$$

3) **Correction proportionnelle-intégrale $C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$:**

Synthèse de régulateur PI qui assure une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$

La fonction de transfert du régulateur PI est : $C(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_P \frac{1+T_i s}{T_i s}$

On prend $T_i = T_{max} = 1$, donc la FTBO corrigé : $H_{BOC}(s) = C(s)H(s) = \frac{K_p e^{-s}}{s}$

On a : $\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$, avec $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$, alors :

$\Delta\varphi = 45° = 180° + \arg\left(\frac{K_p e^{-j\omega_c}}{j\omega_c}\right) \Rightarrow 45° = 180° - 90 - \omega_c \times \frac{180}{\pi}$

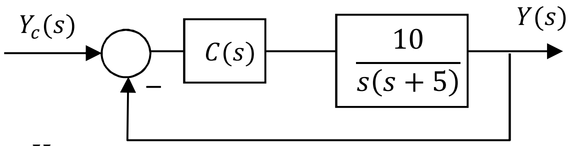
$\Rightarrow \omega_c \times \frac{180}{\pi} = 45° \Rightarrow \frac{\omega_c \times 4}{\pi} = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{4} rad/s$

$|H_{BOC}(j\omega_c)| = \left|\frac{K_p e^{-j\omega_c}}{j\omega_c}\right| = \frac{K_p}{\omega_c} = 1 \Rightarrow K_p = \omega_c = \frac{\pi}{4} = 0.7854$

La FT du correcteur PI est : $C(s) = 0.7854\left(1 + \frac{1}{s}\right)$

Solution de l'Exercice # 9 :

On a le système asservi de la figure.



1) **Correction proportionnelle $C(s) = K_p$:**

Calcul de K_p qui assure au système une marge de phase $\Phi_m = 45°$.

On a la FTBO corrigée : $H_{BOC}(s) = \frac{10K_p}{s(s+5)}$

On a : $\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$, avec $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$, alors :

$\Delta\varphi = 45° = 180° + \arg\left(\frac{5K_p}{j\omega_c(j\omega_c+5)}\right) \Rightarrow 45° = 180° - 90 - \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_c}{5}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) = 45° \Rightarrow \frac{\omega_c}{5} = 1 \Rightarrow \omega_c = 5\ rad/s$

$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{10K_p}{j\omega_c(j\omega_c+5)}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{10K_p}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+25}} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{5}\omega_c\sqrt{\omega_c^2+25}$

$\Rightarrow Kp = 3.5356$

2) **Erreur en vitesse e_v :**

La FTBO corrigé est : $H_{BOC}(s) = \frac{10\ \ p}{s(s+5)} = \frac{35.356}{s(s+5)}$

Le système en BO est de classe 1 donc : $e_v = \frac{1}{K_{BO}}$ avec $K_{BO} = \lim_{s\to 0} sH_{BOC}(s) = \frac{35.35}{5} = 7.0712$

$$e_v = \frac{1}{7.0711} = 0.1414 = 14.14\%$$

3) **Correction à retard de phase (RP)** : $\boldsymbol{C(s) = K_p \frac{1+T_i s}{1+bT_i s}}$

Synthèse du correcteur pour avoir un système corrigé avec une erreur en vitesse $e_v = 10\%$ et une marge de phase de 45° :

La FTBO corrigé $H_{BOC}(s) = C(s)H(s) = K_p \frac{1+T_i s}{1+bT_i s} \frac{10}{s(s+5)}$

La FTBO est de classe 1, donc : $e_v = \frac{1}{K_{BO}} = \frac{1}{K_p K} = \frac{1}{2K_p} = 0.1 \Longrightarrow K_p = \frac{1}{2e_v} = \frac{1}{2\times 0.1} \Longrightarrow K_p = 10$

$\Delta\varphi = \Delta\varphi_d + \varphi_s \;= 45° + 5° = 50° \Leftrightarrow \Delta\varphi = 180° + \arg(K_p\, H(j\omega_c)$

$\Leftrightarrow 50° = 180° + \arg\left(\dfrac{100}{j\omega_c(j\omega_c+5)}\right) \Leftrightarrow 50° = 180° - 90 - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\omega_c}{5}\right)$

$\Longrightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_c}{5}\right) = 40 \Longrightarrow \omega_c = 5tg(40) = 4.1955\, rad/s$

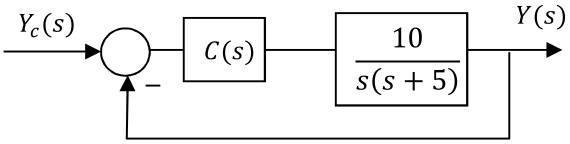
$b = \left|K_p H(j\omega_c)\right| = \left|\frac{10}{j\omega_c(j\omega_c+5)}\right| = \frac{10}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+25}} = 3.6516$

$T_i = \dfrac{10}{\omega_c} = \dfrac{10}{4.1955} = 2.3835$

La FT du correcteur à retard de phase est : $C(s) = 10\left(\frac{1+2.3835}{1+8.7036s}\right)$

<u>Solution de l'exercice #10:</u>

On a le système asservi de la figure.



1) **<u>Correction proportionnelle</u>**

1.1) **<u>Erreur statique</u>**

La FTBO corrigé $H_{BOC}(s) = \frac{K_p}{s(s+5)^2}$ est de classe 1, donc l'erreur en position est nulle (si le système est stable en BF).

1.2) **<u>On souhaite avoir une erreur en vitesse $e_v = 0.1$</u>**

✓ **<u>Calcul de K_p</u>** :

on a : $e_v = 0.1 = \frac{1}{K_v}$ avec $K_v = \lim_{s\to 0} s\, H_{BOC}(s) = \frac{K_p}{25}$, donc : $K_p = \frac{25}{0.1} = 250$

✓ **<u>Calcul de la marge de phase :</u>**

$\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c)$ avec : $|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1$

$|H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{250}{\omega_c(\omega_c^2+25)} = 1 \Rightarrow \omega_c(\omega_c^2+25) = 250 = 5(5^2+25) \Longrightarrow \omega_c = 5\, rad/s$

$\Delta\varphi = 180° + \arg(H_{BOC}(j\omega_c) = 180° - 90° - 2atan(\dfrac{\omega_c}{5}) = 90° - 2atan(1) = 0°,$

✓ **<u>Remarques :</u>** la marge de phase est nulle ($\Delta\varphi = 0°$), donc le système en BF est à la limite de stabilité et par conséquent ce régulateur proportionnel ne garantit ni l'erreur en position nulle $e_p = 0$ ni l'erreur en vitesse $e_v = 0.1$.

2) **<u>Synthèse d'un correcteur à retard de phase pour avoir une marge de phase de 45°</u>**

La FTBO corrigé : $H_{BOC}(s) = C(s)H(s) = K_p \frac{1+T_i s}{1+bT_i s} \frac{1}{s(s+5)^2} = 250 \frac{1+T_i s}{1+bT_i s} \frac{1}{s(s+5)^2}$

$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\mathrm{d}} + \varphi_s \;= 45° + 5° = 50°$; ($\varphi_s = 5°$: phase de sécurité)

$\Delta\varphi = 180° + \arg\big(250H(j\omega_c)\big) \Leftrightarrow 50° = 180° + \arg\left(\dfrac{250}{j\omega_c(j\omega_c+5)^2}\right)$

$\Leftrightarrow 50 = 180 - 90 - 2\mathrm{atan}\left(\dfrac{\omega_c}{5}\right) \Longrightarrow 20 = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\omega_c}{5}\right) \Longrightarrow \dfrac{\omega_c}{5} = 0.36 \Longrightarrow \omega_c = 1.82\, rad/s$

$b = \left|K_p H(j\omega_c)\right| = \left|\dfrac{250}{j\omega_c(j\omega_c+5)^2}\right| = \dfrac{250}{\omega_c(\omega_c^2+25)} = 4.85$

$T_i = \dfrac{10}{\omega_c} = \dfrac{10}{1.81} = 5.5$

La FT du correcteur à retard de phase est : $C(s) = 250\left(\frac{1+5.49s}{1+26.67}\right)$

Fin