Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Master Analyse Fonctionnelle : Devoir

Problème

1). Considérons l'équation aux différences du premier ordre suivante

$$r_{n+1} = Ar_n + B,\, n \in \mathbb{N}$$

avec A, B et $r_0 \in]0, +\infty[$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = A^n r_0 + \left(\frac{A^n - 1}{A - 1}\right) B,\, A \neq 1,$$

et

$$r_n = r_0 + Bn,\, A = 1.$$

2). Donner la forme de la solution de l'équation aux différences du second ordre suivante

$$r_{n+2} = Ar_n + B,\, n \in \mathbb{N}$$

avec A, B, r_0, $r_1 \in]0, +\infty[$.

3). Considérons le système déquation au différences

$$x_{n+1} = \frac{y_n y_{n-1}}{x_n (1 + y_n y_{n-1})},\, y_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{y_n (1 + 1x_n x_{n-1})},\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

avec x_{-1}, x_0, y_{-1}, $y_0 \in]0, +\infty[$.

a). Montrer que le changement de variables

$$u_n = \frac{1}{x_n x_{n-1}},\; v_n = \frac{1}{y_n y_{n-1}},\, n \in \mathbb{N}$$

ramène le système (1) au système

$$u_{n+1} = f(v_n),\; v_{n+1} = f(u_n),\, n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

ou f est une fonction affine à déterminer.

b). Résoudre le système (2).

c). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}} x_{n-1},\, y_{n+1} = \frac{v_n}{v_{n+1}} y_{n-1}.$$

d). Donner la forme explicite de x_n et y_n en fonction des valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1} et y_0.

e). Expliquer comment peut-on déduire la forme des solutions de l'équation

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}},\, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

à partir des solutions du système (1).