

Chap 1: / Éléments d'analyse combinatoire

1-1 / Généralités:

- l'analyse combinatoire (AC) est le dénombrement (comptage, énumération) des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.
- Un ensemble Ω est dit fini s'il est vide ou s'il est en bijection avec un ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ pour un certain entier $n \geq 1$. Un tel n est alors unique et est appelé cardinal de Ω ($n = \text{card } \Omega$).
- La convention $\text{card } \emptyset = 0$.

1-1-1 / Éléments discernables et éléments indiscernables

Soit l'ensemble Ω qui comporte n éléments:

$e_1, e_2, \dots, e_n$ ($\text{card } \Omega = n$).

On distingue deux catégories d'éléments:

- si e_i et e_j sont équivalents, on dit qu'ils sont indiscernables.
- si e_i et e_j sont différents, on dit qu'ils sont discernables.

N-B: l'ensemble Ω de n éléments peut être constitué:

- d'éléments discernables deux à deux.

exemple: $\Omega = \{a, b, c, d\} \rightarrow \text{card } \Omega = 4$

- tous les éléments peuvent aussi être indiscernables.

exemple: $\Omega = \{a, a, a, a\} \rightarrow \text{card } \Omega = 4$

- d'éléments indiscernables et discernables.

exemple: $\Omega = \{a, b, a, n, n, a, b, y\}$
(1) $\text{card } \Omega = 8$

1-2-2/ les différentes dispositions:

une disposition est l'ensemble formé d'éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble à étudier.

un élément figurant dans une disposition est caractérisé par:

- le nombre de fois où il figure dans l'ensemble
- sa place dans la disposition

Exemple: Soit un ensemble de 4 cartes:

$$\{9^P, 9^T, 7^P, 7^C\}$$

la hauteur 9 se répète 2 fois, le 9^P se trouve en première position.

Remarque importante:

Dans le cas d'un ensemble Ω fini ($\text{card } \Omega = n$), constitué d'éléments discernables et/ou indiscernables, on peut représenter une disposition de Ω à l'aide de groupes d'éléments:

- chaque groupe j contient α_j éléments identiques.
- α_j est le nombre de répétition de l'élément du groupe j

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i = n.$$

Exemple:

$$\Omega = \{ [a, a, a], [e, e, e, e], \dots, [x, x, \dots, x] \}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$$A_1 \mid \text{card } A_1 = \alpha_1 \quad A_2 \mid \text{card } A_2 = \alpha_2 \quad \dots \quad A_k \mid \text{card } A_k = \alpha_k$$

1-2-3/ Définitions sur les dispositions:

a) Définition 1: (disposition sans répétition).

c'est une disposition où un élément peut paraître 0 ou 1 fois.

b) Déf 2: (disposition avec rép).

un élément peut figurer plus d'une fois.

c) (Disposition ordonnée) - Déf 3 -

l'ordre des éléments est important. Dans ce type de disposition, on notera les éléments entre parenthèses avec des virgules entre les éléments discernables.

Exemple: (a, b, c, d) ; (a, c, b, d) ; (b, c, d, a)

Ces 3 dispositions sont différentes.

d) Déf 4: (disposition non-ordonnée)

l'ordre des éléments ne joue aucun rôle, qu'on notera par des accolades.

exemple: $\{a, b, c, d\}$; $\{a, c, b, d\}$; $\{b, c, d, a\}$

Ces 3 dispositions sont donc toutes identiques.

1-2/ Formules classiques de l'AC:

1-2-1/ les multiuplets (p-uplets).

Soit $A_1, A_2, \dots, A_p$ p ensembles distincts formés d'éléments complètement discernables.

$$(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$$

On appelle multiuplet ou p-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ une disposition ordonnée de p éléments avec.

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_p \in A_p$$

N-A:

- (i) $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p$.
(ii) le nombre de p -uplets possibles qu'on peut former à partir d'éléments des ensembles A_i ($i=1, 2, \dots, p$) est:

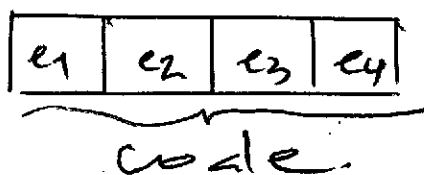
$$N = \text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p) \\ = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p = \prod_{i=1}^p n_i$$

avec $n_i = \text{Card}(A_i)$; $i=1, p$

Le résultat ci-dessus est connue sous le nom de principe fondamental de l'analyse combinatoire. (L F A C).

On peut le démontrer par récurrence.

Exercice: Quelle est la capacité d'un code constitué de 4 symboles où les 2 premiers sont les lettres de l'alphabet et les 2 derniers sont les chiffres décimaux.



$$e_1 \in A_1 = \{A, B, \dots, Z\} \rightarrow \text{Card } A_1 = 26$$

$$e_2 \in A_2 = \{A, B, \dots, Z\} \rightarrow \text{Card } A_2 = 26$$

$$e_3 \in A_3 = \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \text{Card } A_3 = 10$$

$$e_4 \in A_4 = \{0, \dots, 9\} \rightarrow \text{Card } A_4 = 10$$

$\Rightarrow$ d'après le L F A C: la capacité est:

$$C = 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 67600$$

(4)

2-2-2 / Arrangement avec répétition:

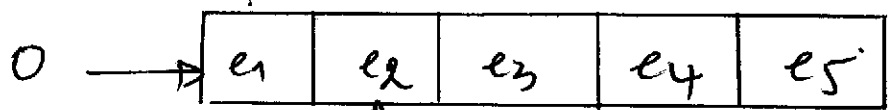
- On appelle arrangement avec rép de p éléments choisis parmi n éléments, une disposition ordonnée de ces p éléments avec répétition éventuelle d'un ou plusieurs éléments.
- le nombre d'arrangements avec rép de p éléments parmi n , qu'on notera A_n^p et donné par: (En appliquant le L F A C).

$$A_n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$$

NB:

- (i) Un arrangement avec rép de p/n peut être considéré comme un p -uplet où chaque coordonnée peut être choisie de n façons.
- (ii) Il est possible que $p > n$.

Exemple: Soit un numéro de téléphone comportant 5 chiffres, tels que:



$\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$e_3, e_4, e_5 \in \{0, 1, \dots, 9\}$

On cherche à calculer le nombre de numéros-té

Soit $\Omega = \{0, 1, \dots, 9\}$, $\omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

L F A C

$\Rightarrow N = 1 \times 5 \times A_{10}^3 = 1 \times 5 \times 10^3 = 5000.$

1-2-3/ Arrangement sans répétition:

- On appelle arrangement sans rép (ou arrangement) de p éléments parmi n , une disposition ordonnée de ces p éléments. Un élément quelconque ne figure qu'une seule fois dans cette disposition.

- Un arrangement est donc un p -uplet ou la

1^{ère} coordonnée peut être choisie de n façons,

la seconde de $(n-1)$ façons, ----- et la

$p^{\text{ème}}$ coordonnée de $(n-p+1)$ façons $\Rightarrow$

D'après le LFA, le nombre d'arrangements de p/n est:

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1-2-4/ Permutations sans rép:

On appelle permutation sans rép (ou permutation) un arrangement sans rép de n éléments parmi n

on notera: $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

1-2-5/ Permutation avec rép:

On considère un ensemble à n éléments non tous discernables, répartis en k groupes discernables, les éléments d'un même groupe ne sont pas discernables.

On pose $n_1, n_2, \dots, n_k$ les cardinaux respectifs de ces groupes: $n_i = \text{card } A_i \ (i=1, k)$

avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$.

(6)

On appelle permutation avec rép de ces n éléments, une disposition ordonnée de ces n éléments, où le 1^{er} élément figure n_1 fois, le 2^{ème} élément figure n_2 fois, - - - - -

le nombre de permutations avec rép de n éléments est donné par:

$$\tilde{P}_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

1-2-6/Combinaison sans rép:

- On appelle combinaison sans rép (ou combinaison) de p éléments parmi n éléments discernables, une disposition non-ordonnée de p éléments choisis parmi n sans rép d'un ou plusieurs éléments.
- le nombre de combinaisons de p sur n est:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad \text{avec } p \leq n.$$

Exemple: on tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, combien y-a-t-il de résultats possibles?

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{5! (32-5)!}$$

1-2-7/Combinaison avec rép:

C'est une disposition non-ordonnée de p éléments à choisir (7) parmi n éléments.

discernables avec répétition éventuelle sur un ou plusieurs éléments.

Le nombre de combinaison avec rép de p/n est donné par :

$$\tilde{C}_n^p = K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p! (n-1)!}$$

2-2-81 Relations utiles:

$$(i) C_n^n = C_n^0 = 1.$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad (\text{Relation de Pascal})$$

(ii) Formule du binôme de Newton:

$$(*) (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

$$= C_n^0 a + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n.$$

$$(**) \text{ si } a=b=1 \Rightarrow$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

(iii) Formule de Stirling:

$$\text{Pour } n \text{ grand: } n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \gg 1) \quad (8)$$