

Chap 2 / Espace de probabilités

2-1 / Notion de probabilités

La probabilité est l'étude des expériences aléatoires. La présentation de la théorie des probabilités est assez complexe. Nous verrons dans ce chapitre l'approche axiomatique due à Kolmogorov, dont le principal axiome est de considérer une probabilité comme une fonction additive.

2-2 / Expérience aléatoire et Evénements

a) Expérience aléatoire:

On appelle expérience aléatoire (ou événement) toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemple: le jet d'un dé à 6 faces et l'observation de la face supérieure est une épreuve.

b) Espace des événements (ou Ensemble fondamental)

c'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve. On le notera généralement par Ω .

Exemple: le jet d'un dé $\Rightarrow$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c) Evénements élémentaires et composés:

- Un événement élémentaire est un sous-ensemble de Ω à un seul élément.

Exple: $A = \{6\}$.

- Un événement composé (ou événement) est un ensemble d'événements élémentaires.

Exple: $B = \{2, 4, 6\}$.
(1)

1) Réalisation d'un événement:

Considérons une épreuve, d'espace d'événements Ω et soit $A \subset \Omega$ (un évé quelconque lié à cette épreuve).

- si l'issue, notée $\omega \in A \Rightarrow$ l'événement A s'est réalisé à travers ω
- si l'issue $\omega \notin A \Rightarrow A$ ne s'est pas réalisé à travers ω .

2-3/ Relations et opérations sur les événements

La théorie moderne des probabilités utilise le langage des ensembles pour modéliser une expérience aléatoire. Il n'est pas toujours facile de trouver un ensemble Ω permettant de modéliser l'expérience aléatoire. Voici une règle pratique pour y arriver: les événements élémentaires sont ceux qui contiennent l'information maximale qu'il est possible d'obtenir de l'expérience.

Exemple: Dans la théorie des ensembles, on note le complémentaire de A dans Ω ($A \subset \Omega$) par:

$$\bar{A} = C_{\Omega}^A = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \}.$$

En probabilité $\bar{A}$ est appelé l'événement contraire de A .

a/ langage ensembliste / langage probabiliste

Le tableau suivant représente la correspondance entre les 2 langages.

Notations	Vocabulaire Ensembliste	Vocabulaire Probab.
ϕ	Ensemble vide	Événement impossible
Ω	// plein	// certain
ω	Élément de Ω	Événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	le résultat ω est une réalisation possible de A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B ($A+B$)
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B ($A \cdot B$)
$\bar{A} = C_{\Omega}^A$	complémentaire de A dans Ω	$\bar{A}$ est l'ext contraire de A
$A \cap B = \phi$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles.

Remarque:

(i) les opérations logiques (et, ou, négation) sur les événements peuvent bien sûr faire intervenir plus de deux événements.

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements liés à une épreuve d'ensemble fondamental Ω :

$$(*) \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

= {réalisation de l'un au moins des évets A_i ; $i \in \mathbb{N}^*$ }

$$(*) \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

= {réalisation dans tous les A_i ; $i \in \mathbb{N}^*$ }

(*) toutes les opérations sur les ensembles restent valables sur les modèles probabilistes.
(commutativité, associativité, distributivité, -----)

(ii) Lois de De Morgan:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \\ \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i \end{cases}$$

(iii) on peut aussi définir:

(*) La différence: $(A - B)$

$$\omega \in (A - B) \Leftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \notin B$$

(*) La différence symétrique: $(A \Delta B)$

$$\omega \in (A \Delta B) \Leftrightarrow \omega \in (A - B) \text{ ou } \omega \in (B - A).$$

$$\underline{NB!}: A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

- $(A \Delta B)$ se réalise, lorsqu'un seul des événements A, B se réalise.

- $(A + B) = (A \cup B)$ / $\cup$ (OR) est le ou inclusif

$(A \Delta B) = A \text{ (XOR) } B$ / est le ou exclusif.

(iv) Système Complet:

Soit Ω l'espace des événements associé à une expérience aléatoire.

les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ liés à cette

expérience aléatoire forment un système complet de Ω si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (i) $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, n.$
- (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \quad \left\{ \begin{array}{l} i = \overline{1, n} \\ j = \overline{1, n} \end{array} \right.$
- (iii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$

2-4/ Mesure de probabilités:

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des sous-parties de Ω .
 La probabilité est une application de chaque événement des parties de Ω dans $\mathbb{R}$.
 Cette application notée $\mathbb{P}$ (ou $\mathbb{P}_\omega$) s'appelle "mesure de probabilité".

$$\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E_i \longmapsto \mathbb{P}(E_i)$$

Le nombre $\mathbb{P}(E_i)$ s'appelle probabilité de réalisation de l'événement E_i .

2-5/ Axiomes de Kolmogorov:

(i) Axiome de positivité:

$$\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$$

(ii) Axiome de certitude:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

NB: la probabilité est normée

$$(\forall A \subset \Omega: 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1).$$

(iii) Axiome d'additivité:

Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$)
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque: Propriétés sur la mesure de proba:

(i) $P(\emptyset) = 0$

Démonstration: Soit $A \subset \Omega$, on sait que $A \cap \emptyset = \emptyset$
et $A \cup \emptyset = A \Rightarrow$ d'après l'axiome 3:

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

(ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration: on a $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$\Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

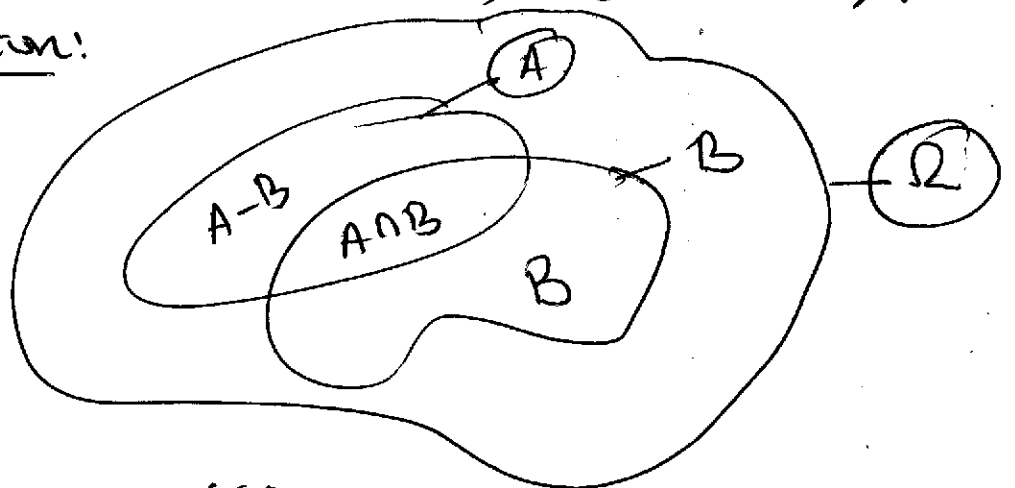
(iii) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

2-6/ Théorème sur les probabilités:

Considérons 2 événements A et B d'espace
des événements Ω , tels que: $A \cap B \neq \emptyset$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Démonstration:



on a: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$

avec $(A \cap B)$, $(A - B)$ et $(B - A)$ incompatibles 2 à 2

AX-3 $\Rightarrow \mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A \cap B) + \mathcal{L}(A - B) + \mathcal{L}(B - A) \rightarrow (*)$

D'autre part, on a aussi:

$$\left. \begin{array}{l} A = (A - B) \cup (A \cap B) \\ B = (B - A) \cup (A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A - B) + \mathcal{L}(A \cap B) \\ \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(B - A) + \mathcal{L}(A \cap B) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(A - B) = \mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(A \cap B) \\ \mathcal{L}(B - A) = \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A \cap B) \end{array} \right.$$

En remplaçant dans l'eq (*) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A \cap B).$$

2-7/ Définition d'une σ -algèbre:

Soit Ω l'ensemble fondamental lié à une expérience,
un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) est
dit σ -algèbre de parties de Ω si:

(i) $\Omega \in \mathcal{S}$

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{S}$

(iii) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$

2-8/ Espace de probabilités:

Le triplet $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ est dit espace de proba ou
 $\mathcal{S} \equiv \sigma$ -algèbre des événements et $\mathbb{P}$ est une

application: $\mathbb{P}: \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant:

(i) $\forall A \in \mathcal{S}: \mathbb{P}(A) \geq 0$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) Pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$
 $\forall i \neq j$:

(7)

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L(A_i)$$

NB: $\cup \Leftrightarrow (+)$ addition logique.

$\cap \Leftrightarrow (\cdot)$ produit logique.

$L(A+B) \leq L(A) + L(B)$ (Inégalité de Boole).

Remarque importante: Pour le calcul des probabilités, on distingue les cas suivants:

(i) Si l'ensemble fondamental Ω est fini dénombrable soit Ω constitué de n événements élémentaires $\{e_i\}$ avec $i = \overline{1, n}$ avec $p_i = L(\{e_i\})$.

Soit $A \subset \Omega$, tel que $A = \bigcup_{i=1}^k \{e_i\}$; $0 < k < n$.

$$\Rightarrow L(A) = L\left(\bigcup_{i=1}^k \{e_i\}\right) = \sum_{i=1}^k p_i$$

NB: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

.) Dans le cas d'une probabilité uniforme (ou homogène), c'est-à-dire $\forall i = \overline{1, n}$

$$L(\{e_1\}) = L(\{e_2\}) = \dots = L(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \forall A \subset \Omega : L(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

$$(8) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

(ii) Si l'ensemble fondamental est infini dénombrable soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ qui contient une infinité de résultats possibles.

Ω sera un espace de proba si:

$$(*) \quad \forall i, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0$$

$$(**) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

NB: $A \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} \mathbb{P}(\{\omega_j\})$

2-9/ Probabilités conditionnelles:

a) Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba et A, B deux événements de cet espace, tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de $A \cap B$ (ou de A sachant B) est définie par:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A, B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

NB: Dans le cas où Ω est fini, on a:

(i) si la proba est uniforme:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(A/B) \neq \mathbb{P}(B/A).$$

$$(iii) \quad \mathbb{P}(A/A) = 1.$$

Exemple: on lance deux dés simultanément, si la somme des chiffres obtenus est égale à 6, quelle est la proba pour qu'un des dés ait le chiffre 2? (on suppose qu'on a (9) une proba-uniforme)

on définit les événements suivants:

$$B = \{ \text{Somme des chiffres obtenus est égale à 6} \} \\ = \{ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) \}$$

$$A = \{ \text{apparition du chiffre 2 dans au moins un dé} \} \\ = \{ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), \\ (3,2), (4,2), (5,2), (6,2) \}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{2}{5}$$

$$A \cap B = \{ (2,4), (4,2) \}$$

b) Événements indépendants:

* Def: l'événement A est indep de l'événement B si:

$$P(A|B) = P(A).$$

$$\text{NB: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

c) Probabilités composées: Soient A et B 2 événements tels que $P(B) > 0$. La probabilité composée de A à B est:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

NB: on peut généraliser le résultat précédent:

si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est une suite d'événements

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

(10)

2-10/ Formule de Bayes:

Soient $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ un espace de proba et

$A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω (système complet de Ω). Si B est un autre événement, alors:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B|A_i)}$$

$\forall i=1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B|A_i)$$

Exemple: Trois machines A, B, C produisent 50%, 30%, 20% simultanément de la production totale d'une usine.

Les proportions de la production défectueuse sont 3%, 4%, 5% respectivement pour A, B et C.

On choisit une unité de production aléatoirement.

1/ Quelle est la probabilité que cette unité soit défectueuse?

Soit $X = \{\text{l'unité choisie est défectueuse}\}$.
 $\mathbb{P}(X) = ?$

$$\text{on a } X = \underbrace{(X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (X \cap C)}_{\text{Incompatibles}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X \cap A) + \mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(X \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(X|A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(X|B) + \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(X|C)$$

$$P(X) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 \\ = 0,037$$

2°/ Quelle est la probabilité pour que l'unité choisie défectueuse soit produite par A ?

$$P(A|X) = ?$$

En utilisant la formule de Bayes :

$$P(A|X) = \frac{P(A) \cdot P(X|A)}{P(X)} = \frac{0,5 \times 0,03}{0,037} \\ = 15/37$$

Fin