

Chap 4 / - Lois de probabilités usuelles -

Les lois les plus rencontrées en pratique (lois usuelles) sont réparties en 2 groupes:

- les lois discrètes: (Loi de Bernoulli, de Poisson, ----)
- " " continues (uniforme, normale, ----)

A / Les lois discrètes:

4-1/ Loi de Bernoulli:

La v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ est dite suivre une loi de Bernoulli de paramètre p , si X prend les valeurs $\{0, 1\}$ avec les probabilités:

$$\mathbb{P}(X=1) = p \wedge \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

N-B: Cette loi s'associe à toute expérience à deux issues (ces 2 valeurs sont aussi dites: succès (1) et échec (0)).

Exemple: l'état d'un circuit électronique.
(défectueux ou non défectueux)

4-2/ Loi binomiale:

- La loi binomiale modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli.

- Si $X = k$ équivaut à k succès parmi n tirages.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) &= C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

NB:) $\mathbb{P}(X=n) = p^n$.

) On note la loi binomiale par:

$$X \sim B(n, p).$$

(1)

o) $E(X) = np$; $Var(X) = np(1-p)$.

Exemple: le test de validité d'un médicament sur un échantillon de 1000 malades.

4-3/ Loi de Poisson:

une VA X est dite suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

NB: $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Exemple: Étude de la saturation d'un serveur informatique DNS (charge).

B/ Lois continues

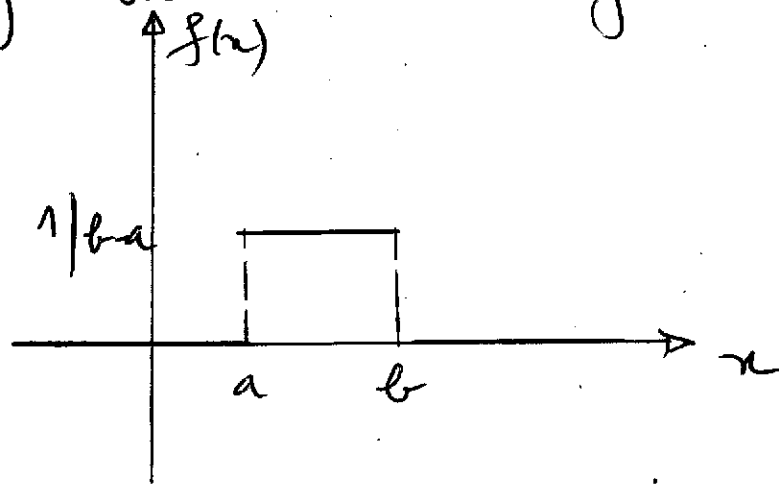
4-4/ Loi uniforme:

une VAC X est dite suivre une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases}$$

N-B: $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exercice: Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$ d'une VAC X qui suit une loi uniforme sur $[a, b]$ ($a < b$).



(2)

•) Pour $x \leq a \Rightarrow f(t) = 0, \forall t \leq a \Rightarrow$

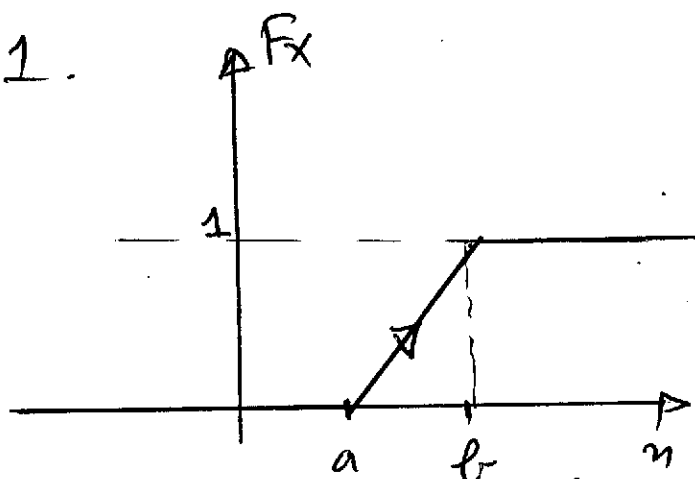
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

•) Pour $a \leq x \leq b \Rightarrow f(t) = 1/(b-a), \forall t \in [a, b]$

$$\Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

•) Pour $x \geq b \Rightarrow \int_a^b \frac{dt}{b-a} = 1$

$$\text{donc } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



4-5/ Loi exponentielle:

Une VAC X est dite suivre une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda = cte > 0$) si sa fonction densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

NB: $E(X) = 1/\lambda$; $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

4-6/ Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss)

Une VAC X est dite suivre une loi normale de paramètres μ et σ si elle admet pour densité la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]; x \in \mathbb{R}$$

NB: On note la loi normale par: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
avec $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ ($\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$)

Remarque importante

- Généralement, on utilise en pratique la loi normale standard qui est définie pour la v.a. centrée réduite $X^* = U = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X^* \sim N(0, 1)$.
- la fonction densité relative à X^* est:

$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Rightarrow$ sa fonction de répartition est:

$$\Phi(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ pour } u > 0.$$

Les valeurs de Φ sont données à l'aide des tables statistiques.

* Propriétés de Φ :

1) $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$.

2) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X^* \sim N(0, 1)$ avec

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

on désire calculer $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ en utilisant la loi normale standard.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{X^*} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

(4)

Tables de lois de probabilités usuelles

Ces tables présentent les principales caractéristiques des lois de probabilité les plus usuelles. Pour chaque loi de probabilité, on donne son nom usuel, son symbole, son support et son espérance. Les lois discrètes sont définies par les probabilités élémentaires et la fonction génératrice, les lois continues par la densité et la fonction caractéristique. Pour les lois unidimensionnelles, on donne la variance, et pour les lois multidimensionnelles, on donne la matrice de covariance.

Les fonctions spéciales suivantes sont utilisées :

- la fonction Gamma est définie pour $a > 0$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$.
Propriétés : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \forall a > 1, \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$.
- la fonction Bêta est définie pour $a > 0$ et $b > 0$ par $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$.

Table 1 : Variables aléatoire réelles discrètes

Nom et Symbole	Support	Probabilités élémentaires $P(X = k)$	Espérance	Variance	Fonction génératrice
Loi de Bernoulli $B(p)$ $p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^z$
Loi binomiale $B(n,p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$\{0,1,\dots,n\}$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^z)^n$
Loi binomiale négative $BN(n,p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$\{n, n+1, \dots\}$	$C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^z}{1-(1-p)e^z} \right)^n$
Loi de Poisson $P(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^z-1)}$
Loi géométrique $G(p)$ $p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^z}{1-(1-p)e^z}$
Loi hypergéométrique $H(N, m, n)$ $N \in \mathbb{N}^*, (m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$	$\{0, \dots, \min(m, n)\}$	$\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	

Table 2 : Variables aléatoires réelles continues

Nom et Symbole	Support	Densité $f_X(x)$	Espérance	Variancé	Fonction caractéristique
Loi uniforme $U[a,b]$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$
Loi normale ou de Gauss $N(m, \sigma^2)$ $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{++}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi gamma $G(\alpha, \lambda)$ $\alpha \in \mathbb{R}^{++}, \lambda \in \mathbb{R}^{++}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
Loi exponentielle $\exp(\lambda) = G(1, \lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{++}$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}$
Loi du chi-deux $\chi_n^2 = G\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$	n	$2n$	$(1 - 2it)^{-n/2}$
Loi béta de 1 ^{ère} espèce $\beta_1(a, b)$ $a \in \mathbb{R}^{++}, b \in \mathbb{R}^{++}$	$[0,1]$	$\frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} 1_{[0,1]}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	
Loi béta de 2 ^{ème} espèce $\beta_2(a, b)$ $a \in \mathbb{R}^{++}, b \in \mathbb{R}^{++}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\beta(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}$	$\frac{a}{b-1}$ si $b > 1$	$\frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$ si $b > 2$	
Loi de Weibull $W(\eta, \beta)$ $\eta \in \mathbb{R}^{++}, \beta \in \mathbb{R}^{++}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$	$\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right]$	

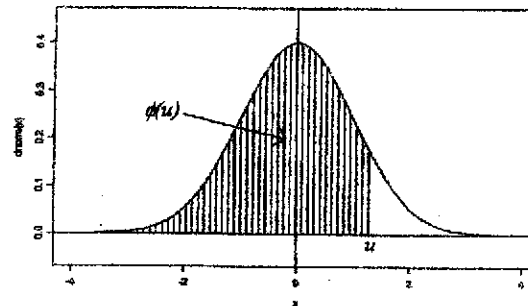
Table 3 : Vecteurs aléatoires (en dimension d)

Nom et Symbole	Support	Probabilité ou Densité	Espérance	Matrice de covariance	Fonction caractéristique
Loi uniforme $U_d(A)$ A borélien borné de $\mathbb{R}^d$	A	$\frac{1}{\text{Leb}(A)} 1_A(x)$			
Loi normale $N_d(m, \Sigma)$ $m \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in M_{d,d}$	$\mathbb{R}^d$	$\frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)}$	m	Σ	$e^{itm - \frac{1}{2}t\Sigma t}$
Loi multinomiale $M_d(n, p)$ $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[^d, \sum_{i=1}^d p_i = 1$	$k \in \mathbb{N}^d$ $\sum_{i=1}^d k_i = n$	$\frac{n!}{k_1! \dots k_d!} p_1^{k_1} \dots p_d^{k_d}$	np	$c_{i,j} = np_i(1 - p_i)$ $c_{i,j} = -np_i p_j, i \neq j$	$\left[\sum_{i=1}^d p_i e^{it_i} \right]^n$

TABLE 1 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

U étant une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, la table donne la valeur de $\Phi(u) = P(U \leq u)$.

En R, la commande correspondante est `pnorm(u)`.



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de u

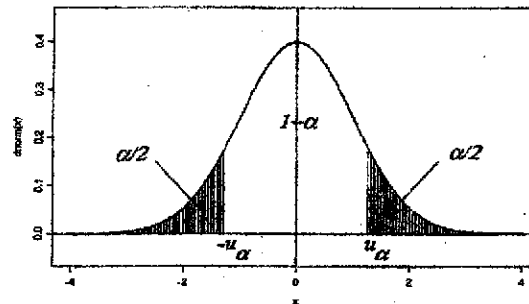
u	3.0	3.5	4.0	4.5
$\Phi(u)$	0.9987	0.99977	0.999968	0.999997

TABLE 2 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

U étant une variable aléatoire de loi $N(0,1)$ et α un réel de $[0,1]$, la table donne la valeur

$$u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ telle que } P(|U| > u_\alpha) = \alpha.$$

En R, la commande correspondante est `qnorm(1-alpha/2)`.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$+\infty$	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537	1.9600	1.8808	1.8119	1.7507	1.6954
0.1	1.6449	1.5982	1.5548	1.5141	1.4758	1.4395	1.4051	1.3722	1.3408	1.3106
0.2	1.2816	1.2536	1.2265	1.2004	1.1750	1.1503	1.1264	1.1031	1.0803	1.0581
0.3	1.0364	1.0152	0.9945	0.9741	0.9542	0.9346	0.9154	0.8965	0.8779	0.8596
0.4	0.8416	0.8239	0.8064	0.7892	0.7722	0.7554	0.7388	0.7225	0.7063	0.6903
0.5	0.6745	0.6588	0.6433	0.6280	0.6128	0.5978	0.5828	0.5681	0.5534	0.5388
0.6	0.5244	0.5101	0.4959	0.4817	0.4677	0.4538	0.4399	0.4261	0.4125	0.3989
0.7	0.3853	0.3719	0.3585	0.3451	0.3319	0.3186	0.3055	0.2924	0.2793	0.2663
0.8	0.2533	0.2404	0.2275	0.2147	0.2019	0.1891	0.1764	0.1637	0.1510	0.1383
0.9	0.1257	0.1130	0.1004	0.0878	0.0753	0.0627	0.0502	0.0376	0.0251	0.0125

Petites valeurs de α

α	0.002	0.001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
u_α	3.0902	3.2905	3.8906	4.4171	4.8916	5.3267	5.7307	6.1094

$$\text{Pour } p < \frac{1}{2}, \quad \Phi^{-1}(p) = -u_{2p}$$

$$\text{Pour } p \geq \frac{1}{2}, \quad \Phi^{-1}(p) = u_{2(1-p)}$$