Matière : Maths 4

Série de TD N° 3
(Variables Aléatoires Réelles)

Exercice 1 :

1°) Soit X une variable aléatoire de probabilité définie pour $\lambda > 0$ par :

$$P(X=i)=\frac{C.\lambda^i}{i!},\ \forall i=0,1,2,......$$

- Calculer $P(X=0)$ et $P(X>2)$.

N-B : C est une constante à déterminer. Pour cela, on utilise le développement en série de la fonction :

$$x\rightarrow e^x=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}$$

2°) Soit f la fonction définie pour $\lambda > 0$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\lambda.e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\leq 0\end{cases}$$

- La fonction f est-elle une densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?
- Calculer $P(X>1)$.

Exercice 2 :

La fonction de répartition d'une V-A X est donnée par :

$$F(x)=\begin{cases}0, x<2\\ (x-2)^2, 2\leq x<3\\ 1, x\geq 3\end{cases}$$

1°) Calculer : $P(1\leq X\leq 5/2)$; $P(5/2\leq X\leq 7/2)$; $P(5/2\leq X\leq 3)$.

2°) Déterminer la densité de probabilité de la V-A X.

Exercice 3 :

On jete deux dés symétriques. Soient X_1 et X_2 les v-a correspondant à la somme et le produit des points obtenus.

1°) Construire les suites de répartitions de X_1 et X_2.

2°) Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

Exercice 4 :

Une v-a X est distribuée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, |x| \le a \\ 0, |x| \ge a \end{cases}$$, avec a et b des réels strictement positif

1°) Déterminer la relation que doivent vérifier les réels a et b.

2°) Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et trouver la fonction de répartition $F(x)$ de X.

Exercice 5 :

1°) *Inégalité de Markov :*

Montrer que si X est une variable aléatoire positive alors

$$\forall a > 0, P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$$

2°) *Inégalité de Chebyshev :*

Montrer que si X est une variable aléatoire de moyenne finie μ et de variance σ^2, alors

$$\forall k > 0, P(|X - \mu| \ge k) \le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Application :

Soit X le nombre de pièces que fabrique une usine pendant une semaine. On suppose que la moyenne de X est égale à 500.

- Que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine ne dépasse pas 750.
- Si la variance de la production est connue et est égale à 250, que peut-on dire sur la probabilité que cette semaine la production soit entre 400 et 600.

N-B : Démontrer l'inégalité de Markov, uniquement pour un des deux cas :

$X \equiv VAC$ ou $X \equiv VAD$

On note : $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$

Corrigé de la série de TD 3 (P et S)

Exo 1:

1°/ $X \equiv$ VAD (variable aléatoire discrète), de fonction de distribution f définie par:

$$f(i) = P(X=i) = c.\frac{\lambda^i}{i!} \; ; \forall i \in \mathbb{N} \quad (\lambda > 0)$$

On calcule d'abord c ($c = \text{cte} \in \mathbb{R}$).

Pour que f soit une fonction de distribution de la VAD X, il faut: $\begin{cases} ① \; \forall i \in \mathbb{N}, \; f(i) \geq 0 \\ ② \; \sum_{i=0}^{n} f(i) = 1. \end{cases}$

$$① \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \; ; \; c.\frac{\lambda^i}{i!} \geq 0 \Rightarrow \boxed{c \geq 0}$$

$$② \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} c.\frac{\lambda^i}{i!} = 1 \Rightarrow c.\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{= e^{\lambda}} = 1 \Rightarrow$$

$$c.e^{\lambda} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda} > 0$$

donc $\boxed{c = e^{-\lambda}}$

donc $\boxed{f(i) = P(X=i) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^i}{i!} \; ; \; i \in \mathbb{N}}$

*/ $P(X=0) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

*/ $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$= 1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x>0 \\ 0 & ; \text{sinon} \end{cases} \qquad (\lambda = \underline{cte} > 0)$$

f est une densité de probabilité d'une V-A continue X si :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$ et (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underset{(\lambda>0)}{\lambda e^{-\lambda x}} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{0} + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$= \lambda \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \left(\frac{-1}{\lambda}\right) \lim_{X \to +\infty} \left[e^{-\lambda x}\right]_0^X$$

$$= (-1) \cdot \lim_{X \to +\infty} \left[\underbrace{e^{-\lambda X}}_{\to 0} - 1\right] = 1.$$

Les 2 conditions (i) et (ii) sont vérifiées $\Rightarrow$ f est une densité de probabilité d'une V-A X.

*/ Calcul de $P(X>1)$.
NB : on peut calculer $P(X>1)$ de 2 manières :

1

1er méthode : On a $P(X \leq 1) + P(X>1) = 1 \Rightarrow$
$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1)$

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{0} + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\left(e^{-\lambda} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad P(X>1) = 1 - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}$$

2ème méthode : $P(X>1) = \int_{1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \int_{1}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$.

$$= (-1) \lim_{X \to +\infty} \left[e^{-\lambda x}\right]_1^X = e^{-\lambda}.$$

2°/ <u>Calcul de $f(x)$</u> : on remarque que $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x < 2 \\ 2(x-2) \ ; & 2 \leq x < 3 \\ 0 \ ; & x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2(x-2) \ ; & 2 \leq x < 3 \\ 0 \ ; & x < 2 \lor x \geq 3. \end{cases}$$

<u>Exo3</u> : on a $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \ / \ \Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow \text{Card}\,\Omega = 6 \times 6 = 36$

$\omega = (a, b) \in \Omega \ / \ a \in \Omega_1 \land b \in \Omega_2$.

on a une proba-uniforme : $\forall \omega \in \Omega \ / \ P(\{\omega\}) = 1/36$.

on pose $X_1 = a + b \ \land \ X_2 = a.b$.

1°/ <u>Lois de X_1 et X_2</u> : (X_1 et X_2 sont 2 VAD)

*/ <u>Lois de X_1</u> : $p_i = P(X_1 = x_i) = P(a + b = x_i)$.

$\sum_{i=1}^{11} p_i = 1$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

<u>Par exemple</u> : $p_3 = P(X_1 = 4) = P(\{\omega = (a,b) \in \Omega \ / \ a + b = 4\})$

$= P(\{(1,3) ; (3,1) ; (2,2)\}) = 3/36$

*/ <u>Lois de X_2</u> : $p_i = P(X_2 = x_i) = P(a.b = x_i)$.

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36.
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$3/36$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

<u>Par exemple</u> : $p_4 = P(X_2 = 4) = P(\{(a,b) \in \Omega \ / \ ab = 4\})$

$= P(\{(1,4) ; (4,1) ; (2,2)\}) = 3/36$

<u>NB</u> : $\sum_{i=1}^{18} p_i = 1$.

2°/ Puisque X_1 et X_2 sont 2 VAD à valeurs finies $\Rightarrow$

$$E(X_1) = \sum_{i=1}^{11} x_i P(X_1 = x_i) = 7$$

$$E(X_2) = \sum_{i=1}^{18} x_i . P(X_2 = x_i) = 12,25$$

<u>Exo 4</u>:

$$X \equiv VAC \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} ; & |x| \leq a . \\ 0 ; & |x| \geq a . \end{cases}$$

$a>0$, $b>0$.

1°/ <u>Relation entre a et b</u>

Pour que f soit une fct-densité de X ; il faut :

(i) $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq 0$; (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

On remarque que : $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $(a>0, b>0)$

on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-a} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx}_{0} + \int_{-a}^{a} f(x)\, dx + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx}_{0} = \frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \underbrace{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx .$

fct paire.

$$= 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx .$$

On pose $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t\, dt$

$\Downarrow$

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \arcsin(0) = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{a}{a}\right) = \pi/2 . \end{cases}$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \underbrace{(1 - \sin^2 t)}_{\cos^2 t}} \cdot a \cos t\, dt$$

$$= 2ab . \int_0^{\pi/2} \underbrace{|\cos t|}_{\cos t} . \cos t\, dt \quad (t \in [0, \pi/2] ; \cos t > 0)$$

$$= 2ab . \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = ab . \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$\int_{-a}^{+\infty} f(u)\,du = ab\left(t\Big]_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} \right) = ab.\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{ab = 2/\pi}$$

2°/ $E(X) = ?$ / $Var(X) = ?$ / $F(x) = ?$

*/ $\underline{E(X) = ?}$ on a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(u)\,du. = \frac{b}{a}.\int_{-a}^{a} \underbrace{x\sqrt{a^2 - x^2}}_{\text{fct-impaire}}\,dx.$

$$\boxed{E(X) = 0}. \qquad = 0$$

*/ $\underline{Var(X) = ?}$ $Var(X) = E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{0} = E(X^2)$

$$= \frac{b}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}_{\text{fct-paire.}}\,dx.$$

$$\Rightarrow Var(X) = 2.\frac{b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

on pose $x = a\sin t \Rightarrow$

$$Var(X) = 2.\frac{b}{a}.\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\,.\,a\cos t\,.\,a\cos t\,dt$$

$$= 2a^3 b.\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin t.\cos t)^2}_{\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)} dt = \frac{a^3 b}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt$$

$$= \frac{a^3 b}{4}.\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{a^3 b}{4} \times \pi/2.$$

$$Var(X) = \frac{a^3 b\pi}{8} \quad \text{comme} \quad \overset{1°/}{\boxed{ab = \frac{2}{\pi}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{a^2}{4}} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

$$= a/2.$$

*/ $F(x) = ?$

$-\infty \qquad -a \qquad a \qquad +\infty$

On distingue les cas suivants :

*/ si $x \leq -a$: on a $f(t) = 0$; $\forall t \leq -a \Rightarrow$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0} \, dt = 0$$

*/ si $-a \leq x \leq a$: on a $f(t) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2}$, $t \in [-a, a]$.

$$\Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-a}^{x} f(t)\, dt = \frac{b}{a} \int_{-a}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt$$

NB : à ne pas calculer ; juste leurs dire de faire le changement de variable $t = a \sin \alpha$ et $ab = 2/\pi \Rightarrow$

$$F(x) = \frac{1}{\pi a^2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi a^2}{2} \right]$$

*/ si $x \geq a$: on a : $f(t) = 0$, $\forall t \geq a$.

on a : $F \nearrow \wedge \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
$\wedge$
$F(a) = 1$. $\Rightarrow F(x) = 1$.

$$\text{donc : } F(x) = \begin{cases} 0 \; ; & x \leq -a \\ \frac{1}{\pi a^2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi a^2}{2} \right] & \text{si } |x| \leq a \\ 1 \; ; & x \geq a \end{cases}$$

Exo 5 :

1°/ Inégalité de Markov

X est une VA positive $\overset{?}{\Longrightarrow} \forall a>0 \,;\, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

* cas ou $X \equiv$ VAC : Soit X une VAC positive ($X \in D_X \subset \mathbb{R}_+$), de densité $f(x)$.

on a : $E(X) = \int x f(x)\,dx = \int^{+\infty} x f(x)\,dx$.

Soit $a>0$ arbitraire $\overset{\circ}{\Longrightarrow} E(X) = \underbrace{\int_0^a x f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^{+\infty} x f(x)\,dx}_{\geq 0}$

$\Rightarrow E(X) \geq \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx$.

on a $x \geq a > 0 \Rightarrow x f(x) \geq a f(x) > 0 \Rightarrow$

$$\int_a^{+\infty} x f(x)\,dx \geq a . \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}_{\mathbb{P}(X \geq a)} = a\,\mathbb{P}(X \geq a)$$

donc $E(X) \geq \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx \geq a . \mathbb{P}(X \geq a) \Rightarrow$

$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ donc

$$\boxed{\forall a>0 \,,\, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

2°/ Inégalité de Chebyshev :

$\left(\begin{array}{l} X \text{ est une VA avec} \\ \mu = E(X) \,;\, \sigma^2 = Var(X) \end{array}\right) \Rightarrow \forall k>0 \,;\, \mathbb{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$.

Comme $(X-\mu)^2$ est une v.a. positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov avec $a = k^2$.

$$P[(X-\mu)^2 \geq k^2] \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2}$$

Comme: $(X-\mu)^2 \geq k^2 \iff |X-\mu| \geq k \Rightarrow$

$$P[|X-\mu| \geq k] \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2} = \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow \forall k > 0, \ P[|X-\mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

3°/ <u>Application</u>: Soit $X \equiv$ {Nombre de pièces fabriquées}

avec $\mu = E(X) = 500$.

1°/ $P(X < 750) \longrightarrow ?$

D'après l'inég. Markov: $P(X \geq 750) \leq \frac{E(X)}{750} = \frac{500}{750} = \frac{2}{3}$

on a: $P(X < 750) = 1 - P(X \geq 750) \Rightarrow$

$$P(X < 750) = [1 - P(X \geq 750)] \geq 1 - \frac{2}{3} = 1/3.$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X < 750) \geq 1/3}$$

2°/ $\sigma^2 = Var(X) = 250$; $\mu = E(X) = 500$.

$P(400 < X < 600) \longrightarrow ?$

D'après l'inég. Chebychev avec $\mu = 500$ et $k = 100$:

$$P(400 < X < 600) = P(-100 < X - 500 < 100)$$
$$= P(|X-500| < 100)$$
$$= 1 - P(|X-500| \geq 100)$$

d'après Ineg. Cheb

$$P(|X-500| \geq 100) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{250}{10^4} \Rightarrow$$

$$P(400 < X < 600) \geq 1 - \frac{250}{10^4} =$$