Matière : *Probabilités & Statistiques*

Série de TD N° 4
(*Lois de probabilités usuelles*)

Exercice 1 :

1°) Montrer que pour n assez grand, p assez petit et $np = Cte$, on peut faire l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

2°) La probabilité qu'une pièce extraite d'un lot de 200 pièces, soit défectueuse est 0,02. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses sur le lot.

a) Déterminer la loi exacte de X et calculer la probabilité que sur les 200 pièces, il y ait :

a-1) 5 pièces défectueuses ; a-2) au plus 5 pièces défectueuses.

b) Peut-on approximer la loi exacte de X, par une autre loi ? (Justifier). Si oui, calculer alors les probabilités : $P(X = 5)$ et $P(X \leq 5)$.

Exercice 2 :

Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps suit une loi de Poisson.

Calculer la probabilité que durant deux minutes la centrale reçoit :

a) Trois appels ; b) Au moins un appel ; c) Au plus deux appels.

Exercice 3 :

On définit la convolution dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes discrètes X et Y, comme étant la loi de la somme $(X+Y)$ par :

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P(X=n-k).P(Y=k)$$

Déterminer la loi de $(X+Y)$ si $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\beta)$.

Exercice 4 :

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1°) Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leq 70) = 0{,}05$.

2°) Calculer alors $P(T > 30)$.

Exercice 5 : (Supplémentaire).

Un fournisseur d'accès à internet met en place un point local d'accès (ALP), qui dessert 5000 abonnés. A instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1°) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et son écart-type.

2°) On pose $Y = \dfrac{X - 1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale standard N (0,1).

3°) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%.

En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Tables de lois de probabilités usuelles

Ces tables présentent les principales caractéristiques des lois de probabilité les plus usuelles. Pour chaque loi de probabilité, on donne son nom usuel, son symbole, son support et son espérance. Les lois discrètes sont définies par les probabilités élémentaires et la fonction génératrice, les lois continues par la densité et la fonction caractéristique. Pour les lois unidimensionnelles, on donne la variance, et pour les lois multidimensionnelles, on donne la matrice de covariance.

Les fonctions spéciales suivantes sont utilisées :

- la fonction Gamma est définie pour $a>0$ par $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$.
  Propriétés : $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!,\ \Gamma(1)=1,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \forall a>1,\ \Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)$.
- la fonction Béta est définie pour $a>0$ et $b>0$ par $\beta(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

Table 1 : Variables aléatoires réelles discrètes

Nom et Symbole	Support	Probabilités élémentaires $P(X=k)$	Espérance	Variance	Fonc[illegible] génér[illegible]
Loi de Bernoulli $B(p)$ $p\in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$	$1-p+$ [illegible]
Loi binomiale $B(n,p)$ $p\in]0,1[,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\{0,1,\dots,n\}$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+$ [illegible]
Loi binomiale négative $BN(n,p)$ $p\in]0,1[,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\{n,n+1,\dots\}$	$C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\dfrac{n}{p}$	$\dfrac{n(1-p)}{p^2}$	$\left(\dfrac{pz}{1-(1-p)}\right.$ [illegible]
Loi de Poisson $P(\lambda)$ $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(z-1)}$
Loi géométrique $G(p)$ $p\in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pz}{1-(1-}$ [illegible]
Loi hypergéométrique $H(N,m,n)$ $N\in\mathbb{N}^*,\ (m,n)\in\{1,\dots,N\}^2$	$\{0,\dots,\min(m,n)\}$	$\dfrac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$	$\dfrac{nm}{N}$	$\dfrac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	

Table 2 : Variables aléatoires réelles continues

Nom et Symbole	Support	Densité $f_X(x)$	Espérance	Variance	Fonction caractéristique
Loi uniforme $U[a,b]$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
Loi normale ou de Gauss $N(m,\sigma^2)$ $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi gamma $G(\alpha,\lambda)$ $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
Loi exponentielle $\exp(\lambda) = G(1,\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}$
Loi du chi-deux $\chi^2_n = G\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$	n	$2n$	$(1-2it)^{-n/2}$
Loi bêta de 1ère espèce $\beta_1(a,b)$ $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$	$[0,1]$	$\frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{[0,1]}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	
Loi bêta de 2ème espèce $\beta_2(a,b)$ $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\beta(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}$	$\frac{a}{b-1}$ si $b>1$	$\frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$ si $b>2$	
Loi de Weibull $W(\eta,\beta)$ $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$	$\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$	$\eta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right]$	

Table 3 : Vecteurs aléatoires (en dimension d)

Nom et Symbole	Support	Probabilité ou Densité	Espérance	Matrice de covariance	Fonction caractéristique
Loi uniforme $U_d(A)$ A borélien borné de $\mathbb{R}^d$	A	$\frac{1}{Leb(A)} 1_A(x)$			
Loi normale $N_d(m,\Sigma)$ $m \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in M_{d,d}$	$\mathbb{R}^d$	$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)}$	m	Σ	$e^{{}^t tm-\frac{1}{2}{}^t t\Sigma t}$
Loi multinomiale $M_d(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[^d, \sum_{i=1}^d p_i = 1$	$k \in \mathbb{N}^d$ $\sum_{i=1}^d k_i = n$	$\frac{n!}{k_1!\ldots k_d!} p_1^{k_1}\ldots p_d^{k_d}$	np	$c_{i,i} = np_i(1-p_i)$ $c_{i,j} = -np_i p_j, i \neq j$	$\left[\sum_{i=1}^d p_i z_i\right]^n$

- Corrigé de la série de TD N° 4 -

Exo1 :

1) Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson -

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ assez grand} \\ p \text{ assez petit} \\ np = \lambda = c^{te} \end{array}\right\} \Rightarrow B(n,p) \simeq P_o(\lambda)$$

on a $X \sim B(n,p) \Rightarrow P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow$ $\quad 0 \leq k \leq n$.

$$P(X=k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

on a $np = \lambda \Rightarrow p = \lambda/n \Rightarrow$

$$P(X=k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

On démontre l'approximation dans le cas où $n \gg 1$ et $p \ll 1$, on a

$$\text{Pour } n \gg 1 \; (n \to +\infty) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \simeq \dfrac{n^k}{n^k} = 1 \\[2ex] \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \simeq 1 \\[2ex] \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \simeq e^{-\lambda} \end{array}\right.$$

donc

$$P(X=k) \simeq 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1} \simeq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \;;\; k \in \mathbb{N}$$

donc $B(n,p) \simeq \mathcal{P}_o(\lambda)$

N-B: En pratique, on peut faire l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson si:

$n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1 = 10\%$.

2°/ $n = 200$, $p = 0{,}02$, $X = \{$Nbre de pièces défectueuses du lot$\}$.

a/ La loi exacte de X.

une pièce peut être soit défectueuse ou non défectueuse $\Rightarrow$ la loi exacte de X est la répétition de $n=200$ fois la loi de Bernoulli que suit une pièce $\Rightarrow$

$X \sim B(n,p) = B(200, 0{,}02) \Rightarrow$

$$P(X=k) = C_{200}^{k} \cdot (0{,}02)^k \, (0{,}98)^{200-k} \; ; 0 \leq k \leq 200.$$

a-1/ $$P(X=5) = C_{200}^{5} \cdot (0{,}02)^5 \cdot (0{,}98)^{195}$$

$$= \frac{200 \times 199 \times 198 \times 197 \times 196}{5!} \cdot (0{,}02)^5 \cdot (0{,}98)^{195}$$

$=$

a-2/ $$P(X \leq 5) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=5)$$

$$= (0{,}98) + \cdots\cdots + C_{200}^{5} (0{,}02)^5 \cdot (0{,}98)^{195}$$

$=$

b) Oui, on peut approximer la loi exacte de X : $X \sim B(200, 0{,}02)$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n.p = 200 \times 0{,}02 = 4$ car on a : $n = 200 \geq 30$ et $p = 0{,}02 \leq 0{,}1$

$\Rightarrow B(200, 0{,}02) \simeq P_o(4) \Rightarrow$

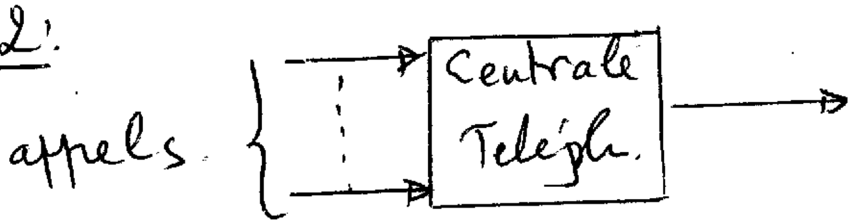
$$P(X=k) \simeq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}.$$

b-1) $P(X=5) \simeq e^{-4} \cdot \frac{4^5}{5!} =$

b-2) $P(X \leq 5) \simeq \sum_{k=0}^{5} P(X=k)$

$$\simeq e^{-4}\left(1 + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \cdots + \frac{4^5}{5!}\right) =$$

<u>Exo 2</u> :



$X = \{$ Nombre d'appels pendant un $\underbrace{\text{intervalle de temps}}_{T}$ $\}$

$E(X) = 300$ si $T = 60$ min.

Soit $X \sim P_o(\lambda) \Rightarrow P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}$.

On sait que si $X \sim P_o(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 300 \longrightarrow T = 60 \text{ min.} \\ \lambda = ? \longrightarrow T = 2 \text{ min} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{300 \times 2}{60} = 10$$

donc $P(X=k) = e^{-10} \cdot \frac{(10)^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}$.

a) $\mathcal{P}(X=3) = e^{-10} \cdot \frac{10^3}{3!} =$

b) $\mathcal{P}(X \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(X<1) = 1 - \mathcal{P}(X=0)$

$= 1 - e^{-10} =$

c) $\mathcal{P}(X \leq 2) = \mathcal{P}(X=0) + \mathcal{P}(X=1) + \mathcal{P}(X=2)$

$= e^{-10}\left(1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!}\right) =$

Exo3 :

Rappel sur le produit de convolution (ou convolution) dans le cas de 2 variable aléatoires indépendantes discrètes (VAID) X et Y.

$$\mathcal{P}(X+Y=n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathcal{P}(X=n-k) \cdot \mathcal{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} \mathcal{P}(X=k) \cdot \mathcal{P}(Y=n-k)$$

(Produit de conv est commutatif).

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{P}_o(\lambda) \\ Y \sim \mathcal{P}_o(\beta) \end{array}\right\} \rightarrow (X+Y) \sim \, ?$$

on a :

$X \sim \mathcal{P}_o(\lambda) \Rightarrow \mathcal{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$; $k \in \mathbb{N}$.

$Y \sim \mathcal{P}_o(\beta) \Rightarrow \mathcal{P}(Y=k) = e^{-\beta} \cdot \frac{\beta^k}{k!}$; $k \in \mathbb{N}$.

NB les V-A de Poisson sont indépendantes.

on a:

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) . \mathbb{P}(Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-\lambda} . \frac{\lambda^k}{k!}\right)\left(e^{-\beta} . \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$= e^{-(\lambda+\beta)} . \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} \lambda^k . \beta^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\beta)}}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{C_n^k} . \lambda^k . \beta^{n-k}}_{(\lambda+\beta)^n \text{ (Formule du binôme de Newton)}}$$

donc:

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = e^{-(\lambda+\beta)} . \frac{(\lambda+\beta)^n}{n!} ; n \in \mathbb{N}$$

donc $(X+Y) \sim \mathcal{P}_0(\lambda+\beta)$

Exo 4:

$T \sim Exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ $\Rightarrow f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} ; & t \geq 0 \\ 0 , & t \leq 0 \end{cases}$

1°/ $\lambda = ?$ / $\mathbb{P}(T \leq 70) = 0,05$

on a ;

$$\mathbb{P}(T \leq 70) = \int_{-\infty}^{70} f(t)\,dt = \int_{0}^{70} \lambda\, e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \lambda \cdot \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{70} = (-1)\left[e^{-70\lambda} - 1\right)$$

$$= 1 - e^{-70\lambda} = 0{,}05 \Rightarrow e^{-70\lambda} = 0{,}95 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{\log 0{,}95}{70} = $$

2°/ $\mathbb{P}(T \geq 30) = ?$

$$\mathbb{P}(T \geq 30) = 1 - \mathbb{P}(T < 30)$$

$$= 1 - \int_0^{30} f(t)\,dt$$

$$= 1 - \lambda \cdot \int_0^{30} e^{-\lambda t}\,dt$$

$$=$$