

- Analyse non-archimédien I -

I. propriétés des corps normés. (Chapitre I)

Soit F un corps.

def 1: On dit que l'application $\|\cdot\| : F \rightarrow \mathbb{R}_+$ définit une norme sur F si :

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in F$
- ii) $\|x \cdot y\| = \|x\| \|y\|, \forall x, y \in F$
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x \in F, y \in F$

Remarque: Grâce à une certaine isométrie, on peut parler des entiers naturels comme éléments de F etc

On note $\underbrace{1_F + 1_F + \dots + 1_F}_{n \text{ fois}} = n$

proposition 1: Soit F un corps, $x, y \in F$, $\|\cdot\|$ une norme sur F

On a :

- a) $\|1_F\| = \|-1_F\| = 1_{\mathbb{R}}$

b) $\|x\| = \|-x\|, \forall x \in F$ c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

d) $\left\| \frac{x}{y} \right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}, \forall x, y \in F$

preuve: a) On a $\|1_F\| = \|1_F \cdot 1_F\| = \|1_F\| \cdot \|1_F\| = \|1_F\|^2$

d'où $\|1_F\| = 1_{\mathbb{R}}$ (comme solution réelle de $t = t^2$)

b) On a d'après a) : $1 = \|1_F\| = \|-1_F \cdot 1_F\| = \|-1_F\|^2$

d'où $\|-1_F\|^2 = 1$ comme solution positive de $1 = t^2$

b) On a $\|-x\| = \|-1_F \cdot x\| = \|-1_F\|_F \cdot \|x\| = \|x\|, \forall x \in F$

c) Valable dans un espace normé quelconque (exercice)

d) On a $\|x \cdot y\| = \|x \cdot \frac{1}{y}\| = \|x\| \cdot \left\| \frac{1}{y} \right\|$ (d'après la def 1)

Montrons que $\left\| \frac{1}{y} \right\| = \frac{1}{\|y\|}$.

En effet, on a $\|y \cdot y^{-1}\| = \|1_F\| = 1$

D'autre part, $1 = \|y \cdot y^{-1}\| = \|y\| \cdot \|y^{-1}\| = \|y\| \cdot \left\| \frac{1}{y} \right\|$.

D'où $\left\| \frac{1}{y} \right\| = \frac{1}{\|y\|}$

par conséquent $\left\| \frac{x}{y} \right\| = \|x\| \cdot \left\| \frac{1}{y} \right\| = \|x\| \cdot \frac{1}{\|y\|} = \frac{\|x\|}{\|y\|}$.

def 2 (Normes équivalentes sur un corps)

Soit F un corps, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur F . On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si ; $\forall (a_n) \subset F, a_n \in F$,

$$\text{On a : } a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} a \iff a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} a$$

Req : Tout corps est un espace vectoriel sur lui-même
(Exercice 1)

par conséquent, on garde les mêmes définitions d'une suite de Cauchy, d'une suite bornée ou d'une suite

convergente i.e $a_n - a_m \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0, \|a_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$
(Vas a) ou $a_n \rightarrow a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

proposition 2 Soit $(F, \|\cdot\|)$ un corps normé. On a

$$(\|x\| < 1) \iff (x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$$

preuve : $\Rightarrow$ $\|x\| < 1 \implies \|x\|^n < 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ~~$\|x\|^n = \|x\|^n \implies \|x^n\| < 1$~~

et comme $\|x\|^n = \|x^n\|, \forall n \in \mathbb{N}$ (exercice)

On obtient $\|x^n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Leftarrow$ Inversement, par la contraposée, il suffit de prouver que $\|x\| \geq 1 \implies x^n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

En effet ; $\|x\| \geq 1 \implies \|x\|^n \geq 1$ et $\|x\|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Comme $\|x^n\| = \|x\|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $x^n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

proposition 3 : Soit F un corps, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes définies sur F , on a

$$i) \quad \|x\|_1 < 1 \iff \|x\|_2 < 1, \quad \forall x \in F$$

$$ii) \quad \|x\|_1 = 1 \iff \|x\|_2 = 1, \quad \forall x \in F$$

$$iii) \quad \|x\|_1 > 1 \iff \|x\|_2 > 1, \quad \forall x \in F$$

preuve i) $\Rightarrow$ par la négation, on suppose que $\|x\|_1 < 1$ et $\|x\|_2 \geq 1$. On a :

$$\|x\|_1 < 1 \iff x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En même temps, on a $\|x\|_1 \geq \frac{1}{2} \|x\|_2 \iff x^n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$

(Ceci d'après la proposition 2)

D'où la contradiction avec l'équivalence des 2 norms.

Exercice 3 Montrer les propriétés ii) et iii)

Théorème 1: Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux norms définies sur le même corps F , on a

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$

tel que $\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha, \forall x \in F$.

preuve $\Rightarrow$ Ex 2) On montre facilement que si $\|\cdot\|_1$ est triviale et $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, alors $\|\cdot\|_2$ est aussi triviale par conséquent, on a $\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha, \forall x \in F$ (Ex 4)

Si $\|\cdot\|_1$ n'est pas triviale, il existe nécessairement $a \in F$ tq $\|a\|_1 < 1$ (Sinon, on prend $1/a$). posons $\alpha = \frac{\log \|a\|_2}{\log \|a\|_1}$ et montrons que α vérifie la condition du th.

i) Si $\|x\|_1 < 1$, on note $S' = \{r = \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, \|x\|_1^r < \|a\|_1\}$

Donc, on a $\|x\|_1^m < \|a\|_1^n, \forall r \in S'$, par suite

$\|\frac{x^m}{a^n}\|_1 < 1$. D'où, d'après la proposition, on a $\|\frac{x^m}{a^n}\|_2 \leq 1$

ou bien $\|x^m\|_2 < \|a^n\|_2$. D'où, on a $\|x\|_2^n < \|a\|_2$

par conséquent, on a $S' = \{r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*; \|x\|_2^n < \|a\|_2\}$

En introduisant $\log$, on obtient:

$S' = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \frac{\log \|a\|_2}{\log \|x\|_1}\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \frac{\log \|a\|_2}{\log \|x\|_2}\}$

D'où, on a $\frac{\log \|a\|_2}{\log \|x\|_1} = \frac{\log \|a\|_2}{\log \|x\|_2}$ ou bien $\frac{\log \|a\|_2}{\log \|a\|_1} = \frac{\log \|x\|_2}{\log \|x\|_1}$

En prenant $\alpha = \frac{\log \|a\|_2}{\log \|a\|_1}$, on a $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha$.

ii) (Ex 5): Si $\|x\|_1 \geq 1$, montrer qu'en prenant $\alpha = 1/n$

on obtient le résultat $\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha$ (Exercice)

- Déduire le résultat lorsque $\|x\|_1 = 1$

- Exercice 6) Montrer que si il existe $\alpha > 0$ tq $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha, \forall x \in F$, alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (i.e. équivalents)
- Exercice 7 Soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels et $|\cdot|$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$. Montrer que la relation; $\|x\| = |x|^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q}$, définit une norme sur $\mathbb{Q}$ ssi $0 < \alpha < 1$. Déduire les normes équivalentes à $|\cdot|$ sur $\mathbb{Q}$.
- Indications pour les exercices
- Exo 1: Il suffit de vérifier la Condition d'un espace vectoriel E qui est toujours défini sur un corps K (dans notre cas, on prend $E = K = F$)
- Exo 2: En vertu de la deuxième Condition de la définit. d'une norme sur Corps, i.e. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$
- Exo 3: De la même façon pour i)
- Exo 4: On applique la définition d'une norme (triviale) grossière, i.e. $\|x\| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$
- Exo 5: Si $\|x\| > 1$, On applique le résultat du premier cas à $x' = 1/x$ pour obtenir le même résultat.
- Exo 6 Application immédiate de la définition de l'équivalence des normes sur un corps.
- Exo 7 $\Rightarrow$ On vérifie la condition de la norme si $\alpha < 1$
 $\Leftarrow$ On montre, par contre exemple, que si $\alpha > 1$, alors $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha$ n'est pas une norme (voir l'inégalité triangulaire)
- On applique le th. 1 à $F = \mathbb{Q}$ pour déduire les normes équivalentes à $|\cdot| = |\cdot|_0$ sur $\mathbb{Q}$.

Chapitre 2. 1. Norme non archimédienne sur un corps

définition : On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ (ou valeur absolue) est non archimédienne sur le corps F si elle vérifie l'inégalité triangulaire forte, i.e

$$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|), \quad \forall x, y \in F.$$

(On la note I.T.F.)

Remarque : la distance induite par une norme non-archimédienne est dite distance ultramétrique.

Théorème : (Caractéristique des normes non archimédiennes)
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le corps F .

On a l'équivalence entre

- i) $\|\cdot\|$ est non archimédienne
- ii) $\|n\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (i.e $\mathbb{N}$ est borné)

preuve : i) $\xrightarrow{?}$ ii) : par récurrence, on a

*) pour $n=1$, on a $\|1\| = 1 \leq 1$

*) on suppose que $\|n\| \leq 1$ et on doit montrer que $\|n+1\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

En effet : on a $\|n+1\| \leq \max(\|n\|, \|1\|)$ (car $\|\cdot\|$ est non arch.)

Donc $\|n+1\| \leq \max(1, 1) = 1$

ii) $\Rightarrow$ i) : Comme $\|\cdot\|$ est une norme par hypothèse, il suffit de prouver que l'I.T.F. i.e $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$

$$\begin{aligned} \text{En effet, on a } \|x+y\|^n &= \|(x+y)^n\| = \left\| \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \|C_n^k\| \cdot \|x\|^k \cdot \|y\|^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n 1 \cdot \|x\|^k \cdot \|y\|^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n (\max(\|x\|, \|y\|))^n = (n+1) \cdot \max(\|x\|, \|y\|)^n \end{aligned}$$

Donc $\|x+y\| \leq (n+1)^{1/n} \max(\|x\|, \|y\|)$.

par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$, car $(n+1)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Exercice Montrer que cette caractéristique peut être étendue à $\mathbb{Z}$, i.e. $\|n\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

définition (la propriété archimédienne)

On dit que la norme $\|\cdot\|$ définie sur le corps F est archimédienne si $\forall x \in F^*, \forall y \in F, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|y\| \leq \|n \cdot x\|$$

Exercice Montrer que si la norme $\|\cdot\|$ est archimédienne sur le corps F , alors $\mathbb{N}$ est non borné selon cette norme (i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|n\|\} = +\infty$)

Remarque : si la norme $\|\cdot\|$ est non archimédienne, on dit que F est un corps non archimédien (ou ultramétrique si on parle de l'espace métrique)

proposition : Soit a et x deux éléments d'un corps non archimédien F . On a

$$\|x - a\| < \|a\| \implies \|x\| = \|a\|.$$

preuve On montre que $\|x\| \leq \|a\|$ et $\|a\| \leq \|x\|$

Comme $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \max(\|x - a\|, \|a\|) = \|a\|$

car $\|x - a\| < \|a\|$ par hypothèse. Donc, on a $\|x\| \leq \|a\|$

De même $\|a\| = \|a - x + x\| \leq \max(\|a - x\|, \|x\|) = \|x\|$

car sinon, on aurait $\|a\| < \|a - x\|$ (contradiction)

Enfin, on a $\|x\| = \|a\|$

Exercice : Montrer que dans un corps ultramétrique (ou non archimédien) : tous les triangles sont isocèles

Exercice Montrer qu'une norme archimédienne n'est jamais équivalente à une norme non archimédienne sur le corps F .

Dans la suite, on va étudier une norme non archimédienne sur $\mathbb{Q}$

2. la norme p -adique sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

Def (de la valuation p -adique d'un nombre $n \in \mathbb{Q}$)

Soit $p \geq 2$ un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$. On définit la valuation p -adique de n , qu'on note $v_p(n)$, comme étant le plus grand entier naturel α tel que p^α divise n , i.e. : $n = p^\alpha \cdot n_1$ et p ne divise pas n_1 par définition on a aussi : si $n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$, alors $v_p(n) = v_p(a) - v_p(b)$ ou $a, b \in \mathbb{N}^+$ et par convention, on a $v_p(0) = \infty$, car 0 est divisible par p^α , $\forall \alpha \in \mathbb{N}$.

Exemples

i) si $n = 2 + p^3 + 2p^4 + \dots$ ou $p \geq 3$, alors $v_p(n) = 0$

ii) si $n = p^4 + 2p^7 + \dots$ ou $p \geq 2$, $v_p(n) = 4$

Proposition : on a : $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

i) $v_p(1) = 0$, $\forall p$ -premier

ii) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$

iii) $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.

Preuve i) $1 = p^0$, $\forall p \Rightarrow v_p(1) = 0$

ii) on pose $a = p^\alpha (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$, $a_0 \neq 0$
 $b = p^\beta (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots)$, $b_0 \neq 0$

D'où $a \cdot b = p^{\alpha+\beta} (n_1 \cdot n_2)$ ou p ne divise pas $n_1 \cdot n_2$, car $p \nmid n_1$ et $p \nmid n_2$. Donc $v_p(a \cdot b) = \alpha + \beta$

iii) on suppose que $\alpha \leq \beta$. On a

$a + b = p^\alpha (n_1 + p^{\beta-\alpha} n_2)$. D'où

$v_p(a+b) \geq \alpha = \min(v_p(a), v_p(b))$.

Exercice : Montrer que les propriétés i), ii) et iii) peuvent

être généralisée à $\mathbb{Q}$.

Remarque: Notre objectif est de définir la valeur absolue (ou la norme) p -adique et Comme $\|n\| = \|-n\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, On se contente de prendre les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ au lieu de prendre $n \in \mathbb{Z}$.

définition (de la norme p -adique)

Soit p un nombre premier ($p \geq 2$). On définit l'application $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ Comme suit

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Remarque: $|\cdot|_p$ prend ses valeurs dans $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$

Exercice Montrer que si a et $b \in \mathbb{N}$, alors on a

$$a \equiv b \pmod{p^n} \iff |a - b|_p \leq 1/p^n$$

proposition l'application $|\cdot|_p$ définie plus haut (dans $(*)$) définit une norme non archimédienne sur $\mathbb{Q}$ appelée norme p -adique sur $\mathbb{Q}$

preuve (Exercice): Il suffit de démontrer les trois conditions de la norme non archimédienne.

Remarque: L'espace norme $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ n'est pas complet car il existe des suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes

Exercice trouver un exemple concret d'une suite de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ qui n'est pas convergente.

Définition: le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ est notée $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ et appelé corps des nombres p -adiques

Exercice: Montrer que $|\cdot|_p$ n'est jamais équivalente à $|\cdot|_{p_2}$ si $p_1 \neq p_2$ ou $p_1 = p_2$ sont des nombres premiers

3. Normes et distances sur $\mathbb{Q}$

Soit $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ (qui est une norme sur $\mathbb{Q}$) et $|\cdot|_p$ la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ où p est premier

Théorème (d'Ostrowski): toute norme non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|\cdot|_\infty$ soit à $|\cdot|_p$ pour un certain nombre premier p . (sans démonstration)

propriétés du produit des normes dans $\mathbb{Q}$

théorème: on a $\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p = \infty}} |x|_p = 1, \forall x \in \mathbb{Q}^*$

preuve: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$ où p_i - premier et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Il est clair que $|n|_\infty = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$ et $|n|_p = p_i^{-\alpha_i}, i \in \{1, \dots, m\}$

on a aussi $|n|_p = 0$ si $p \in \{p_1, \dots, p_m\}$

D'où $\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p = \infty}} |n|_p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} = 1$

a) Si $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $n = -n'$ ou $n' \in \mathbb{N}^*$. par conséquent $|n|_p = |n'|_p$

b) Si $x \in \mathbb{Q}^*$, on a $x = \frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}^*$ et comme $|x|_p = \frac{|n|_p}{|m|_p}$, on

$$\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p = \infty}} |x|_p = \prod_p |n|_p / \prod_p |m|_p = \frac{1}{1} = 1.$$

4. propriétés topologiques et analytiques des $\mathbb{Q}$ (espaces) corps non archimédiens

4.1 propriétés topologiques

propriété 1: la sphère $S_r(a) = \{x \in F; \|x - a\| = r\}$

est un ensemble ouvert et fermé (en même temps) dans le corps (ou l'espace vectoriel) non archimédien F .

preuve: $S_r'(a)$ est un ensemble ouvert?

on a $S_r'(a)$ ouvert $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in B_\varepsilon(x) \subset S_r'(a)$
 $\forall x \in S_r'(a)$

Soit $\varepsilon < r$ et $y \in B_\varepsilon(x)$, on a:

$$\|x - y\| < \varepsilon < r = \|x - a\|$$

D'où $\|(x - a) - (y - a)\| < \|x - a\|$. D'après la propriété des triangles isocèles, on a $\|x - a\| = \|y - a\| = r$

par conséquent $y \in S_r'(a)$ et $B_\varepsilon(x) \subset S_r'(a)$

on bien $S_r'(a)$ est un ensemble ouvert

$S_r'(a)$ est fermé d'après la théorie générale de espace normés (ou métrique)

propriété 2 toute boule ouverte $B_r(a)$ est 1 ensemble fermé dans le corps non archimédien ($F, \|\cdot\|$)

preuve on a $C_F^{B_r(a)} = S_r'(a) \cup \{x \in F, \|x - a\| > r\}$
 $C = C_1 \cup C_2$

Comme $S_r'(a)$ est (fermé) un ensemble fermé

(d'après P_2), C_1 et C_2 est ouvert (Comme

Complémentaire de $B_r(a)$), on a C est ouvert

par conséquent $B_r(a)$ est fermé

Propriété de P_2 , on déduit $B_r(a)$ est 1 ensemble ouvert et fermé, à la fois, dans 1 Corps non archimédien

propriété 3: Montrer que $\bar{B}_r(a)$ est 1 ensemble ouvert et fermé