

Chapitre premier

1. Dérivabilité et différentiabilité

Soit $w = f(z)$ une fonction à variable complexe.
Definition 1 : on dit que $f(z)$ est dérivable au point $z_0 \in \mathbb{C}$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et finie.

cette limite s'appelle dérivée de f au point z_0 .

Exemple $f(z) = |z| \cdot z$, on a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z| \cdot z - 0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0 \quad \text{donc } f'(0) = 0$$

Differentiabilité on pose $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ qui est la variation de f . De même, on pose $\Delta z = z - z_0$ (la variation de la variable libre z)

Definition 2 on dit que $w = f(z)$ est différentiable au point $z_0 \in \mathbb{C}$ si Δw peut s'écrire sous la forme $\Delta w = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \dots (1)$

où A ne dépend pas de Δz et $\varepsilon(z_0, \Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

proposition 1 la fonction $f(z)$ est différentiable au pt $z_0 \in \mathbb{C}$ ssi $f(z)$ est dérivable en ce point.

Preuve diffble $\Rightarrow$ dérble ?

f diffble au point $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$ la relation (1) est vraie. par passage à la limite dans (1) quand $\Delta z \rightarrow 0$ on obtient (A proposition divisée par Δz).

l'équation $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(z_0, \Delta z) = A$$

$$\text{donc } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A$$

Une fct dérivable et on a $f'(z_0) = A$

dérivable $\Rightarrow$ diffble ?

$f(z)$ dérivable au point $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = A$

$\Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A$, cette égalité nous permet
d'écrire $\frac{\Delta w}{\Delta z} = A + \varepsilon(z_0, \Delta z)$, où $\varepsilon(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ as $\Delta z \rightarrow 0$

ou bien $\Delta w = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$, où $\varepsilon(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ as $\Delta z \rightarrow 0$

*) $dw = f'(z_0) dz$ est appelé différentielle de f au point z_0 .

Remarque : toutes les règles de dérivation d'une fonction à variable réelle restent valables pour la fonction à variable complexe.

par exemple 1) Si $f(z) = c$, alors $\frac{df(z)}{dz} = 0$

2) $[f_1(z) + f_2(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z)$

3) $[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$

• Exercice : Montrer que $f(z) = \operatorname{Re} z$ n'est
diffble en aucun point $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. les conditions nécessaires et suffisantes de
diffbilité (Condition de Cauchy - Riemann)

2.1 diffbilité d'une fonction réelle à deux variables

Soit $\psi(x, y)$ une fct ^{réelle} réelle à variable réelle

$$\Delta \psi = \psi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \psi(x_0, y_0)$$

est la variation de ψ au point (x_0, y_0)

Définition 3 : on dit que $\varphi(x, y)$ est diffble au pt (x_0, y_0) si $\Delta\varphi$ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta\varphi = A_1 \cdot \Delta x + A_2 \cdot \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$$

où A_1 et A_2 dépendent uniquement de x_0 et y_0
et $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$, $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$

On note que $A_1 = \varphi'_x(x_0, y_0)$, $A_2 = \varphi'_y(x_0, y_0)$

on a le théorème (important) suivant

Théorème 1 : Soit $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = w$
une fonction à variable complexe et $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$

on a l'équivalence des deux conditions

- i) $f(z)$ est diffble au point $z_0 = x_0 + i y_0$
- ii) les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont diffbles au point (x_0, y_0) et vérifient l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots (2)$$

les équations sont appelées les équations (ou les conditions) de Cauchy-Riemann

Dans le cas où les conditions de ce théorème sont vérifiées $f'(z)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= (a + ib) \end{aligned}$$

preuve la nécessité des conditions de Riemann

Supposons que $w = f(z)$ est diffble au pt z_0 . on a alors

$$\Delta w = f'(z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \dots \dots (*)$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}\Delta z &= z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i \Delta y \\ \Delta w &= f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0) + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]] \\ &= \Delta u + i \Delta v\end{aligned}$$

$$f'(z_0) = a + ib, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n(x, y)$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$

En remplaçant dans (*) et en séparant partie réelle et imaginaire, on obtient

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$$

Comme $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ qd $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, on a

*) $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont diffbles au point (x_0, y_0)

**) On remarque que
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b \end{cases}$$

$$\text{D'où } f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} \dots$$

*) la suffisance des conditions de Cauchy-Riemann :

supposons que les conditions du th. sont vérifiées, i.e. $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont diffbles et remplissent les conditions de Cauchy-Riemann, on a alors

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \dots (3)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et $\beta_2 \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$ qd $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$

$$\text{Si on met } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a \wedge -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$$

on obtient (3) sous la forme :

$$\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y$$

par conséquent $\Delta w = \Delta u + i \Delta v = \Delta z$

$$\Delta w = a(\Delta x + i \Delta y) + i b(\Delta x + i \Delta y) + (\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y$$

$$\Delta w = (a + i b) \Delta z + \left\{ (\alpha_1 + i \beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i \beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right\} \Delta z$$

$$\Delta w = A \Delta z + \varepsilon \Delta z \text{ où}$$

$$|\varepsilon| = \left| (\alpha_1 + i \beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i \beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2|$$

Donc, on a $\varepsilon \rightarrow 0$ qd $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ($\Leftrightarrow \Delta z \rightarrow 0$)

par conséquent, on a $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A = a + i b$

Donc f est diffble au pt $z_0 = x_0 + i y_0$ et

$$\text{on a } f'(z_0) = \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = \frac{u}{x} - i \frac{u}{y} =$$

*) on sait d'après le cours d'analyse que si $\frac{u}{x}$ et $\frac{u}{y}$ existent et sont continues, alors $u(x, y)$ est diffble au point (x_0, y_0) . par conséquent si $\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{v}{x}$ et $\frac{v}{y}$ existent, continues et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, alors $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ est diffble.

Exemple: Soit $w = f(z) = z^2 = (x + i y)^2$, on a $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$

$$\frac{u}{x} = 2x, \frac{u}{y} = -2y, \frac{v}{x} = 2y, \frac{v}{y} = 2x$$

Donc les dérivées partielles existent et sont continues

$$\text{et } \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = 2x, \frac{u}{y} = -\frac{v}{x} = -2y$$

d'où f est diffble en tout point $z = x + i y$ et on a

$$f'(z) = \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = 2x + i 2y = 2(x + i y) = 2z$$

* on peut retrouver le même résultat en calculant $L \cdot \frac{\Delta w}{\Delta z}$ comme pour $f(z) = z^2$ pour trouver $f'(3) = 6$
 Vérifier que $(\Delta w = f(3 + \Delta z) - f(3))$

Définition Fonction analytique en un pt

- On dit que la fonction $f(z)$ est analytique (ou holomorphe) au pt $z_0 \in \mathbb{C}$, si elle est diffble en tout point d'un certain voisinage V de z_0 .
- Il est clair de la définition que si f est analytique en 1 point z_0 , alors f est nécessairement analytique en tout point d'un certain voisinage de z_0 .
- ? A partir de la ^{dernière} remarque, on déduit que l'ensemble d'analyticité de $f(z)$ est toujours un ensemble ouvert.

Définition: On dit que f est analytique sur l'ensemble D si f est analytique en tout point $z \in D$.

Exemple: soit $f(z) = z^n$,
 donc f est dérivable en tout pt $z \in \mathbb{C}$. Elle est donc diffble en tout point $z \in \mathbb{C}$ (partout diffble)
 d'où l'ensemble d'analyticité de $f(z) = z^n$ est $\mathbb{C}$ tout entier.

Définition une fct $f(z)$ qui est analytique dans tout $\mathbb{C}$ est appelée fonction entière.

Exemple: 1) $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}^*$ est entière
 2) $P(z)$ - polynôme de degré n est 1 fct entière.
 3) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes est 1 fct analytique sur $\mathbb{C}$ sauf en z tel que $Q(z) = 0$.

sur tout $\mathbb{C}$ sauf au pt z_0 q $f(z) = 0$
Exercice: 1) Etudier la différentiabilité et (C-R)

- i) l'analyticité de $f(z) = z|z|$ en tout point $z \in \mathbb{C}$.
ii) Montrer que $f(z) = e^z$ est une fonction entière
calculer $f'(z)$ à partir des conditions de Cauchy
Riemann iii) $f(z) = \bar{z}$ n'est diffble en aucun pt?

Partie réelle et partie imaginaire d'une fct analytique

On verra plus tard qu'une fonction analytique sur
un domaine D est infinitement diffble sur ce domaine.

$$(\text{car } f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n)$$

puisque. Conséquemment, la partie réelle $u(x, y)$ et la
partie imaginaire $v(x, y)$ d'une fct anal. sur D , sont
infinitement diffbles (car $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}$)

- Soit donc, $f(z) = u + iv$ une fct analyt sur D .

u et v vérifient alors les conditions C-R

$$*) \dots \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \dots (**)$$

en dérivant (*) / x et ** / y et en tenant compte
de l'équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

On obtient l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \dots (1)$

On obtient la même équation pour $v(x, y)$. pour cel
il suffit de dériver (*) / y et ** / x et de
retrancher calculer (*) - (**), on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \dots (6)$$

Définition: l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

est appelée l'équation de Laplace

- la fonction $\varphi(x, y)$ qui vérifie l'équation de Laplace est dite fonction harmonique

Conséquence 2 A partir de (5) et (6), on déduit que la partie réelle $u(x, y)$ et la partie imaginaire $v(x, y)$ d'une fonction $f(z)$, qui est analytique sur D , sont des fonctions harmoniques sur D .

Exemple $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$ est 1^{ère} et 2^{ème} entiers, par conséquent $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$ sont des fct harmoniques sur tout $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Trouver l'ensemble de points où $f(z)$ est analytique ou diffble

i) $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$ ii) $e^z (\cos y - i \sin y)$

2) on pose $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z \neq 0$ et $w = f(z) = u(\rho, \varphi) + i v(\rho, \varphi)$. Montrer

i) f diffble $\Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ et } v \text{ diffbles} \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$

ii) si f est diffble, on peut écrire $f'(z)$ comme

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \text{ ou bien}$$

$$f'(z) = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)$$

Définition : Soit $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions harmoniques sur le domaine D . On dit que u et v sont conjuguées si elles vérifient

la condition de C-R : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Conséquence 3 : la partie réelle $u(x, y)$ et la partie

Imaginaire $v(x,y)$ d'une fonction $f(z)$ analytique sur D , sont deux fonctions harmoniques conjuguées (voir th. sur les conditions C-R)

Question: si $\psi(x,y)$ est une fct analytique harmonique sur D . Est-ce que $\psi(x,y)$ peut être la partie réelle (ou imaginaire) d'une fct analytique sur D (ou si D est simplement connexe).

Théorème: toute fonction $\psi(x,y)$ harmonique sur un domaine simplement connexe peut être la partie (imaginaire) (ou réelle) d'une fonction f analytique sur D (sans démonstration)

preuve: on pose $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ où

$$u(x,y) = \psi(x,y), \text{ on cherche } v(x,y)$$

d'après C-R; on a $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Il est clair que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$

Donc l'intégrale $\psi(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^x p dx + q dy$ est une

fonction u : $\frac{\partial u}{\partial x} = p = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Donc on a $v(x,y) = \psi(x,y) + c = \int p dx + q dy + c$

Exemple: Soit $u = \ln xy$. Montre que u est harmonique.

Exemple: Soit $D = \mathbb{C} - \{y=0, x \leq 0\}$

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Chapitre II Décomposition en série de Taylor

1. Rappel : sur les séries numériques à complexes
 soit $z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \dots (1)$
 on $z_k = x_k + i y_k$ - le terme général
 $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ - la somme partielle

Def 1 : On dit que la série (1) est cvte si la suite (S_n) est cvte, i.e. $S_n \rightarrow S'$

on a 2mc : i) $\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ CV} \Rightarrow z_k \rightarrow 0$

car $L z_n = L (S_n - S_{n-1}) = S' - S' = 0$

ii) $z_k = x_k + i y_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ CV dans } \mathbb{R}$

iii) Critère de Cauchy de cvte : Comme ① est de Bernoulli

on a : $(S_n) \text{ CV} \Leftrightarrow (S_n) \text{ de Cauchy} \Leftrightarrow |S_{n+p}' - S_n'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Def 2 : on dit que $\sum z_k$ est absolument cvte si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ est cvte (dans $\mathbb{R}$)

Prop : i) Il est clair que la cvte abs $\Rightarrow$ la cvte car
 on a $|S_{n+p}' - S_n'| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k|$

ii) pour étudier la cvte abs. de série Compl, on applique les techniques des séries réelles à termes positifs (ou négatifs) par exemple

a) Critère de D'Alembert :

si $L \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq q > 1 \Rightarrow \sum |z_n|$ et $\sum z_n$ diverge car $z_n \not\rightarrow 0$
 $L \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1 \Rightarrow \sum |z_n|$

b) Critère de Cauchy

si $L \sqrt[n]{|z_n|} \geq q > 1 \Rightarrow \sum |z_n|$ div et $\sum z_n$ div car $z_n \not\rightarrow 0$
 $L \sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1 \Rightarrow \sum |z_n| \text{ CV} \Rightarrow \sum z_n \text{ CV}$

2. Séries de fonctions (complexes)

Soit $f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_1 f_k(z) \dots (2)$
 où $f_k(z)$ est une fonction anal. sur D

Déf 3 : Le domaine de cvc de (2) est l'ensemble des pt z
 où la série (2) cvge. on note dans ce cas

$$S'(z) = \sum_1^{\infty} f_k(z) \text{ - la somme (somme)}$$

$$R_n(z) = S'(z) - S'_n(z) \text{ - le reste d'ordre } n$$

Déf 4 (CvC uniforme) : on suppose que la série (2)
 est cvte et que $S'(z) = \sum_1^{\infty} f_k(z)$. on dit que (2) est
 uniformement cvte sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon), \forall n \geq N_0 : |S'_n(z) - S'(z)| < \varepsilon, \forall z \in D$$

- Rq la C.U. $\Rightarrow$ la C.S (ou la cvc ponctuelle)
 (L'inverse n'est pas toujours vrai)

th1 : Critère de Weierstrass de la C.U.

si on a : i) $|f_k(z)| \leq a_k, \forall z \in D, (k \geq N_0)$

ii) $\sum a_k$ cvge

alors $\sum f_k(z)$ C.U. sur D .

la justification est directe à partir de la cvc
 de $\sum a_k$ qui ne dépend pas de z

$$\sum a_n \text{ cvge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall p > 0, \sum_{n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| < \varepsilon, \forall z \in D, \forall n \geq N_0$$

th2 : Soit la série $\sum_1 f_k(z)$

soit les $f_k(z)$ sont des fonctions anal. (ou contin.)

sur D , et si la série $\sum_1 f_k(z)$ cvge unif. sur D , alors

$S'(z)$ est 1 fct conti sur D

preuve : soit $z_0 \in D$, on a

$$|S'(z) - S'(z_0)| = |S'(z) - S'_k(z) + S'_k(z) - S'_k(z_0) + S'_k(z_0) - S'(z_0)| \\ \leq |S'_k(z) - S'(z)| + |S'_k(z) - S'_k(z_0)| + |S'_k(z_0) - S'(z_0)| \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

th3 : si les conditions du th2 sont vérifiées, alors on a $\int_{\Gamma} S'(z) dz = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z) dz$

où Γ est une courbe contenue dans D .

(c.a.d on peut intégrer sous le signe $\sum$)

preuve : $\int S'(z) dz$ existe, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur cette courbe (th.2)

$$\text{Soit } \sigma_n = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} f_k(z) dz = \int_{\Gamma} S'_n(z) dz = \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n f_k(z) dz$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} f_k(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_{\Gamma} S'(z) dz$$

Comme $S'_n(z)$ cvge unif vers $S'(z)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) : \forall n \geq N_0 : |S'_n(z) - S'(z)| < \varepsilon, \forall z \in D$$

Donc pour $n \geq N_0$, on a

$$\left| \int_{\Gamma} S'_n(z) dz - \sigma_n \right| = \left| \int_{\Gamma} (S'(z) - S'_n(z)) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |S'_n(z) - S'(z)| |dz| < \varepsilon \int_{\Gamma} |dz| = \varepsilon \cdot l = \varepsilon$$

th4 : (th de Weierstrass) : si $f_k(z)$ sont anal. sur D et $\sum f_k(z)$ cvge unif vers $S'(z)$ sur D , alors $S'(z)$ est 1 fct analytique sur D . De plus, on peut dériver : sous le signe $\sum$. c.a.d

$$S^{(n)}(z) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

preuve : pour démontrer que $S'(z)$ est analytique sur D , il suffit de prendre un pt $z_0 \in D$ et démontrer que f est diffble sur 1 voisinage de z_0 .

Par conséquent, il suffit de montrer que $S'(z)$ peut s'écrire sous la forme de l'intégrale de Cauchy dans un voisinage de z_0 , i.e

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S'(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad \dots \quad (1) \quad \text{avec } \xi \in \Gamma(z_0)$$

Car, "On sait que si $S(\xi)$ est continue, alors a priori de (1) on a: $S'(z)$ est infiniment diffble, et on a

$$S^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S'(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad \dots \quad (2)$$

preuve

Soit donc $z_0 \in D$. On choisit $\delta > 0$ de telle façon que $\Gamma: |z - z_0| = 2\delta$ et $B: |z - z_0| < \delta$ soient contenus dans D .

Montrons que $S'(z)$ est diffble sur le voisinage $V: |z - z_0| < \delta$ de z_0 .

On a

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{S'(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi)}{\xi - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\xi)}{2\pi i (\xi - z)}$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi)$ Cvgc unif sur Γ et

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{|\xi - z|} < \frac{1}{2\delta\delta}, \text{ on obtient que la série (2) Cvgc uniforme sur } \Gamma. \text{ d'où d'après le th 3}$$

on peut intégrer sous le signe $\sum$, i.e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S'(\xi) d\xi}{\xi - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi) d\xi}{\xi - z} \stackrel{\text{th 3}}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\xi) d\xi}{\xi - z} = \end{aligned}$$

$$= \sum_k f_k(z) = S'(z) \quad \text{Donc, on a}$$

$$S'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (2)$$

Comme $S'(\xi)$ est continue sur Γ , on obtient que $S'(z)$ est diffble en tout pt $z \in B(z_0, \delta)$. On a donc $S'(z)$ est analytique au pt z_0 . Comme z_0 est un pt $\forall$ de D , on obtient que $S'(z)$ est analytique sur D .

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

on voit, d'après la formule intégrale de Cauchy que

$$S^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

$$\stackrel{\text{C.U.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

$$\text{Donc, on a } S^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

Exercice 1: Étudier la CVA des séries numériques

ex: 1) $z_k = e^{ik}$ ($|e^{ik}| = 1 \neq i$) $z_k = \frac{\sin(ik)}{3^k}$ (C.A.)

Exercice 2: Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(z^k + \frac{1}{2^k z^k} \right) \text{ est abs. convte sur le secteur } \frac{1}{2} < |z| < 1$$

pour la sol: Voir la solution en annexe

ex 3: Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$

Série entière

Définition : une série entière, c'est une série de fcts
qm s'écrit sous la forme

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad (1)$$

on $a_k \in \mathbb{C}$ sont les coefficients

$z_0 \in \mathbb{C}$ est le centre de la série
pour étudier l'ensemble de CVC de
la série (1), on a besoin du th. suivant

théorème d'Abel : si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ est
cvt au pt $z_1 \neq z_0$, alors cette série cvc absol.
en tout pt z que vérif. $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ (ie
Hya cvc absol. sur la boule ouverte $B(z_0, R)$
où $R = |z_1 - z_0|$.

par contre : si la série (1) diverge au pt $z_2 \neq z_0$
alors cette série est divergente en tout pt z qui
vérif. $|z-z_0| > |z_2-z_0|$ (ie divergent
sur le complémentaire de la boule ferm. $B(z_0, R)$
où $R = |z_2 - z_0|$

Preuve :

premier cas : la série (1) cvc au pt $z_1 \Rightarrow$
 $|a_k(z_1-z_0)^k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \exists M > 0$ tq $|a_k||z_1-z_0|^k \leq M$

Maintenant si $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, on obtient

$$\text{que } |a_k(z-z_0)^k| = |a_k(z_1-z_0)^k| \cdot \left| \frac{(z-z_0)^k}{(z_1-z_0)^k} \right| \leq \\ \leq M \cdot q^k \quad \text{ou } q = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1 \quad -15-$$

2^{on} $\sum a_k (z - z_0)^k$ est absol. cvt - m

$$B(z_0, |z_2 - z_0| \dots)$$

Deuxième cas : Supposons que la série est

cvt au pt z où $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Donc, d'après le 1^{er} cas, on obtient que cette série cvt au pt z_2 (Contradiction).

Résultats : i) Certaines séries entières convergent unigt à leur centre exple. $\sum k! (z - z_0)^k$. D'après D'Alembert

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |(z - z_0) \cdot (k+1)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty > 1, \forall z \neq z_0$$

ii) D'autres séries entières convergent partout dans $\mathbb{C}$.

exple: $\sum \frac{(z - z_0)^k}{k!}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = (z - z_0) \cdot \frac{1}{(k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall z \in \mathbb{C}$

iii) la majorité des séries entières convergent en 1 pt $z = z_0$ (où $z \neq z_0$) et divergent en 1 pt $z \neq z_0$.

Exple: $\sum_0 (z - z_0)^{k^2}$ cvt au pt z , si $|z_2 - z_0| < 1$ et diverge au pt z_0 où $|z_2 - z_0| > 1$

IV) À partir du th. d'Abel, on déduit que le domaine de cvt d'une série entière $\sum a_k (z - z_0)^k$ est toujours une boule ouverte de centre z_0 et de rayon $R \geq 0$.

Définition : On appelle disque de convergence de la série entière $\sum a_k (z - z_0)^k$, la plus grande boule ouverte $B(z_0, R_0)$ sur laquelle cette série est cvt. R_0 est appelé Rayon de convergence de cette série.

Détermination de Rayon de cvt de la série $\sum a_k (z - z_0)^k$

par application du critère de Cauchy : on obtient que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)|} = |z - z_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R_0$$

- par application du Critère de D'Alembert,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k} \right| = (z-z_0) \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$|z-z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R_0$$

Exercice : Montrer que la série entière $\sum a_k(z-z_0)^k$ est :

- absolument cvte sur un disque de convergence
- absolument et unifte sur toute boule fermée $\bar{B}(z_0, \rho)$ où $\rho < R_0$.

Indic. i) Il suffit d'appliquer le théorème d'Abel :

on soit $z_1 \in B(z_0, R_0)$, $\exists z_0^* \in B(z_0, R_0) \cap \mathbb{R}$

$|z_1 - z_0| < |z_0^* - z_0| < R_0$. Comme la série est cvte au pt z_0^* ; d'après Abel, elle cvge abs. au pt z_1 et comme z_1 est $\forall$ on trouve que la série entière cvge abs. sur un disque de cvce.

ii)



on a pour $z \in \bar{B}(z_1, \rho)$:

$$|a_k(z-z_0)^k| < |a_k(z_1-z_0)^k|, \quad R_0 > |z_1 - z_0|$$

Exercice 2 i) Montrer que si la série $\sum a_k(z-z_0)^k$ est cvte, alors la fonction $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ est analytique sur le disque de convergence de cette série.

Ind. Soit $z_1 \in B(z_0, R_0)$, $S'(z_0) = \sum a_k(z_0-z_0)^{k-1}$ analyt. ?

Soit $\rho > 0$ tq $|z_1 - z_0| < \rho < R_0$. D'après l'ex 1, ii), on obtient que

$\sum a_k(z-z_0)^k$ cvge unifte sur $\bar{B}(z_1, \rho)$. Donc d'après Weierstrass

$S'(z)$ est analytique sur $\bar{B}(z_1, \rho)$, donc analyt. au pt z_1 .

Comme z_1 est $\forall$, $S'(z)$ est analyt. sur le disque de cvce.

ii)

Ind. d'après le th. de Weierstrass, on a la dérivation terme à terme (par sommation)

iii) Montrer que le rayon de cvce est le m. psm.

$$\sum a_k(z-z_0)^k \text{ est } \left(\sum a_k(z-z_0)^k \right)' = S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z-z_0)^{k-1}$$

Exercice Soit $B(z_0, R_0)$ le disque (ouvert) de la CVU de la série entière $\sum a_k (z - z_0)^k$. On pose $S'(z) = \sum a_k (z - z_0)^{k+1}$ en $z \in B(z_0, R_0)$. Montrer que pour tout $z \in B(z_0, R_0)$, on a $\int_{z_0}^z S'(t) dt = \sum a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{(k+1)}$
 ii) déduire que les deux séries ont le même Rayon de CVU (le même)

Exercice Trouver le rayon de CVU (d'après) de la série $\sum \frac{z^{3k}}{2^{k+1} \cdot k^2}$, ($R=2$, D'Alembert) ($|z| < 2$)

Exercice: Calculer la somme de $\sum k \cdot z^k$
Ind $R=1$ $|z| < 1 \Rightarrow \sum_0^\infty z^k = \frac{1}{1-z}$
 ou bien $(\sum_0^\infty z^k)' = (\frac{1}{1-z})' \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_1^\infty k \cdot z^{k-1}$
 $\Rightarrow \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_1^\infty k \cdot z^k$ la dérivée au pt $z \in \bar{B}(z_0, R_0)$

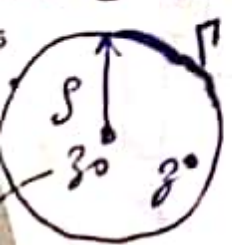
Ecriture de fonctions sous forme de séries entières
 (Série de Taylor)

Théorème (de Taylor). Si $f(z)$ est une fct anal. au pt $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $f(z)$ peut s'écrire sous, au voisinage de z_0 , sous la forme d'une série entière (de Taylor) suivante:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{(z - z_0)}{1!} + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

preuve: on choisit $\delta > 0$ de telle façon que f soit analyt. sur $B(z_0, \delta)$ et sur sa frontière $\Gamma: |z - z_0| = \delta$.



Soit $z \in B(z_0, \delta)$ un pt. D'après la formule intégrale de Cauchy, on a $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$

Il est clair que $\frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} < 1$ (car $|z-z_0| < |z-z_0|$)
 d'autre part, on par conséquent, on a $(*) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k$
 $\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0}\right)^k$

Mais la série $(*)$ cvge unif sur la frontière Γ , car $\frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} < 1$.

par conséquent et d'après le th
 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) (z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad (3)$$

où $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ (formule de Cauchy)

N.B. la série (3) est une série entière qui représente le développement de Taylor de $f(z)$ dans un voisinage de z_0 . (la série de Taylor est une série entière)

Le Rayon de cvge de la série de Taylor (pas besoin)

[Dans la démonstration du th. précédent (de Taylor), on a choisi Γ de telle façon que $f(z)$ soit analytique sur $B(z_0, r)$. par conséquent, le rayon de convergence de la série de Taylor (3) vers $f(z)$ est la distance entre z_0 et le point singulier (où f n'est pas analytique) de $f(z)$ le plus proche de z_0 . ii) analytiquement; $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ anal

théorème (unicité du développement d'une fct non nulle d'une série entière) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$
 Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ cvge vers $S'(z)$, alors cette série est la série de Taylor de $S'(z)$, i.e $a_k = \frac{S'(z_0)^{(k)}}{k!}$

preuve si on pose $z = z_0$ dans $S'(z)$, on obtient $S'(z_0) = a_1$
 si on dérive 1 fois : $-19- \quad z = z_0$, on obtient $S'(z_0) = a_2$

$n=2$: si on derive 2 fois et on pose $z=z_0$, on obtient
 $S^{(2)}(z_0) = 2! a_2 \implies a_2 = \frac{S^{(2)}(z_0)}{2!}$

$n=k$ si on derive k fois et on pose $z=z_0$, on obtient
 $S^{(k)}(z_0) = k! a_k \implies a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$

Donc la serie $\sum a_k (z-z_0)^k$ est celle de Taylor

N.B. A partir du dernier th d'unicité et de l'exercice 2, on donne une nouvelle définition aux fcts analyt. en pt
théorème (def) la fct $f(z)$ est analyt. au pt $z_0 \in \mathbb{C}$ ssi
 $f(z)$ s'écrit sous forme d'une série entière, de (centre z_0),
 convergente sur un voisinage de z_0 (Série de Taylor)

preuve $\Rightarrow$) si f est analytique au pt z_0 , alors
 d'après le th. de Taylor; f peut s'écrire sous la forme
 d'une série entière convergente (Série de Taylor) convergente
 sur un voisinage de z_0

$\Leftarrow$) si $f(z)$ s'écrit sous la forme d'une série entière
 alors d'après l'exercice 2, $f(z)$ est analytique sur
 le domaine de c.v.c.

Exercices: 1) écrire la fct $e^z = f(z)$ sous forme d'une série
 entière

1) on a: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \forall z \in \mathbb{C}$

$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}$

2) Écrire $f(z) = \frac{1}{z-3}$ sous forme d'une série
 entière au voisinage de $z_0=1$. Déterminer le rayon de

ind. $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k (z-1)^k$ c.v.c.

donc domaine de c.v.c. $|z-1| < 2, R=2$

Chap: 3 Théorème d'unicité (des fcts analyt.)

Zéros d'une fct analytique: soit f une fct analyt. sur le domaine $D \subseteq \mathbb{C}$.

Définition 1: on dit que $z_0 \in D$ est un zéro de $f(z)$ si $f(z_0) = 0$.

Conséquence 1: si $f(z_0) = 0$, alors $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$ (i.e. $C_0 = 0$)

effectivement: à partir de $C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, on obtient

$C_0 = 0$ (ou bien, on remplace directement dans)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k \text{ pour obtenir } f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

Définition 2: si $C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$ et $C_n \neq 0$, alors

z_0 est un zéro de $f(z)$ d'ordre n .

Effect; on a dans ce cas $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n} (z - z_0)^k$$

Il est clair que z_0 est un zéro d'ordre n , car $C_n \neq 0$

Conséquence 3: si z_0 est un zéro de f (analyt.) d'ordre n , alors

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) \text{ où } \varphi(z) \text{ est une fct}$$

analytique sur le voisinage de z_0 et $\varphi(z_0) \neq 0$

En effet: À partir de (*), on a $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k} (z - z_0)^k$ (où $C_n \neq 0$ par hypothèse), donc $\varphi(z_0) = C_n \neq 0$

Théorème d'unicité: soit f une fct analytique dans le domaine D et $(z_n) \subset D$ telle que $f(z_n) = 0$. Si la suite (z_n) converge vers $a \in D$, alors $f \equiv 0$ sur D (i.e. $f(z) = 0, \forall z \in D$)

preuve: 1) Comme $a \in D$ et $f(z)$ analyt. sur D , alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k \text{ dans le voisinage de } a.$$

on note que le rayon de convergence R_0 de cette série

est supérieur ou égale à d_0 - la distance entre a et la frontière de D .

Comme $f(z)$ est continue sur D , on a

$$f(a) = f(\lim_n z_n) = \lim_n f(z_n) = \lim_n 0 = 0$$

d'où $f(a) = 0$, i.e. a est un zéro (simple) de f .

Donc d'après la conséquence 1; $f(z) = (z-a)^{(k+1)} f_1(z)$

$$\text{on } f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} (z-a)^k$$

A partir de $z_n \neq a$, et $f(z_n) = 0$ et (*), on obtient que $f_1(z_n) = 0$, d'où par passage à la limite

$$f_1(a) = 0, \text{ donc } C_1 = 0.$$

De la même façon: on a f_2 , donc, $f_2(z) = (z-a) f_2(z)$

$$\text{on } f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2} (z-a)^k.$$

Comme pour $f_1(z)$, on obtient $f_2(a) = 0$, d'où $C_2 = 0$.

En répétant cette opération une infinité de fois, on obtient que $C_k = 0, \forall k = \overline{0, \infty}$. d'où $f(z) = 0$

dans le ~~voisin~~ disque $|z-a| < R_0$.

II) $f(z) = 0, \forall z \in D$?

pour cela, il suffit de prouver 1 pt $\forall z^* \in D$ et $z^* \neq a$.

de montrer que $f(z^*) = 0$.

Soit L la courbe qui relie a à z^* .

et a_1 le point d'intersection de L avec

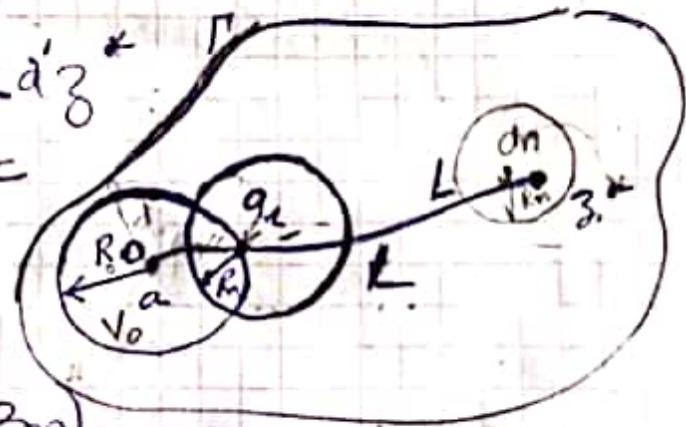
le cercle $|z-a| = R_0$.

Comme a_1 peut être considéré

comme la limite d'une suite (z_n)

ou $z_n \in \{z : |z-a| < R_0\}$, i.e. $f(z_n) = 0$, alors

on a $f(a_1) = 0$, d'où d'après la première étape, on a



$f(z) = 0, \forall z \in \{z, |z - a| < R\}$.

En répétant cette opération un nombre fini de fois, on obtient un cercle $\{z, |z - a| < R_n\}$ qui contient z^* et sur lequel $f(z) = 0$,
Donc $f(z^*) = 0$.

Conséquence (exercice) i) Montrer que si $f(z) \neq 0$ est analytique sur le domaine D , alors $f(z)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros dans tout sous-domaine fermé borné $\bar{D}' \subset D$.

ii) Démontrer que 'une fonction analytique ^($\neq 0$) peut avoir une infinité de zéros uniquement sur un ensemble ^{non fermé} ouvert en nombre (Immédiate)

théorème 2 (d'unicité) soit $f(z)$ et $g(z)$ - deux fcts analyt sur D . S'il existe $(z_n) \subset D$ telle que $f(z_n) = g(z_n)$ et $z_n \rightarrow a \in D$, alors $f(z) = g(z)$
 $\forall z \in D$

(Exercice)
cas particuliers: le cas de l'ensemble qui a un pt limit (Comme on désigne)
— prolongement analytique —

Définition: on suppose que

- 1) $f(z)$ - définie sur l'ensemble E
- 2) $F(z)$ - analytique sur le domaine D où $E \subset D$.
- 3) $F(z) = f(z), \forall z \in E$

la fct $F(z)$ est appelée le prolongement analytique de $f(z)$ de E sur D .

On rappelle que dans le cas réel, le prolongement n'est pas unique, par contre?

Théorème : (principe de prolongement analytique)
 Soit E un ensemble possédant un point limite $a \in D$.
 On a dans ce cas : le prolongement analytique de
 de E à D est unique (dans les conditions de la définition)
Preuve : On suppose que $f(z)$ possède deux prolongements
 analytiques $F_1(z)$ et $F_2(z)$ sur D . Comme $F_1(z) = F_2(z)$,
 $\forall z \in E$, alors d'après le th. de l'unicité, on a :

$$F_1(z) = F_2(z), \forall z \in D$$

Donc, le prolongement est analytique et unique.
Conséquences : En particulier, si E est une courbe ou
 $\Gamma \subset D$ ou un sous-domaine $D' \subset D$, alors
 le prolongement analytique de toute fonction $f(z)$ de
 Γ à D (ou de D' à D) est unique. En effet : dans
 ce cas l'ensemble E possède une infinité de points
 limite $a_n \in D$, car tout point $z \in \Gamma$ (ou $z \in D'$) est
 limite d'une suite $(z_n) \subset D'$.

Exemple 1 : Trouver le prolongement analytique de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{de } |z| < 1 \text{ à } \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Réponse : la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge sur le disque $|z| < 1$
 et on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$
 d'autre part $F(z) = \frac{1}{1-z}$ est analytique sur le
 domaine $D = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1\}$ et on a
 $F(z) = f(z)$ si $|z| < 1$. Donc, $F(z)$ est
 le prolongement analytique $f(z)$ de l'ensemble
 $E = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ à l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1\}$.
Exemple 2 : prolongement analytique de e^z .
 L'exponentiel

Montrer que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est, $z \in \mathbb{C}$ est le prolongement analytique de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Réponse: Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est une série qui converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (CVCe, D'Alembert), alors $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $\frac{1}{z}$ (WKS) fct analytique sur $\mathbb{C}$ (fct entière).

D'autre part, la fct e^z coïncide avec la fct e^x sur la droite réelle $\mathbb{R}$ (il suffit de mettre $z=x$).
Par conséquent, e^z est le prolongement analytique de e^x de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

N.B: De la même façon, on montre que $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
 $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
 $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ sont les prolong. anal. resp. de $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ et $\cosh x$ de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Definition 2: une fct $f(z)$ analytique sur tout $\mathbb{C}$, est appelée fonction entière.

Exemple: e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$.

Exercice à partir de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, Montrer q.
 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, on $z \in \mathbb{C}$.

Indication: on a $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z - 1$ est entière.
Or $f(z) = 0$, $\forall z = x \in \mathbb{R}$. d'après le th. (2) (unicité)
 $f(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\Rightarrow$ donc $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

N.B. $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ est analytique, et c'est le prolongement analytique de $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1$ $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$, d'après le théorème trigonométrique, on $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exer: Trouver l'image des ensembles suivants par la transformation $w = 1/z$.

- a) $y = 0$, b) $x = 0$, c) $\arg z = \pi/4$
 d) $-1 \leq u \leq 1, y = 0$

Rép: a) $v = 0$, b) $u = 0$, c) $\arg w = -\pi/4$
 d) $|u| \geq 1, v = 0$.

Exe 2 Soit R l'intérieur du rectangle, dans le plan z , délimité par $y=1, x=2, y=0, x=0$.

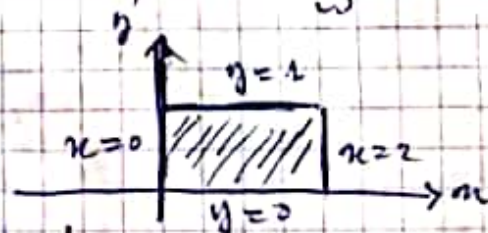
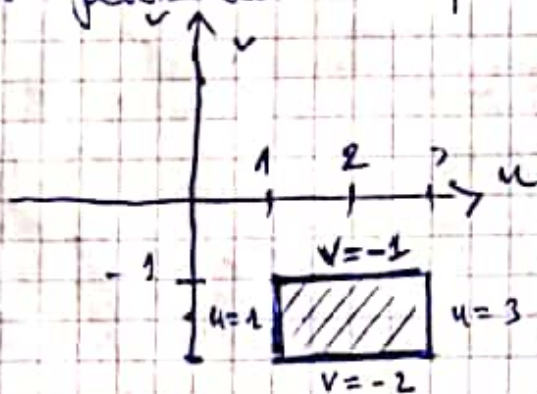
Déterminer R' l'image de R , dans le plan w , par la transformation:

- a) $w = z + (1-i)$, b) $w = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z$, c) $w = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z + (1-i)$

Rép: a) $w = u + iv = (x+1) + i(y-1)$

$x=0 \Rightarrow u=1, y=0 \Rightarrow v=-1, x=2 \Rightarrow u=3, y=1 \Rightarrow v=0$

on peut déduire que $\forall z \in R, w = f(z) \in R'$.



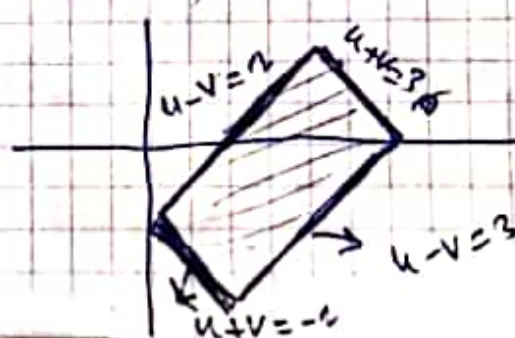
translation

- b) $w = u + iv = (x-y) + i(x+y)$

$x=0 \Rightarrow u=-v, y=0 \Rightarrow u=v, x=2 \Rightarrow u+v=4, y=1 \Rightarrow v-u=2$



- c) $y=1 \Rightarrow u-v=3, x=2 \Rightarrow u+v=-1$
 $y=0 \Rightarrow u-v=1, x=0 \Rightarrow u+v=3$



rotat + dilat + transl

2) la fonction $w = f(z) = 1/z$

$f(z) = 1/z$ est anal sur $\mathbb{C}^*$, donc c'est-à-dire T. conf. sur $\mathbb{C}^*$
 pour étudier la transformation effectuée par cette fct. :

on pose : $z = r e^{i\varphi}$ et $w = \rho e^{i\theta} = 1/z$

on a $\rho = 1/r$ et $\theta = -\varphi$ — (1)

i) l'image du cercle $|z|=1$? (i.e. $z_0=0$ et $r=1$)

on a dans ce cas $\rho = r = 1$ et $\theta = -\varphi$
 donc l'image de $z = e^{i\varphi}$ est son symétrique par rapport à l'axe des x . par conséquent l'image du cercle unité $|z|=1$ est le cercle unité $|w|=1$.

ii) l'image de $z \in \mathbb{C}^*$ tq $|z| \neq 1$

pour cela, on écrit $f(z) = 1/z$ sous la forme

$f = g \circ h$ où $g(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$ (i.e. $w = g(z) = r e^{i\varphi}$)

où $r' = \frac{1}{r}$ et $\varphi' = \varphi$

et $h(r' e^{i\varphi'}) = r' e^{-i\varphi'} = \rho e^{i\theta}$ (i.e. $\rho = r'$ et $\theta = -\varphi'$)

$g(z)$? on a $g(z) = \frac{1}{z}$ qui n'est pas analytique

— Mais conserve les angles. D'où g est une transfo
 conforme. (HYP) l'image d'un pt. à l'intérieur du
 cercle est 2 points à l'ext du cercle

on a z et $g(z)$ se trouvent sur la
 demi-droite : cette transformation

appelle inversion par rapport à $|z|=1$

$h(z)$? on a $h(z) = \bar{z}$ qui n'est pas anal, mais est une
 transformation conforme. (R) cette transformation

conserve la distance, mais inverse les angles

N.B. donc on get $g \neq f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$, mais $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$

