Université de Jijel **Département de génie mécanique**
3ème année Licence Construction Mécanique **2020/2021**
Matière : Elasticité **Semestre 5**

Corrigé des travaux dirigés sur la loi de Hooke

Exercice 1

1) Tenseur des déformations $[\varepsilon]$.

Par application de la loi de Hooke, on écrit :

$$[\varepsilon] = \frac{(1+\nu)}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}Tr([\sigma])[I]$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{(1+0.3)}{200\times 10^3}\begin{bmatrix} 80 & -15 & 0 \\ -15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{0.3}{200\times 10^3}(80+40)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(1.3)}{200\times 10^3}(80) - \frac{0.3}{200\times 10^3}(120) = 34\times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1.3)}{200\times 10^3}(40) - \frac{0.3}{200\times 10^3}(120) = 8\times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1.3)}{200\times 10^3}(-15) = -9.75\times 10^{-5}$$

Ainsi :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 34 & -9.75 & 0 \\ -9.75 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

2) Les déformations principales.

Invariants des contraintes :

$$I_1 = 42\times 10^{-5};\ \ I_2 = 176.94\times 10^{-5};\ \ I_3 = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$-\varepsilon_p{}^3 + 39\times 10^{-5} - \varepsilon_p{}^2 - 74.94\sigma_{zz}\varepsilon_p = 0$$

Ainsi, les déformations principales sont :

$$\varepsilon_1 = 37.25\times 10^{-5}\ ;\ \varepsilon_2 = 4.75\times 10^{-5}\ ;\ \varepsilon_3 = 0$$

Exercice 2

Identification des paramètres élastiques E et ν :

Essai 2 :

$$E = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{-30}{-0.003} = 10000\ MPa$$

Essai 1 :

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -0.012$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -75\ MPa$$

$$\varepsilon_{xx} = -0.004 = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)$$

$$\nu = \frac{-E\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}}{\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)} = \frac{(-10000\times(-0.004)) - 75}{-(75+75)} = 0.23$$

Exercice 3

1) Le tenseur des contraintes est symétrique.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -37.500 & 28.125 & 0 \\ 28.125 & 0 & 2.165 \\ 0 & 2.165 & 0 \end{bmatrix}(KPa)$$

2) Evaluation des tenseurs sphérique et déviateur des contraintes.

Tenseur sphérique

$$[\sigma_S] = \frac{1}{3}(tr[\sigma])[I] = \frac{1}{3}(-37.500)\ [I] = \begin{bmatrix} -12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -12.5 & 0 \\ 0 & 0 & -12.5 \end{bmatrix}(KPa)$$

Tenseur déviateur

$$[\sigma_D] = [\sigma] - [\sigma_S] = \begin{bmatrix} -25 & 28.125 & 0 \\ 28.125. & 12.5 & 2.165 \\ 0. & 2.165. & 12.5 \end{bmatrix}(KPa)$$

3) Etablissement du tenseur des déformations $[\varepsilon]$ dans à l'aide de la loi de Hooke.

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}(tr[\sigma])[I]$$

$$[\varepsilon] = \frac{1+0.2}{20\ 10^6}\begin{bmatrix} -37.500 & 28.125 & 0 \\ 28.125. & 0 & 2.165 \\ 0. & 2.165. & 0 \end{bmatrix} - \frac{0.2}{20\ 10^6}(-37.500)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -1.875 & 1.691 & 0 \\ 1.691 & 0.375 & 0.130 \\ 0. & 0.130 & 0.375 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

4) La valeur de la contrainte σ_{yy} qu'il faut appliquer pour que la déformation ε_{yy} soit nulle :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right)$$

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + 0)\right) \Longrightarrow \sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx} = 0.2(-37.500) = -7.5 \text{ KPa}$$

Exercice 4

1) En supposant que le cube vient en contact avec la face Y du logement.

a) Valeurs de ε_{xx}, ε_{yy} et σ_{zz}.

$$\varepsilon_{xx} = 0$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{0.005}{10} = 5 \times 10^{-4}$$
$$\sigma_{zz} = -60\ MPa$$

b) Calcul de la contrainte σ_{yy}.

Par application de la loi de Hooke, on a :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right)$$

En remplaçant avec les données ci-dessus, on obtient :

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right)$$

$$5 \times 10^{-4} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right)$$

La résolution des deux équations ci-dessus donne :

$$\sigma_{yy} = 9.375\ MPa$$

2) En supposant que la contrainte σ_{yy} est nulle.

a) Calcul des valeurs de ε_{yy}, ε_{zz} et σ_{xx}.

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(0 + \sigma_{zz})\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(0 - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + 0)\right)$$

La résolution des trois équations ci-dessus donne :

$$\varepsilon_{yy} = 3.82 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = -7.62 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{xx} = -20\ MPa$$

b) Le cube ne vient pas en contact avec la face Y du logement parce que ?

$$\varepsilon_{yy} = 3.82 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

c) La valeur minimale de σ_{zz} pour que le contact se réalise.

$$\varepsilon_{yy} = 5 \times 10^{-4}$$

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(0 + \sigma_{zz})\right)$$

$$5 \times 10^{-4} = \frac{1}{E}\left(0 - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + 0)\right)$$

La résolution des équations ci-dessus donne :

$$\sigma_{xx} = -26.25\ MPa$$

$$\sigma_{zz} = -78.75\ MPa$$

$$\varepsilon_{zz} = -10^{-3}$$