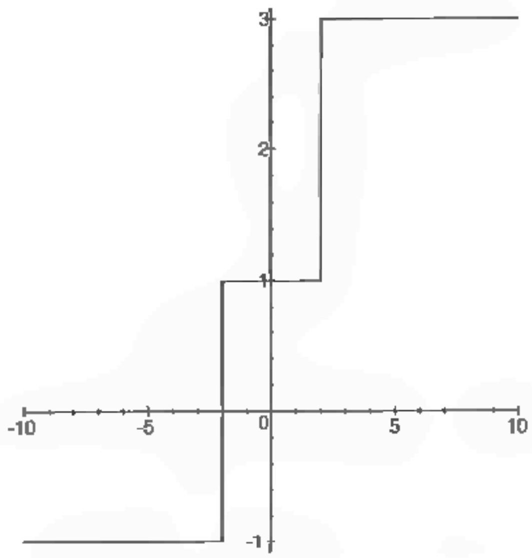

Il existe aussi la fonction **Heaviside** définie par : $Heaviside(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x \geq 0\\ 0 \text{ si } x < 0\end{cases}$

4. Expressions symboliques

Maple manipule les mêmes expressions que vous sur le papier. Cependant, il ne faut omettre ici aucun signe, comme ceux marquant la multiplication que l'on ne fait généralement pas figurer sur la feuille. Nous allons donc nous intéresser dans ce paragraphe aux différents types d'expressions symboliques.

4.1 *Polynômes*

On peut définir un polynôme :

```
>A:=x^2+3*x+1;
```

$$A := x^2 + 3x + 1$$

```
>B:=x-1;
```

$$B := x - 1$$

On peut tester si A divise B par l'intermédiaire de la fonction **divide** :

```
>divide(A,B,x);
```

$$false$$

On peut alors écrire ce polynôme sous la forme $A = B \,.\, Q + R$. Commençons par calculer le quotient :

```
>quo(A,B,x);
```

$$x + 4$$

Calculons alors le reste :

```
>rem(A,B,x);
```

$$5$$

Bien sûr, on peut aussi développer et factoriser les polynômes :

```
>C:=(x-3)*(x-2);
```

$$C := (x-3)\,(x-2)$$

Par défaut, Maple ne développe donc pas les expressions.

> On développe une expression à l'aide de la fonction **`expand`** :
>
> **`>expand(`*`expression`*`);`**

Par exemple, pour le polynôme C définit précédemment :

```
>expand(C);
```

$$x^2 - 5x + 6$$

On peut alors retrouver l'expression d'origine de C en factorisant l'expression obtenue à la ligne précédente.

> On factorise une expression à l'aide de la fonction **`factor`** :
>
> **`>factor(`*`expression`*`);`**

Ainsi :

```
>factor(");
```

$$(x-3)\,(x-2)$$

Dans certains cas, on peut aussi vouloir factoriser sur $\mathbb{C}$:

```
>E:=x^2+2*x+2;
```

$$E := x^2 + 2x + 2$$

```
>factor(E);
```

$$x^2 + 2x + 2$$

Par défaut, Maple factorise donc dans $\mathbb{R}$. On peut cependant forcer Maple à factoriser dans $\mathbb{C}$ en ajoutant l'argument **`complex`** dans la fonction **`factor`** :

```
>factor(E,complex);
```

$$(x + 1 + 1\,.\,I)\,(x + 1 - 1\,.\,I)$$

On peut entrer les polynômes de manière désordonnée :

```
>F:=x+3*x^2+x+x^4+x^3;
```

$$F := 2x + 3x^2 + x^4 + x^3$$

4.2 *Fractions rationnelles*

Une fraction rationnelle est de la forme : $\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0}$. On peut donc commencer par extraire de cette fraction le numérateur et le dénominateur.

```
>F:=(3*x^4+4*x^2+2*x+1)/(x^3+2*x+1);
```

$$F := \frac{3x^4 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x + 1}$$

> On extrait le dénominateur et le numérateur d'une fraction (rationnelle ou non) avec les fonctions **denom** et **numer** :
>
> **>denom(*fraction*);**
> **>numer(*fraction*);**

Par exemple sur la fraction F que l'on vient de définir :

```
>denom(F);
```

$$x^3 + 2x + 1$$

```
>numer(F);
```

$$3x^4 + 4x^3 + 2x + 1$$

La fonction **expand** vue pour les polynômes produit une réponse peu intéressante :

```
>expand(F);
```

$$3\frac{x^4}{x^3 + 2x + 1} + 4\frac{x^2}{x^3 + 2x + 1} + 2\frac{x}{x^3 + 2x + 1} + \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$$

La fonction **factor** en revanche factorise le numérateur et le dénominateur :

```
>G:=(x^2-x-6)/(x^2+1);
```

$$G := \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 1}$$

```
>factor(G);
```

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x^2 + 1}$$

L'essentiel

Pour évaluer numériquement une expression, on utilise la fonction **evalf** :
>evalf(*expression*, *nombre de chiffres***);**

La fonction **floor** permet de prendre la partie entière d'un nombre :
>floor(*nombre*);

iquo et **irem** renvoient respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b :
>iquo(*a*,*b*);
>irem(*a*,*b*);

La fonction **isprime** détermine si un nombre est ou n'est pas premier :
>isprime(*nombre*);

Pour générer un entier au hasard entre a et b, on utilise la fonction **rand** :
>*nom*:=rand(*a*..*b*);

Ensuite, on utilise la procédure générée en tapant ***nom*();**

Les coefficients binomiaux sont donnés par **binomial** :
>binomial(*n*,*k*);

On somme sur les entiers à l'aide de la fonction **sum** :
>sum(*expression*(*var*),*var*=*a*..*b*);

I est le i complexe.

On définit une fonction par :
>*fonction*:=*var*->*expression*(*var*);

On calcule une limite à l'aide de la fonction **limit** :
>limit(*expression*(*var*),*var*=*point*);

On dérive une expression à l'aide de la fonction **diff** :
>diff(*expression*,*var*);

On trouve une primitive d'une expression à l'aide de la fonction **int** :
>int(*expression*(*var*),*var*);

L'essentiel (suite)

On calcule l'intégrale d'une expression entre a et b par :
>int(*expression*(*var*),*var*=*a*..*b*);

On effectue un développement limité avec la fonction **taylor** :
>taylor(*expression*(*var*),*var*=*point*,*ordre*);

Pour développer une expression, on utilise la fonction **expand** :
>expand(*expression*);

Pour factoriser une expression, on utilise la fonction **factor** :
>factor(*expression*);

Résolution d'équations

1. Équations et systèmes d'équations

1.1 *Équations de degré quelconque*

Pour résoudre une équation de degré n, on utilise la fonction **`solve`** :

>solve($a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$ +...+$a_1 x + a_0$=0,x);

Prenons un exemple ; pour résoudre l'équation $4x^2 + 5x - 6 = 0$, on entre :

```
>solve(4*x^2+5*x-6=0,x);
```

$$-2, \frac{3}{4}$$

Maple peut même résoudre formellement une équation de degré inférieur ou égal à trois ; par exemple, pour une équation du second degré :

```
>solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

$$\frac{1}{2}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}, \frac{1}{2}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

Si l'équation est définie numériquement et ne comporte qu'une seule variable, Maple peut aussi comprendre la commande sans qu'on lui spécifie *expression=0* ni par rapport à quelle variable on résout. Par exemple :

```
>solve(4*x^2+5*x-6);
```

$$-2, \frac{3}{4}$$

Si cette équation est formelle, Maple ne sait pas par rapport à quelle variable il doit résoudre et renvoie alors un résultat sans intérêt :

```
>solve(a*x+b);
```

$$\{x = x, a = a, b = -ax\}$$

On a jusqu'ici résolu des équations du 1er et du 2nd degré, mais on peut résoudre en utilisant la même méthode des équations de degré quelconque :

```
>solve(x^3+2*x^2+x+2=0,x);
```

$$-2, I, -I$$

Pour les équations de degré inférieur ou égal à 4, Maple sait résoudre formellement les équations sans trop de problèmes. Au-delà, Maple ne sait trouver que des valeurs approchées (hormis les racines évidentes qui sont généralement des entiers), le système renvoie alors RootOf(*expr*), c'est-à-dire qu'il dit que les solutions de nos équations sont les racines d'*expr*. C'est par exemple le cas quand on cherche à résoudre l'équation $2x^5 + 5x + 1$:

```
>solve(2*x^5+5*x+1);
```

$$\text{RootOf}(2x^5 + 5x + 1)$$

On peut alors forcer l'évaluation à l'aide de la fonction **allvalues** :

```
>allvalues(");
```

$-.8357687336 - .8935448243\, I, -.8357687336 + .8935448243\, I,$
$-.1998724078, .9357049374 - .8919670637\, I,\ .9357049374 + .8919670637\, I$

Cherchons maintenant à résoudre l'équation $x.e^x = 1$:

```
>solve(x*exp(x)=1,x);
```

$$\text{LambertW}(1)$$

LambertW(x) est en fait définie comme étant l'une des solutions de $y.e^y = x$ … Il faut alors résoudre numériquement l'équation.

> La résolution numérique se fait avec la fonction **fsolve** :
>
> **>fsolve(*équation*,*var*,*options*);**

options permettent d'orienter la résolution et peut prendre les valeurs :

- *complex :* Indique à Maple de résoudre les équations dans le corps des complexes. Ainsi :

  ```
  >fsolve(x^5-2*x^4+2*x^3-3*x^2-2*x+2,x,complex);
  ```

  –.7589676366, .1270647224 – 1.518856902 I, .1270647224 + 1.518856902 I, .5934719689, 1.911366223

  Notons que, lorsque l'on utilise une option, on ne peut utiliser la syntaxe réduite : **fsolve(*expr*(x));** où *expr* est une expression numérique.

- *maxsols :* Donne à Maple le nombre maximum de solutions à trouver.

```
>fsolve(x^5-2*x^4+2*x^3-3*x^2-2*x+2,x,maxsols=2);
```

$$-.7589676366, .5934719689$$

- *un intervalle :* Les solutions trouvées par Maple seront dans cet intervalle :

```
>fsolve(x^5-2*x^4+2*x^3-3*x^2-2*x+2,x,x=-1..1);
```

$$-.7589676366, .5934719689$$

La précision des résultats est déterminée par la valeur de la variable globale **`Digits`** qui indique avec combien de décimales Maple fonctionne.

Dans certains cas, Maple ne trouve qu'une seule solution, alors que l'on souhaiterait qu'il trouve l'ensemble des solutions.

Par exemple, si l'on cherche à résoudre l'équation cos $x = 0$, on n'obtient qu'une seule solution :

```
>solve(cos(x)=0,x) ;
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

On peut cependant forcer le système à trouver toutes les solutions de cette équation. Pour cela, il faut changer la valeur de la variable **`_EnvAllSolutions`** : qui est fixée à *false* par défaut. On fixe alors cette variable à *true* :

```
>_EnvAllSolutions:=true:
```

Maple va alors trouver toutes les solutions :

```
>sol:=solve(cos(x)=0);
```

$$sol := \frac{1}{2}\pi + \pi\_Z1\sim$$

On voit alors que Maple a donné une propriété à *_Z1* (Le _ signifie que *Z1* est une variable introduite par Maple et le ~ signifie que Maple lui a donné une propriété). Vérifions donc que Maple considère bien *Z1* comme un entier. *Z1* est donc le second opérande du second opérande (le produit π*_Z1~*) de la solution. On extrait alors *_Z1~* par :

```
>op(2,op(2,sol));
```

$$\_Z1\sim$$

```
>about(");
Originally _Z1, renamed _Z1~:
is assumed to be: integer
```

C'est bon, Maple a trouvé la forme générale des solutions de notre équation de départ :

$$\frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

La fonction **isolve** permet de résoudre les équations dans $\mathbb{Z}$; sa syntaxe est identique à celle de la fonction **solve** :

```
>isolve(x^3+1/2*x^2-13/2*x+3);
```

$$\{x=2\},\{x=-3\}$$

alors que la fonction **solve** fournit toutes les solutions :

```
>solve(x^3+1/2*x^2-13/2*x+3);
```

$$2,\frac{1}{2},-3$$

Pour en terminer avec la résolution des équations, un mot sur les étiquettes (*labelling*) : quand une expression revient à plusieurs reprises dans la solution, Maple la remplace par une étiquette qui renvoie à cette expression figurant en fin de solution. Ces étiquettes se présentent sous la forme d'un « **%** » suivi d'un entier naturel. C'est ce qui se passe dans l'exemple suivant :

```
>solve(x^3+x^2-5);
```

$$\frac{1}{6}\%2+\frac{2}{3}\%1-\frac{1}{3},-\frac{1}{12}\%2-\frac{1}{3}\%1-\frac{1}{3}+I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\%2+\frac{2}{3}\%1\right),-\frac{1}{12}\%2-\frac{1}{3}-I\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\%2+\frac{2}{3}\%1\right)$$

$$\%1:=\frac{1}{(532+12\sqrt{1965})^{1/3}}$$

$$\%2:=(532+12\sqrt{1965})^{1/3}$$

Notons que ces étiquettes sont des variables affectées :

```
>%2;
```

$$(532+12\sqrt{1965})^{1/3}$$

Signalons également que seul Maple peut introduire des étiquettes.

Vous pouvez quand même modifier le comportement des étiquettes de deux manières.

- En les supprimant carrément de la manière suivante :

  ```
  >interface(labelling=false):
  ```

  Nous ne referons pas le calcul précédent avec cette option... afficher le résultat prendrait alors une bonne demi-page !

- En imposant une longueur minimale en deçà de laquelle Maple ne peut avoir recours aux étiquettes, à l'aide de la commande suivante :

  ```
  >interface(labelwidth=n);
  ```

  Par défaut, cette valeur est de 20 caractères. Notons tout de même que cette longueur est assez approximative, Maple se réservant le jugement « final ».