Série de TD #1 – SLM

Exercice #1:

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{3s^2 + 4s - 2}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

1) Donner la fonction l'équation différentielle du système.
2) Donner une représentation d'état du système.
3) Concevoir une commande par retour d'état de gain $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : -4, -4 et -5.

Exercice #2:

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\dot{x}_1 + 2x_1 - 4x_2 = 5u$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 4x_1 + x_2 = 0$$
$$y = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

1) Représenter le système sous une forme d'état.
2) Calculer sa fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.
3) Est-ce que le système est stable ? justifier ?
4) Pour une entrée $u = 1$ et la condition initiale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, calculer la sortie $y(t)$.
5) Vérifier la commndabilité et l'observabilité du système.
6) Concevoir une commande par retour d'état de gain $K = [k_1 \quad k_2]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : $-3 \pm j6$.

Exercice #3:

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{9}{s^2 - 9}$$

1) Donner une représentation d'état du système sous forme canonique observable ($A_0, B_0\ , C_0$).
2) Le système ($A_0, B_0\ , C_0$) est –il commandable ?
3) Calculer le gain K de la commande par retour d'état permettant de placer les pôles en boucle fermée à :$-3 \pm 3j$.
4) Le système est il observable ?
5) Calculer le gain L de l'observateur d'état dont les pôles sont placés à :$-6 \pm 6j$.

Exercice #4:

Soit le système donnée par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 1]x$$

1) Etudier la stabilité du système.
2) Calculer la fonction de transfert du système.
3) Calculer la réponse indicielle du système avec $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
4) Le système est–il commandable ? est–il observable ?
5) Mettre le système sous forme commandable si possible.
6) Mettre le système sous forme observable si possible.
7) Calculer la loi de commande par retour d'état $u = -Kx + y_r$, permettant de placer les pôles en boucle fermée à :$-2\ et - 3$.
8) Calculer la valeur finale de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire.
9) Que constatez-vous ?

Exercice #5:

Considérons le système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -12 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1) Etudier la stabilité du système.
2) Vérifier la commandabilité et l'observabilité du système.
3) Calculer le gain K commande par retour d'état $u = -Kx + gy_r$ permettant placer les pôles en boucle fermée à :$-2 \pm 2j$ et $= -5$.
4) Calculer le gain de pré-compensation g qui assure une erreur statique de 10%.

Exercice #6:

Considérons le système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 2 \end{bmatrix} x$$

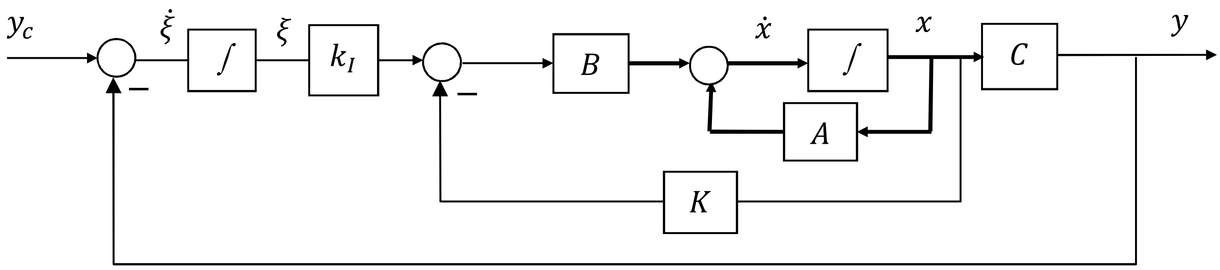
1) Vérifier la commandabilité et l'observabilité du système.
2) Calculer la commande par retour d'état $(u = -Kx + y_r)$ et l'observateur permettant placer les pôles en boucle fermée à :$-1 \pm j$ et -2 et les pôles de l'observateur à :$-10 \pm 2j$ et $= -20$.

Exercice #7:

Soit le système donné par sa représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

On veut réaliser la loi de commande par retour d'état donné par le schéma bloc de la figure suivante :



1) Est qu'il possible de réaliser ce schéma de commande ?
2) Si oui, calculer les gains K et k_I permettant de placer les pôles en boucle fermée à :-1.

Solution des exercices de la série de TD#1

Solution de l'exercice #1:

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{3s^2+4s-2}{s^3+3s^2+7s+5}$$

1) Equation différentielle du système :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^2+4s-2}{s^3+3s^2+7s+5} \Rightarrow (s^3+3s^2+7s+5)Y(s) = (3s^2+4s-2)U(s)$$
$$\Rightarrow s^3Y(s)+3s^2Y(s)+7sY(s)+5Y(s) = 3s^2U(s)+4sU(s)-2U(s)$$
$$\Rightarrow \ddot{y}+3\ddot{y}+7y+5 = 3\ddot{u}+4\dot{u}-2u$$

2) Représentation d'état du système

La représentation d' état sous forme commandable est donnée comme suit ;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [-2 \quad 4 \quad 3]x$$

3) Commande par retour d'état de gain $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3\,]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : -4, -4 et -5.

Le polynôme caractéristique désiré en BF est ;

$$P_d(s) = (s+4)(s+4)(s+5) = s^3+13s^2+56s+80$$

D'après 2) :

$$k_1 = 80-3=0=72$$
$$k_2 = 56-7=49$$
$$k_3 = 13-5=8$$

Donc :

$$K = [72 \quad 49 \quad 8\,]$$

Solution de l'exercice #2:

1) Représentation d'état du système

On a

$$\dot{x}_1+2x_1-4x_2 = 5u \quad (1)$$
$$\dot{x}_1-\dot{x}_2+4x_1+x_2 = 0 \quad (2)$$
$$y = \dot{x}_1-\dot{x}_2 \quad (3)$$

(1) $\Rightarrow \dot{x}_1 = -2x_1+4x_2+5u$ (4)

En remplaçant (4) dans (2) on obtient

$$\dot{x}_2 = 2x_1+5x_2+5u(5)$$

En remplaçant (4) et (5) dans (3) on obtient

$$y = -4x_1-\dot{x}_2$$

La représentation d'état du système est donc:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} u$$
$$y = [-4 \quad -1]\mathrm{X}$$

2) La fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = [-4 \quad -1]\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$= [-4 \quad -1]\begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ -2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = [-4 \quad -1]\frac{\begin{bmatrix} s-5 & 4 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-5)-8}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s^2-3s-18}[-4s+18 \quad -s-18]\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{-25s}{s^2-3s-18}$$

3) Stabilité
Les coefficients du polynôme caractéristique du système ne sont pas du même signe, donc le système est instable.
4) Calcul de réponse du système à $y(t)$une entrée $u = 1$ et la condition initial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
On a

$$X(s) = \phi(s)x(0) + \phi(s)BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) = C\phi(s)x(0) + C\phi(s)BU(s)$$

$$\mathrm{Y(s)} = C(sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C(sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ -2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ -2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{-4s+18}{(s+3)(s-6)} & \frac{-s-18}{(s+3)(s-6)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-4s+18}{(s+3)(s-6)} & \frac{-s-18}{(s+3)(s-6)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$
$$= \frac{-3s+36}{(s+3)(s-6)} + \frac{-25}{(s+3)(s-6)} = \frac{-3s+11}{(s+3)(s-6)} = -\frac{20}{9}\frac{1}{s+3} - \frac{7}{9}\frac{1}{s-6}$$
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\frac{20}{9}e^{-3t} - \frac{7}{9}e^{-6t}$$

5) Etude de la ommandabilité et de l'observabilité du système.

$$Qc = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}, \det(Qc) = 175 - 50 = 125 \neq 0 \Longrightarrow \textit{le système est commandable}$$
$$Qo = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & -21 \end{bmatrix}, \det(Qo) = 84 + 6 = 90 \neq 0 \Longrightarrow \textit{le système est observable}$$

6) Concevoir une commande par retour d'état de gain $K = [k_1 \quad k_2]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : $-3 \pm j6$.

Le polynôme caractéristique désiré en BF :

$$D_d(s) = (s + 3 + j6)(s + 3 - j6) = s^2 + 6s + 45$$

On a :

$$Qc = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}$$
$$Qc^{-1} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 35 & -10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} Qc^{-1}(2) \\ Qc^{-1}(2)A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}, \quad M = -125\begin{bmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{4}{25} & -\frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CM = \begin{bmatrix} -75 & -25 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_1 = 45 - (-18) = 63$$
$$\tilde{k}_2 = 6 - (-3) = 9$$
$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 63 & 9 \end{bmatrix}$$
$$K = \tilde{K}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1.08 & 2.88 \end{bmatrix}$$

Solution de l'exercice #3:

1) Représentation d'état du système sous forme canonique observable (A_0, B_0 , C_0)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

2) Comandabilité du système (A_0, B_0 , C_0)

On a : $Q_c = [\,B_0 \quad A_0\,B_0] = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ et $\det(Q_c) = 81 \neq 0 \Longrightarrow$ *le système est commandable*

3) Calcule du gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande par retour d'état permettant de placer les pôles en boucle fermée à :$-3 \pm 3j$.

le polynôme caractéristique en BF désiré est :

$$P_{BF}^{d}(s) = (s+3-3j)(s+3+3j) = s^2 + 6s + 18$$

le polynôme caractéristique en BF du système est :

$$P_{BF}(s) = \det(sI - (A_0 - B_0K))$$

$$A_0 - B_0K = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9k_1 & 9k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9k_1 & 9-9k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{BF}(s) = \det(sI - (A_0 - B_0K)) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9k_1 & 9-9k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= det\left(\begin{bmatrix} s+9k_1 & -9+9k_2 \\ -1 & s \end{bmatrix}\right)$$
$$P_{BF}(s) = s^2 + 9k_1 s - 9 + 9k_2 \qquad (2)$$

$P_{BF}(s) = P_{BF}^{d}(s) \Longrightarrow 9k_1 = 6\ et -\ 9 + 9k_2 = 18 \Longrightarrow k_1 = \frac{2}{3}\ et\ k_2 = 3$ Alors : $K = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}$

4) Observabilité du système

Le système est observable puisque il est sous forme canonique observable.

5) Calcule du gain $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ de l'observateur d'état dont les pôles sont placés à :$-6 \pm 6j$

la dynamique désiré de l'observateur est donnée par le polynôme caractéristique:

$$P_O^d(s) = (s+6-6j)(s+6+6j) = s^2 + 12s + 72$$

la dynamique du d'observateur est donnée par le polynôme caractéristique:

$P_0(s) = \det(sI - (A_0 - LC_0))$ tel que :

$l_1 = 72 - (-9) = 81\ et\ l_2 = 12 - 0 = 12$ donc $L = \begin{bmatrix} 81 \\ 12 \end{bmatrix}$

Solution de l'exercice #4:

On a le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1) Stabilité :

L'équation caractéristique du système est :$\det(sI - A) = 0 \Leftrightarrow \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) =$

$det\begin{pmatrix} s-4 & -1 \\ 0 & s-10 \end{pmatrix} = (s-4)(s-10)$

Le système à deux pôles réels positives +4 et +10 donc le système est instable **.**

2) Fonction de transfert :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ 0 & s-10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-4)(s-10)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-10 & 1 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s-4)(s-10)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s-4 \end{bmatrix} = \frac{s-4}{(s-4)(s-10)} = \frac{1}{(s-10)}$$

3) Réponse à un échelon du système lorsque $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$:

$$Y(s) = CX(s) = C\phi(s)x(0) + C\phi(s)BU(s)$$

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-4)(s-10)} \begin{bmatrix} s-10 & 1 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{(s-4)(s-10)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-10 & 1 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{(s-4)(s-10)} [0 \quad s-4] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{(s+1)(s-4)}{s(s-4)(s-10)} = \frac{s+1}{s(s-10)} = -\frac{1}{10}\frac{1}{s} + \frac{11}{10}\frac{1}{s-10}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{10} + \frac{11}{10}e^{10t}$$

4) Commandabilité et Observabilité :

On a : $Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

$\det(Q_c) = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ le système est commandable

On a : $Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

$\det(Q_0) = 0 \Longrightarrow$ le système n'est pas observable

5) Forme commandable :

Puisque le système est commandable on peut le mettre sous forme commandable

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_c^{-1}(2) \\ Q_c^{-1}(2)A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 16 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -40 & 14 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = M^{-1}B = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CM = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = [-4 \quad 1]$$

La RE sous forme commandable est donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -40 & 14 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = [-4 \quad 1]x$$

6) Forme Observable :

Puisque le système n'est pas observable alors on ne peut pas le mettre sous forme observable.

7) Calcul de la loi de commande par retour d'état $u = -Kx + y_r$, permettant de placer les pôles en boucle fermée (BF) à :-2 et -3 :

- Le polynôme caractéristique désiré en BF : $P_d(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$
- Calcul de $\tilde{K} = [\tilde{k}_0 \quad \tilde{k}_1]$: $\tilde{k}_0 = 6 - 40 = -34$, $\tilde{k}_1 = 5 - (-14) = 19$, $\tilde{K} = [-34 \quad 19]$
- Calcul de K : $K = \tilde{K}M^{-1} = [-34 \quad 23]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = [42 \quad 19]$

8) Valeur finale de la réponse indicielle $y(\infty)$:

La fonction de transfert en BF est donnée par :

$$H_{BF}(s) = C\big(sI - (A - BK)\big)^{-1}B,$$

La valeur finale de la réponse indicielle est donc :

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sH_{BF}(s)\tfrac{1}{s} = H_{BF}(0) = -C(A-BK)^{-1}B = -[0 \quad 1]\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[42 \quad 19]\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(\infty) = -[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -42 & -19 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}[0 \quad 1]\begin{bmatrix} -19 & -1 \\ 42 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3}$$

9) Loi de commande par RE pour avoir un gain statique unitaire en BF :

$$g = -(C(A-BK)^{-1}B)^{-1} = \frac{1}{y(\infty)} = -1.5$$

<u>Solution de l'exercice #5:</u>

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -12 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

1) Stabilité du système :

L'équation caractéristique du système est :

$$\det(sI - A) = 0 \Leftrightarrow \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} s+12 & 5 & 0 \\ -4 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s+12)(s^2-1) + 20s = 0 \Leftrightarrow s^3 + 12s^2 + 19s - 12 = 0$$

Les coefficients de l'équation caractéristique ne sont pas du même signe, donc le système est instable.

2) **Commandabilité du système :**

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 8 & -96 & 992 \\ 0 & 32 & -384 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$\det(Qc) = 8192 \neq 0 \Longrightarrow le\ système\ est\ commandable$

Observabilité du système :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(Qc) = -4 \neq 0 \Longrightarrow le\ système\ est\ observable$

3) **Calcul du gain K de la commande par retour d'état $u = -Kx + gy_r$ permettant placer les pôles en boucle fermée à :$-2 \pm 2j$ et $= -5$.**

Forme compagne de commande

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 8 & -96 & 992 \\ 0 & 32 & -384 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \qquad Qc^{-1} = \frac{1}{8192}\begin{bmatrix} 1024 & 3072 & 5120 \\ 0 & 256 & 3072 \\ 0 & 0 & 256 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} Qc^{-1}(3) \\ Qc^{-1}(3)A \\ Qc^{-1}(3)A^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8192}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 256 \\ 0 & 256 & 0 \\ 1024 & 0 & 256 \end{bmatrix}, \qquad M = (M^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 0 & 32 & 0 \\ 321 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -19 & -12 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique désiré en BF est

$$D_d(s) = (s + 2 + j2)(s + 2 - j2)(s + 5) = (s^2 + 4s + 8)(s + 5) = s^3 + 9s^2 + 28s + 40$$

$\tilde{k}_0 = 40 - (-12) = 52$

$\tilde{k}_1 = 28 - 19 = 9$

$\tilde{k}_2 = 9 - 12 = -3$

$\tilde{K} = [52 \quad 9 \quad -3]$

$$K = \tilde{K}M^{-1} = \frac{1}{8192}[52 \quad 9 \quad -3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 256 \\ 0 & 256 & 0 \\ 1024 & 0 & 256 \end{bmatrix} = [-0.375 \quad 0.28125 \quad 1.53125]$$

4) **Calcul du le gain de pré-compensation g qui assure une erreur statique de 10%.**

Dans ce cas : $y(\infty) = 0.90y_r$

On a : $y(\infty) = -C(A - BK)^{-1}Bgy_r$

Donc:

$$y(\infty) = 0.90y_r \Longrightarrow -C(A - BK)^{-1}Bg = 0.90 \Longrightarrow g = -0.90[C(A - BK)^{-1}B]^{-1} = 1.125$$

Solution de l'exercice #6:

Considérons le système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \quad -9 \quad 2]x$$

1) **Commandabilité et observabilité du système**

- Commandabilité

La représentation du système peut être mise sous forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}U \text{ avec } U = 4u$$

Le système est sous forme commandable donc il est commandable.

- Observabilité

On a : $Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 2 \\ -8 & -8 & -21 \\ 84 & 97 & 118 \end{bmatrix}$

$det(Q_0) = 9358 \neq 0 \Longrightarrow$ le système est obsevable

2) **Calcul de la commande par retour d'état ($u = -Kx + y_r$) et l'observateur permettant placer les pôles en boucle fermée à :$-1 \pm j$ et $= -2$ et les pôles de l'observateur à :$-10 \pm 2j$ et $= -20$.**

- Calcul du gain de commande $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

Le polynôme caractéristique désiré en BF est :

$$P_d(s) = (s+1+j)(s+1-j)(s+2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

On a : $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \tilde{k}_3]$

D'après la forme canonique de commande 2) de la représentation d'état du système entrée $U = 4u$ on a :

$$\tilde{k}_1 = 4 - 4 = 0$$
$$\tilde{k}_2 = 6 - 5 = 1$$
$$\tilde{k}_3 = 4 - 6 = -2$$

Alors : $\tilde{K} = [0 \quad 1 \quad 0]$ et $K = \frac{\tilde{K}}{4} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

- Calcul du gain de l'observateur $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$

La dynamique désirée de l'observateur es donnée par le polynôme caractéristique:

$$P_d(s) = (s+10+2j)(s+10-2j)(s+20) = s^3 + 40s^2 + 504s + 2080$$

Le représentation d'état du système dual est :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 4]x$$

$$Q_c^d = [C^T \quad A^T C^T \quad {A^T}^2 C^T] = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 84 \\ -9 & -8 & 97 \\ 2 & -21 & 118 \end{bmatrix}$$

$${Q_c^d}^{-1} = \frac{1}{9358} \begin{bmatrix} 1093 & -820 & -104 \\ 1256 & 68 & -950 \\ 205 & 26 & -88 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} {Q_c^d}^{-1} \\ {Q_c^d}^{-1} A^T \\ {Q_c^d}^{-1} {A^T}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9358} \begin{bmatrix} 205 & 26 & -88 \\ 26 & -88 & -422 \\ -88 & -422 & 2868 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 46 & 26 & 2 \\ 4 & -61 & -9 \\ -88 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1} A^T M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\tilde{l}_1 = 2080 - 4 = 2076$$
$$\tilde{l}_2 = 504 - 5 = 499$$
$$\tilde{l}_3 = 40 - 6 = 34$$

$$L^T = \tilde{L}^T M^{-1} = [2076 \quad 499 \quad 34] \frac{1}{9358} \begin{bmatrix} 205 & 26 & -88 \\ 26 & -88 & -422 \\ -88 & -422 & 2868 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{9358} [435562 \quad -4284 \quad 295754]$$

Donc :

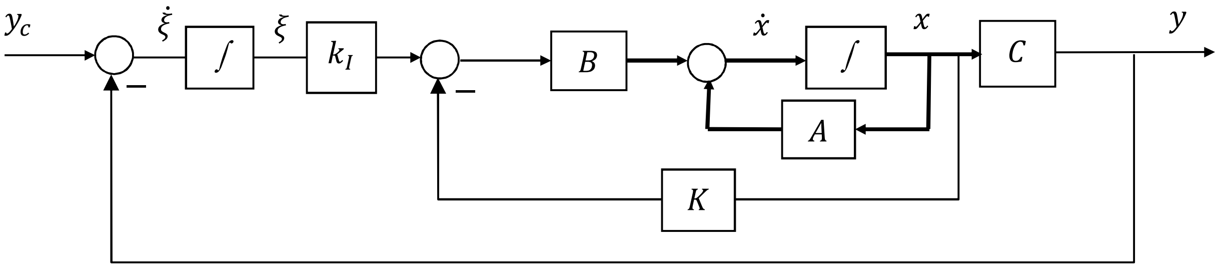
$$L = \frac{1}{9358} \begin{bmatrix} 435562 \\ -4284 \\ 295754 \end{bmatrix}$$

Solution de l'exercice #7:

On le système donné par sa représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

On veut réaliser la loi de commande par retour d'état donné par le schéma bloc de la figure suivante :



1) Pour que schéma bloc de la commande par retour d'état soit réalisable il faut que le système soit commandable et toutes les variables d'états soient mesurables.

Vérification de la commandabilité :

On a : $Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(Q_c) = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ le système est commandable

Donc la commande par retour d'état est réalisable si les variables d'état sont mesurables.

2) Calcul des gains K et k_I permettant de placer les pôles en boucle fermée à :-1.

$$A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ K^* = [K \quad -k_I]$$

Forme commandable du système (A^*, B^*)

$$Q_c = [B^* \quad A^*B^* \quad A^{*2}B^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_c(3) \\ Q_c(3)A^* \\ Q_c(3)A^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^* = M^{-1}A^*M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}^* = M^{-1}B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique désiré :

$$P_d(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Calcul de $\tilde{K}^* = [\tilde{k}^*{}_0 \quad \tilde{k}^*{}_1 \quad \tilde{k}^*{}_1]$

$$\tilde{k}^*{}_0 = 1 - 0 = 1, \qquad \tilde{k}^*{}_1 = 3 - (-1) = 4, \qquad \tilde{k}^*{}_2 = 3 - 0 = 3$$
$$\tilde{K}^* = [1 \quad 4 \quad 3]$$

Calcul de K et k_I

$$K^* = [K \quad -k_I] = \tilde{K}^* M^{-1} = [1 \quad 4 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [4 \quad 3 \quad -1]$$

Donc : $K = [4 \quad 3]$ et $k_I = 1$