Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Master Mathématiques Fondamentales et Discrètes : Devoir

Problème

Soit q un réel strictement supérieur à 1, on définit la fonction q-logarithme notée $l_q(x)$ par

$$l_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{[n]_q}, \qquad |x-1| < q,$$

avec

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + ... + q^n.$$

1. Montrer que

$$l_q(x) = (q-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x-1+q^m}.$$

2. Dans toute la suite m_q désigne la q-mesure de Mahler (N. Kurokawa). Montrer que :

a).

$$m_q((x+a)(x+b)) = l_q(ab), \qquad a,\ b > 1.$$

b). Si $|a| < q-1$, alors

$$m_q(ax) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} = l_q(0).$$

c). Si $q > 3$, alors

$$m_q(2x) < m_q(2) + m_q(x).$$