Département de mathématiques, Université de Jijel
3ème année Mathématiques

SOLUTION DU QCM
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes

1: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, **(Vrai)**
$(U_n)_n$ est une suite de Cauchy $\Leftrightarrow$ $(U_n)_n$ admet une sous suite convergente.

2: On considère l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ muni des normes

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Alors $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. **(Faux)**, seulement en dimension finie.

3: Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E, on a l'équivalence:
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l pour $N_1 \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l pour N_2. **(Vrai)**

4: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, alors la boule unitée fermée est compacte. **(Faux)**, seulement en dimension finie.

5: Soient E et F des espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F muni de la norme $\|f\| = \sup_{\|t\|=1} \|f(t)\|$. Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach. **(Faux)**, il faut que F soit un Banach.