

### (I) Questions de cours

- (1) Écrire la densité lagrangienne de Dirac et montrer qu'elle est invariante sous la transformation globale du groupe abélien  $U(1)$ .
- (2) Calculer le courant de Noether associé et montrer qu'il est conservé.
- (3) Considérons la densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i \not{D} - m)\psi(x).$$

avec

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

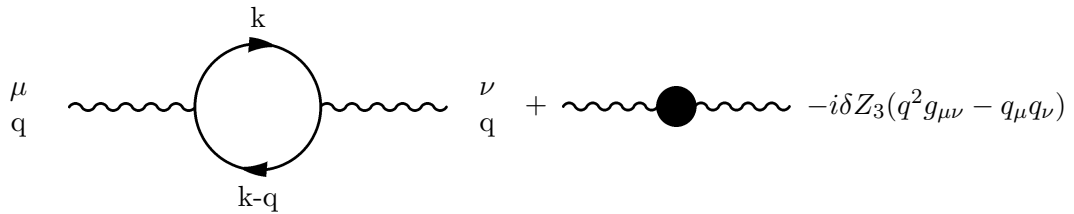
$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

Dériver la transformation du champs  $A_\mu$  qui laisse la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  invariante sous la transformation locale  $e^{ie\theta(x)} \in U(1)$  (où  $\theta(x)$  est une fonction analytique de  $x$ ).

- (4) Au niveau quantique, cette densité lagrangienne est mal définie.
  - (a) Expliquer pourquoi.
  - (b) Comment peut-on résoudre ce problème?
  - (c) Est ce que la nouvelle densité lagrangienne reste invariante sous les transformations de jauge locales des champs  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  et  $A_\mu$  ? Justifier la réponse.

### (II) Exercice: Corrections radiatives en QED et QCD

- (1) Considérons la *polarisation du vide* (correction au propagateur du photon) représentée par le digramme suivant,



On suppose que les photons externes sont hors-couche masse.

- (a) Par le comptage de puissance, montrer que ce diagramme diverge dans l'ultraviolet (UV).
- (b) Dans le cours, on a calculé la *polarisation du vide* et on a montré que,

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = i(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2).$$

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln \left( \frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda}{\mu^2} \right) \right].$$

Expliquer la technique de calcul de ce diagramme en citant les étapes de calcul.

- (c) Pour compenser les divergences UV de ce diagramme, on introduit le contre terme  $\delta Z_3$ . Calculer ce dernier dans les schémas MS et  $\overline{\text{MS}}$  et ON.

- (2) On néglige les masses des fermions, et on suppose que la seule correction radiative à une boucle est celle de la *polarisation du vide* (on néglige les autres diagrammes à une boucle pour simplifier le

calcul). Sachant que le carré de l'amplitude de l'ordre de *Born*, sommée et moyennée sur le spin, de la réaction  $e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4)$  est donnée par

$$\begin{aligned}\overline{\sum} |M^{(0)}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'}) \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}) \\ &= 32\pi^2 \alpha \frac{t^2 + u^2}{s^2},\end{aligned}\quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

et

$$\begin{aligned}\bar{v}(p_1) \not{q} u(p_1) \bar{u}(p_3) \not{q} v(p_4) &= 0, & q &= p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \\ s &= (p_1 + p_2)^2, & t &= (p_1 - p_3)^2, & u &= (p_1 - p_4)^2.\end{aligned}$$

Calculer le carré de l'amplitude de ce processus à une boucle (l'ordre  $\alpha^3$ ).

(3) Tracer tous les diagrammes de la correction au propagateur du gluon à une boucle.

(4) Parmi ces diagrammes, il figure un diagramme avec une boucle de quarks. Déduire sa valeur.

(5) Calculer le carré de l'amplitude à une boucle de la réaction  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q'(p_3) + \bar{q}'(p_4)$  si on ne considère que le diagramme de la question (4) comme contribution à une boucle. On néglige les masses des quarks, et on donne le carré de l'amplitude de l'ordre de *Born*, sommée et moyennée sur spin et couleur

$$\begin{aligned}\overline{\sum} |\widetilde{M}^{(0)}|^2 &= \frac{1}{4N^2} \text{Tr}(T^a T^{a'}) \text{Tr}(T^a T^{a'}) \frac{g^4}{s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'}) \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}) \\ &= \frac{64\pi^2 \alpha_s}{9} \frac{t^2 + u^2}{s^2},\end{aligned}\quad \text{avec} \quad \alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}.$$

### (III) Diffusion profondément inélastique d'un antineutrino sur un proton:

$$\bar{\nu} + P \rightarrow e^+ + X$$

Le but de cet exercice est l'étude de la réaction ci-dessus dans le cadre du modèle des partons: l'antineutrino interagit avec les quarks  $q$  et antiquarks  $\bar{q}$  du proton; on calculera d'abord la section efficace  $\bar{\nu} + q$  et  $\bar{\nu} + \bar{q}$ . On suppose le proton constitué de quarks  $u, d$  et d'antiquarks  $\bar{u}, \bar{d}$  de charge respective  $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ , et de masse nulle. L'antineutrino et le positon  $e^+$  sont aussi supposés de masse nulle.

**Cinématique:** Les impulsions des particules sont définies par:

$$\bar{\nu}(p_1) + q(p_2) \rightarrow e^+(p_3) + q'(p_4) \quad \text{ou} \quad \bar{\nu}(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow e^+(p_3) + \bar{q}'(p_4).$$

et on note:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2, \quad q^2 = -Q^2 = \hat{t} = (p_1 - p_3)^2, \quad \hat{u} = (p_1 - p_4)^2.$$

(1) Tracer les deux diagrammes de Feynman qui, au niveau partonique, participent à la réaction (attention à la conservation de charge aux vertex !).

(2) Écrire les amplitudes de diffusion pour chacun des deux diagrammes et montrer que le terme  $q_\mu q_\nu$  du propagateur du boson  $W^-$  ne contribue pas.

(3) Écrire, le carré de chaque amplitude sommée et moyennée sur spin et couleur et montrer que l'on a:

$$\overline{\sum} |M_1|^2 = \frac{g_W^4}{(q^2 - M_W^2)^2} \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)) \text{Tr}(\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu (1 - \gamma_5))$$

$$\overline{\sum} |M_2|^2 = \frac{g_W^4}{(q^2 - M_W^2)^2} \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)) \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu (1 - \gamma_5))$$

(4) Évaluer les traces et montrer que l'on a

$$\overline{\sum} |M_{1/2}|^2 = \frac{8g_W^4}{(q^2 - M_W^2)^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2 \mp (\hat{s}^2 - \hat{u}^2))$$

(5) Calculer la section efficace partonique et montrer que :

$$\frac{E_3 d\hat{\sigma}^{1/2}}{d^3 p_3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\hat{s}} |M_{1/2}|^2 \delta(Q^2 - 2p_2 \cdot q)$$

(6) Introduisant les notations  $x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$  et les distributions de quarks  $f_u(z), f_d(z), f_{\bar{u}}(z), f_{\bar{d}}(z)$  du proton où  $z$  est la fraction d'impulsion  $z = p_2/P$  du proton portée par le quark/antiquark, écrire la section efficace différentielle de la diffusion, faisant l'approximation  $Q^2 \ll M_W^2$  dans le dénominateur (propagateur du  $W$ ). On rappelle qu'au niveau hadronique on a  $\hat{s} = zs$ ,  $\hat{t} = -Q^2$  et  $\hat{u} = zu$ .

#### (IV) Appendices

- Courant de Noether pour la densité lagrangienne  $\mathcal{L}(\partial\phi_r, \partial_\mu\phi_r)$ :

$$j^\mu = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r. \quad (1)$$

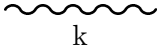
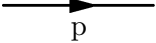
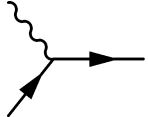
où  $\phi_r$  (pour  $r = 1, 2, \dots$ ) sont les champs de la théories.

- Degré superficiel de divergence UV en QED,  $\omega(G)$ , d'un diagramme à une boucle  $G$ :

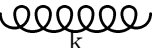
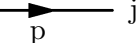
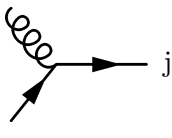
$$\omega(G) = 4 - I_F - 2I_B.$$

où  $I_B$  et  $I_F$  sont les nombres de propagateurs bosoniques et fermioniques internes, respectivement.

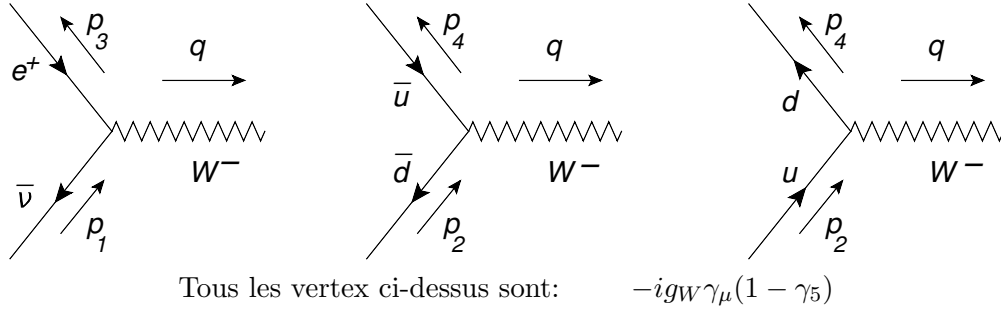
- Règles de Feynman en QED (en jauge de Feynman):

	$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda}$
	$\frac{i}{\not{p} - m + i\lambda}$
	$-ie\gamma^\mu$

- Règles de Feynman en QCD (en jauge de Feynman):

$a, \mu$  $b, \nu$	$\frac{-ig^{\mu\nu} \delta^{ab}}{k^2 + i\lambda}$
$i$  $j$ $a, \mu$	$\frac{i \delta^{ij}}{\not{p} - m + i\lambda}$
 $i$	$-ig (T^a)_{ji} \gamma^\mu$

- Règles de Feynman en MS:



$$\begin{array}{c} q \\ \longrightarrow \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad -i (g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_W^2) / (q^2 - M_W^2)$$

- Matrices de couleur:

$$\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta_{ab}$$

- Propriétés des matrices de Dirac et la matrice  $\gamma^5$ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5.$$

$$\text{Tr}(\gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda) = -4i \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}.$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\sigma)$$

- Propriétés des spineurs de Dirac pour les quarks et leptons (de masse nulle):

$$\sum_{s,i,j} u_{sj}(p) \bar{u}_{si}(p) = (\not{p}) \delta_{ij}, \quad \sum_{s,i,j} v_{sj}(p) \bar{v}_{si}(p) = (\not{p}) \delta_{ij}.$$

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\not{p}), \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = (\not{p}).$$

$$\begin{array}{llll} \not{p} u(p) = 0, & \bar{u}(p) \not{p} = 0, & \not{p} u_i(p) = 0, & \bar{u}_i(p) \not{p} = 0. \\ \not{p} v(p) = 0, & \bar{v}(p) \not{p} = 0, & \not{p} v_i(p) = 0, & \bar{v}_i(p) \not{p} = 0. \end{array}$$

où les indices  $i, j$  indiquent les couleurs des quarks.