Examen de rattrapage de théories de jauge *11/4/2017, Durée 3 heures*
M2 physique théorique *Année universitaire 2016-2017*

(I) Exercice: matrices de Dirac

Montrer les relations suivantes:

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2 \not{p}. \tag{1}$$
$$2p.q = \not{q} \not{p} + \not{p} \not{q}. \tag{2}$$
$$\gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu = 4p.q \mathbb{1} \tag{3}$$
$$\gamma_\mu \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^\mu = -2 \not{r} \not{q} \not{p}. \tag{4}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{p} \gamma_\mu \not{s} \gamma_\nu \not{r} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu] = 4\mathrm{Tr}[\not{p} \not{q} \not{r} \not{s}]. \tag{5}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{p} \not{q} \not{r} \not{s}] = 4(p.q\, r.s + p.s\, q.r - p.r\, q.s). \tag{6}$$

où p, q, r et s sont des 4-vecteurs.

(II) Problème: réaction avec un photon

Le but de ce problème est d'étudier le processus d'annihilation d'une paire $q\bar{q}$ en un photon γ et un gluon G, au niveau partonique.

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \to \gamma(p_3) + G(p_4). \tag{7}$$

(on néglige les masses des quarks et on travaille en jauge de Feynman).

(1) Tracer les deux diagrammes de Feynman qui, au niveau partonique, participent à cette réaction.

(2) Écrire les amplitudes de diffusion pour chacun des deux diagrammes (on les note par M_1 et M_2, respectivement).

(3) Écrire, le carré de l'amplitude M_1 sommée et moyennée sur spin et couleur et montrer qu'il s'écrit sous la forme:

$$\overline{\sum} |M_1|^2 = \frac{g^2 e_q^2}{9\, t^2} \mathrm{Tr}[T^a T^a]\, \mathrm{Tr}[\not{p}_2 \not{q}_1 \not{p}_1 \not{q}_1]. \tag{8}$$
$$= g^2 e_q^2\, \mathrm{Tr}[T^a T^a]\, \frac{2}{9} \frac{u}{t}. \tag{9}$$

où $q_1 = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ et e_q est la charge électrique des quarks q.

(4) Écrire, le carré de l'amplitude M_2 sommée et moyennée sur spin et couleur et montrer qu'il s'écrit sous la forme:

$$\overline{\sum} |M_2|^2 = \frac{g^2 e_q^2}{9\, u^2} \mathrm{Tr}[T^a T^a]\, \mathrm{Tr}[\not{p}_2 \not{q}_2 \not{p}_1 \not{q}_2]. \tag{10}$$
$$= g^2 e_q^2\, \mathrm{Tr}[T^a T^a]\, \frac{2}{9} \frac{t}{u}. \tag{11}$$

où $q_2 = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$.

(5) Écrire, le terme d'interférence entre les amplitudes M_1 et M_2 sommée et moyennée sur spin et couleur et montrer que

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\left[\overline{\sum}(M_1\overline{M}_2)\right] &= -\frac{g^2e_q^2}{9\,tu}\mathrm{Tr}[T^aT^a]\,\mathrm{Tr}[\not{p}_2\ \not{p}_1\gamma^\mu\ \not{q}_1\ \not{q}_2\gamma_\mu] \\
&= 0. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

(6) Montrer que le carré de l'amplitude totale sommée et moyennée sur spin et couleur est

$$
\begin{aligned}
\overline{\sum}|M|^2 &= \alpha\alpha_s q_i\,\frac{128}{9}\,\frac{u^2+t^2}{ut}. \qquad (13)\\
&= \alpha\alpha_s q_i\,\frac{256}{9}\,\frac{1+(\cos(\theta))^2}{1-(\cos(\theta))^2}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

où $e_q = eq_i$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ et θ est l'angle entre $\vec{p}_3$ et $\vec{p}_1$ dans le référentiel du centre de masse $q\bar{q}$ (voir l'appendice).

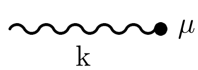
(7) Montrer qu'on peut écrire la section efficace partonique différentiel, dans le référentielle du centre de masse $q\bar{q}$, sous la forme suivante

$$
\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} = \left.\frac{\overline{\sum}|M|^2}{64\pi^2 s}\right|_{|\vec{p}_3|\to\frac{\sqrt{s}}{2}}. \qquad (15)
$$

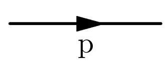
où $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$.

(III) Appendices

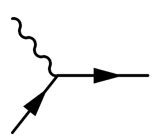
- Règles de Feynman en QED:



$\epsilon_\mu(k)$

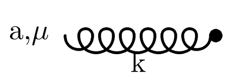


$$\frac{i}{\not{p}-m+i\,\lambda}$$

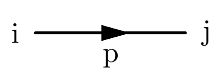


$$-\,ie\gamma^\mu$$

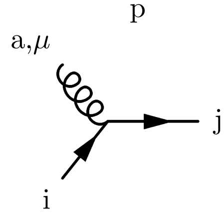
- Règles de Feynman en QCD:



$\epsilon^a_\mu(k)$

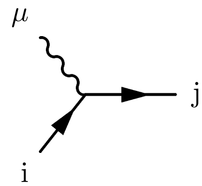


$$\frac{i\,\delta^{ij}}{\not{p}-m+i\,\lambda}$$



$$-\,i\,g\,(T^a)_{ji}\,\gamma^\mu$$

- Interaction photon-quark-quark:



$$- i\, e_q\, \delta_{ij}\, \gamma^\mu$$

- Matrices de couleur:

$$Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

- Propriétés des matrices de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}).$$

- Propriétés des spineurs de Dirac pour les quarks (de masse nulle):

$$\sum_{s,i,j} u_{sj}(p)\bar{u}_{si}(p) = (\not{p})\delta_{ij}, \qquad \sum_{s,i,j} v_{sj}(p)\bar{v}_{si}(p) = (\not{p})\delta_{ij}.$$

  où les indices i, j indiquent les couleurs et s les états de spin des quarks.

- Somme sur les polarisations du photon (en jauge de Feynman):

$$\sum_\lambda \epsilon^\mu_\lambda(p)\epsilon^{*\nu}_\lambda(p) = -g^{\mu\nu}. \tag{16}$$

- Somme sur les polarisations du gluon (en jauge de Feynman):

$$\sum_\lambda \epsilon^{a,\mu}_\lambda(p)\epsilon^{*b,\nu}_\lambda(p) = -\delta_{ab}g^{\mu\nu}. \tag{17}$$

  où a, b indiquent les couleurs des gluons.

- Variables de MandelStam:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_1 - p_3)^2, \qquad u = (p_1 - p_4)^2.$$
$$0 = s + t + u. \tag{18}$$

- Section efficace:

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}}\, |M|^2\, \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \tag{19}$$

- Référentiel du centre de masse:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1), \qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1), \qquad p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin(\theta), 0, \cos(\theta)). \tag{20}$$

P. AURENCHE et M. S. ZIDI

Bon courage